1 Estructura Fina del espectro del átomo de Hidrógeno

Atomo de Hidrógeno Relativista: $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}+\frac{a}{r}$, $v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$, $p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m\gamma r^2\dot{\varphi}$

$p_r=m\gamma\dot{r}$, $p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}=m^2\gamma^2\dot{r}^2+m^2\gamma^2r^2\dot{\varphi}^2=m^2\gamma^2v^2=\frac{-m^2c^4+K^2}{c^2}=m^2\gamma^2c^2\Big(1-1+\frac{v^2}{c^2}\Big)$.

$p_\varphi=n_\varphi\hbar$. $E=K-\frac{a}{r}$, $p_r=\sqrt{-m^2c^2+\frac{(E+\frac{a}{r})^2}{c^2}-\frac{p_\varphi^2}{r^2}}$

- Dos puntos de ramificación. Corte a lo largo del eje $\mathrm{Re}\,r$.
- Polo en $r=0$. $\mathrm{Res}=\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-p_\varphi^2}$
- $r=\frac{1}{t},\frac{1}{t^2}\sqrt{-m^2c^2+\frac{(E+a\,t)^2}{c^2}-p_\varphi^2t^2}=\frac{1}{t^2}\sqrt{-m^2c^2+\frac{E^2}{c^2}}\left(1+\frac{a\,E\,t}{(-m^2c^4+E^2)}\right)$, $\mathrm{Res}=-i\frac{a\,E}{(m^2c^4-E^2)}\sqrt{m^2c^2-\frac{E^2}{c^2}}=-\frac{i\,a\,E}{c^2\sqrt{m^2c^2-\frac{E^2}{c^2}}}$
- $\frac{a\,E}{c^2\sqrt{m^2c^2-\frac{E^2}{c^2}}}-\sqrt{-\frac{a^{\,2}}{c^2}+p_\varphi^2}=n_r\hbar$
- $\left(\frac{a}{c^2}\right)^2E^2=\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2\left(m^2c^2-\frac{E^2}{c^2}\right)$

$$E^2=\frac{m^2c^2\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2}{\left(\frac{a}{c^2}\right)^2+\frac{\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2}{c^2}},\ E=\frac{m\,c^2\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$E=\frac{m\,c^2\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2}}=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}\frac{1}{\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+p_\varphi^2}\right)^2}}}$$

$$E=\qquad\frac{m\,c^2}{\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}\frac{1}{\left(n_r\hbar+\sqrt{-\frac{a^2}{c^2}+n_\varphi^2\hbar^2}\right)^2}}}\sim$$

$$m\,c^2-\frac{m\,a^2}{2(n_r+n_\varphi)^2\hbar^2}+\frac{m\left(-1-4\,\frac{n_r}{n_\varphi}\right)\frac{a^4}{c^2}}{8\,(n_r+n_\varphi)^4\hbar^4}+$$

$$m\,c^2-\quad\frac{m\,a^2}{2(n_r+n_\varphi)^2\hbar^2}\left[1+\frac{2a^2}{c^2\hbar^2(n_r+n_\varphi)^2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ \frac{n_r}{n_\varphi}\right)\right],\quad n=n_r+n_\varphi$$

$$E=m\,c^2-\frac{m\,a^2}{2n^2\hbar^2}\left[1+\frac{a^2}{c^2\hbar^2 n}\left(\frac{1}{4n}+\frac{n-n_\varphi}{n_\varphi n}\right)\right]=$$

$$mc^2 - \frac{ma^2}{2n^2\hbar^2}\left[1 + \frac{a^2}{c^2\hbar^2 n}\left(\frac{1}{n_\varphi} - \frac{3}{4n}\right)\right] =$$

$$E = mc^2 - \frac{ma^2}{2n^2\hbar^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{n_\varphi} - \frac{3}{4n}\right)\right]$$

El espectro depende de n_r, n_φ por separado. La degeneración se ha eliminado.

$\alpha = k\frac{e^2}{\hbar c}$= constante de estructura fina=$7.297 \times 10^{-3} \simeq \frac{1}{137}$

---

2 Precesión del perihelio de Mercurio según la Relatividad Especial

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{GMm}{r}, a = GMm$$

$$v^2 = r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2$$

Constantes de movimiento:

$$mc^2\gamma - \frac{GMm}{r} = E$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}\gamma$$

$$p_r = \sqrt{-m^2c^2 + \frac{\left(E + \frac{a}{r}\right)^2}{c^2} - \frac{p_\phi^2}{r^2}} = m\gamma\dot{r}$$

$$\frac{p_r}{p_\phi} = \frac{\dot{r}}{r^2\dot{\phi}}$$

$$\frac{dr}{d\phi} = r^2 \frac{p_r}{p_\phi}$$

$$u = \frac{1}{r}, \quad \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} =$$

$$-\frac{1}{p_\phi}\sqrt{-m^2c^2 + \frac{(E+au)^2}{c^2} - p_\phi^2 u^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{-m^2c^2 + \frac{(E+au)^2}{c^2} - p_\phi^2 u^2}{p_\phi^2}$$

$$2u'u'' = -2uu' + 2\frac{(E+au)}{c^2p_\phi^2}au'$$

$$u'' = -u + \frac{Ea}{c^2p_\phi^2} + \frac{a^2u}{c^2p_\phi^2} = -u\left(1 - \frac{a^2}{c^2p_\phi^2}\right) + \frac{Ea}{c^2p_\phi^2},$$

$$\omega^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2p_\phi^2}$$

$$u = u_0 + \mathrm{A}\cos(\omega\phi + \alpha)$$

$$u'' = -\omega^2(u - u_0), \qquad u_0 = \frac{Ea}{c^2p_\phi^2\omega^2}$$

$$r = \frac{1}{u_0 + \mathrm{A}\cos(\omega\phi + \alpha)}$$ $u_0 > 0$, Supongamos que $A < 0$

Elegimos $\phi = 0$ en la posición del perihelio (r es mínimo), $\alpha = 0$

Precesión del Perihelio: La posición angular del perihelio después de n vueltas es:

$$\phi_n = \frac{2\pi n}{\omega} \simeq 2\pi n\left(1 + \frac{a^2}{2c^2 p_\phi^2}\right)$$

El perihelio se desplaza en un ángulo: $\Delta\phi_n = \frac{\pi a^2}{c^2 p_\phi^2} n$

La velocidad angular de precesión del perihelio es $\Omega = \frac{\pi a^2}{c^2 p_\phi^2 T}$, donde T es el período de la órbita elíptica.

Esto es $1/6$ del valor predicho por la Relatividad General, que está de acuerdo con los experimentos.