PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Física

# FIZ0311

Prof. Jorge Alfaro S.
INTERROGACION 2 Viernes 15 de Mayo de 2015

**Problema 1.**

Un electrón en un átomo monoelectrónico tiene función de onda en coordenadas esféricas

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A e^{-Zr/a_0}$$

Donde $A$ es una constante.$a_0$ es el radio de Bohr del átomo

a) Normalice $\Psi$ (i.e. encuentre A en funcion de $Z$ y $a_0$). (1,5 pt)

- $\int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 A^2\ e^{-2Zr/a_0} = 1 = 4\pi A^2 \int_0^\infty dr r^2\ e^{-2Zr/a_0},\ x = 2Zr/a_0, \int_0^\infty dr r^2\ e^{-2Zr/a} = (\frac{a_0}{2Z})^3 \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} = 2(\frac{a_0}{2Z})^3,\ \ 4\pi A^2 2 (\frac{a_0}{2Z})^3 = 1,\ A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}$

b) Determine el valor de expectacion de $r$. (1,5 pt)

- $<r> = \int d\Omega \int_0^\infty dr r^3 A^2 e^{-2Zr/a_0} = 4\pi A^2 (\frac{a_0}{2Z})^4 6 = 3\frac{a_0}{2Z}$

c) ¿Para qué $r$ es más probable encontrar al electrón? (1,5 pt)

- $P(r) = A^2 r^2 e^{-2Zr/a_0},\ P'(r) = 0 = A^2(2r - 2Zr^2/a_0)e^{-2Zr/a_0}, r = \frac{a_0}{Z}$

d) Determine el valor de expectacion de la energía cinética de la partícula $K = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$. (1,5 pt)

Indic:$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x^i} = \frac{x^i}{r}\frac{d\psi}{dr}$.

- $\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x^i}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\right)\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right)$
- $\int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 A^2 e^{-Zr/a_0} \mathrm{K}\ e^{-Zr/a_0} = -4\pi A^2 \frac{\hbar^2}{2m}\int dr r^2 e^{-Zr/a_0}\left(\frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2}\right)e^{-Zr/a_0} =$
$-4\pi A^2 \frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty dr r^2 e^{-Zr/a_0}\left(-\frac{2Z}{a_0 r} + \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)e^{-Zr/a_0} = -4\pi A^2 \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-\frac{2Z}{a_0}\right)(\frac{a_0}{2Z})^2 + \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2 (\frac{a_0}{2Z})^3 2\right] =$
$-4\pi A^2 \frac{\hbar^2}{2m}\frac{a_0}{2Z}\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{2Z}{a_0}\right)^2$

**Problema 2.**

a) Muestre que la longitud de onda de De Broglie de una partícula cuya energía total es mucho mayor que su energía en reposo, es aproximadamente igual a la longitud de onda de un fotón con la misma energía.(3 pt.)

R:$\lambda = \frac{h}{p},\ E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \sim cp,\ \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{c}{\nu} = \lambda_f$

b) Determine la longitud de onda de De Broglie para un protón con energía cinética 70 MeV y para un bala de 100 gr que se mueve a 900 m/s . Compare ambos resultados.(3pt.) $m_p = 938\,\text{Mev}/c^2$

R: $\lambda_p = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} Js}{\sqrt{2 \times 70 \times 938}\,\text{Mev}} c = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 70 \times 938}\times 1.6 \times 10^{-13}} \times 3 \times 10^8 m = 3.42 \times 10^{-15} m$

$\lambda_b = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{0.1 \times 900} m = 7.36 \times 10^{-36} m$

**Problema 3.**

a) Considere un electrón preso en un pozo unidimensional cuadrado infinito de largo $2a$. Determine una expresión para los niveles de energía electrónicos usando la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld.(3pt.)

R:$2\int_{-a}^{a} dx\, p = nh, p = \frac{nh}{4a}$, $E = \frac{p^2}{2m} = n^2\frac{h^2}{32a^2m}$

b) Encuentre los niveles de energía del electrón usando la ecuación de Schrodinger. Compare su resultado con lo obtenido en la parte a).(3pt.)

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi \qquad \Psi(\pm a) = 0$$

$$\Psi(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega(x+a)) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\mathrm{sen}(2\omega a) = 0 \qquad 2\omega a = n\pi, n = 1, 2....$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} \qquad n = 1, 2....$$

**Problema 4.**

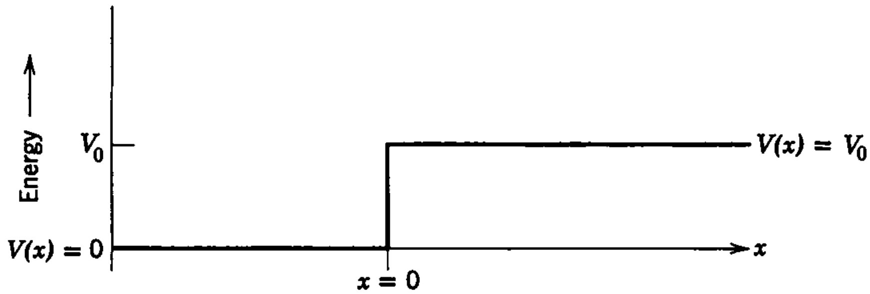


**Figura 1.**

Una partícula de masa $m$ incide desde la izquierda sobre la barrera de potencial de la figura.

a) Encontrar la función de onda de la partícula en todo el espacio, para $E > V_0$, donde $E$ es la energía.(4pt.)

1. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi, \Psi = A_1 e^{\frac{i}{\hbar}px} + B_1 e^{-\frac{i}{\hbar}px}, p = \sqrt{2mE}$
2. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -(E - V_0)\Psi, \Psi = A_2 e^{\frac{i}{\hbar}qx} + B_2 e^{-\frac{i}{\hbar}qx}, q = \sqrt{2m(-V_0 + E)}, B_2 = 0.$

Continuidad de la función y su primera derivada en el borde.

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad \frac{i}{\hbar}pA_1 - \frac{i}{\hbar}pB_1 = \frac{i}{\hbar}qA_2$$
$$B_1 = A_2 - A_1 \quad pA_1 - pA_2 + pA_1 = qA_2 \quad A_1 = \frac{p+q}{2p}A_2$$
$$B_1 = \frac{p-q}{2p}A_2$$

b) Calcular el coeficiente de reflexión de la partícula debido a la barrera situada en $x = 0$.(2pt.)

$S = -i\frac{\hbar}{2m}(\psi(x,\, t)^\star \partial_x \psi(x,\, t) - \psi(x,\, t)\partial_x \psi(x,\, t)^\star) = \frac{p}{2m}\left(A_1^\star e^{-\frac{i}{\hbar}px} + B_1^\star e^{\frac{i}{\hbar}px}\right)\left(A_1 e^{\frac{i}{\hbar}px} - B_1 e^{-\frac{i}{\hbar}px}\right) -= \frac{p}{2m}\left(|A_1|^2 - A_1^\star B_1 e^{-2\frac{i}{\hbar}px} + B_1^\star A_1 e^{2\frac{i}{\hbar}p} - |B_1|^2 + \mathrm{cc}\right) = \frac{p}{m}(|A_1|^2 - |B_1|^2)$

$$R = \frac{\frac{p}{m}(|B_1|^2)}{\frac{p}{m}(|A_1|^2)} = \frac{\left(\frac{p-q}{2p}\right)^2 |A_2|^2}{\left|\frac{p+q}{2p}A_2\right|^2} = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$$

Algunas fórmulas:

Elemento de volumen en coordenadas esféricas: $d\Omega dr r^2$. $\int d\Omega = 4\pi$.
$\int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x} = (n-1)!$

$h = 6.626 \times 10^{-34} Js$, $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$

Tiempo: 2 horas