



Ludwig Boltzmann:

- Ensemble microcanónico. Energía total del sistema es constante. Todos los estados microscópicos son igualmente probables. La entropía del sistema es: $S = k_B \ln W$. W es el número de estados accesibles. k_B es la constante de Boltzmann.
- Ensemble canónico. El sistema está en equilibrio térmico con un reservorio de calor a temperatura T . La probabilidad que un estado del sistema tenga energía E es:

$$P(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E}, \quad Z = \sum_E e^{-\beta E} = e^{-\beta F} \text{ es la función de partición, } \beta = \frac{1}{k_B T}, F: \text{Energía libre.}$$

- Ensemble GranCanónico. El sistema está en equilibrio térmico con un reservorio de calor a temperatura T con el cual puede intercambiar partículas. La probabilidad que un estado tenga energía E y N partículas es:

$$P(E, N) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E + \mu N}, \quad Z = \sum_{E, N} e^{-\beta E + \mu N} = e^{-G} \text{ es la función de Granpartición, } \beta = \frac{1}{k_B T}, G: \text{Energía libre de Gibbs. } \mu: \text{potencial químico.}$$

$$E = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m},$$

$$Z = \prod_i \int d^3x d^3p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} =$$

$$\left(V \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \right)^N$$

$$F = -\frac{N}{\beta} \left(\ln V + \frac{3}{2} \ln T + \text{cte} \right)$$

$$F = U - TS \quad dF = TdS - PdV - TdS - SdT = -SdT - PdV$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{N}{\beta V},$$

$$PV = Nk_B T$$

La última ecuación es la ecuación de estado del gas ideal.

$$\text{Energía: } U = \langle E \rangle = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = N \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T$$

Entropía:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = Nk_B\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}\right) + \frac{3}{2}Nk_B = Nk_B\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}'\right) \quad (1)$$

La entropía debe ser una función extensiva de las variables extensivas V, N . Tenemos

$$S(\lambda V, \lambda N, T) = \lambda S(V, N, T)$$

$$S = Ns(v, T), \quad v = \frac{V}{N}$$

- (1) no es una función extensiva de V, N .
- $Z \rightarrow \frac{Z}{N!}, F = -\frac{N}{\beta} \left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}\right) + \frac{1}{\beta}\ln N!$
- Fórmula de Stirling: $\ln N! \sim N \ln N - N$
- $F = -\frac{N}{\beta} \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}''\right), S = Nk_B \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}''\right)$
- $N!$ sólo se entiende en Mecánica Cuántica. Identidad de Partículas.

Gas ideal en un campo gravitacional uniforme: $E = \frac{p^2}{2m} + m g z$

- Encuentre la densidad como función de z : $\rho(z)$. La probabilidad de encontrar una partícula del gas entre z y $z + dz$ es: $B e^{-\beta m g z} dz A = \frac{dn}{N}$, dn = número de partículas en el volumen $dV = A dz$, N es el número de partículas en el cilindro de base A , $\frac{dn}{dV} = N B e^{-\beta m g z}$, $\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta m g z}$
- Suponga que el aire es un gas ideal de peso molecular 28.6, encuentre la densidad del aire situado 1km sobre la superficie de la Tierra con $T = 300K$. La densidad del aire en la superficie de la Tierra es $\rho_0 = 1.292 \text{ kg/m}^3$ con $T = 300K$.

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = e^{-\beta m g z}, \rho(1000) = 1.154 \text{ kg/m}^3$$

El primer nivel excitado en el átomo de H $E_2 = E_1 + 10.2\text{eV}$, E_1 es el nivel fundamental. Encontrar la proporción de átomos de H en el primer nivel excitado comparado con átomos en el nivel fundamental para:

- $T = 300\text{K}$, R: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta(E_2 - E_1)} = 4e^{-\frac{10.2\text{eV}}{kT}} = 4e^{-392} \simeq 0$, $g(E)$ = degeneración del nivel E , $g_1 = 2, g_2 = 2 \times 2^2 = 8$
- $T = 5800\text{K}$ (superficie del Sol) R: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta(E_2 - E_1)} = 4e^{-\frac{10.2\text{eV}}{kT}} = 4e^{-20.4} \sim 10^{-8}$
- Esto explica que un recipiente con H a temperatura ambiente no emite espontáneamente la serie de Balmer del espectro visible.
- En la superficie del Sol, sin embargo, hay del orden de 10^{15} átomos por mol de H en el nivel E_2 y el átomo emite en el espectro visible.

En 1860 J.C. Maxwell descubrió la ley de distribución de velocidades de las moléculas de un gas.

Sea N_v tal que el número de moléculas del gas con módulo de la velocidad entre v y $v + dv$ es:

$$dN = N_v dv$$

De la Ley de Boltzmann, el número de moléculas (por unidad de volumen) que tiene energía (cinética), entre E y $E + dE$ es:

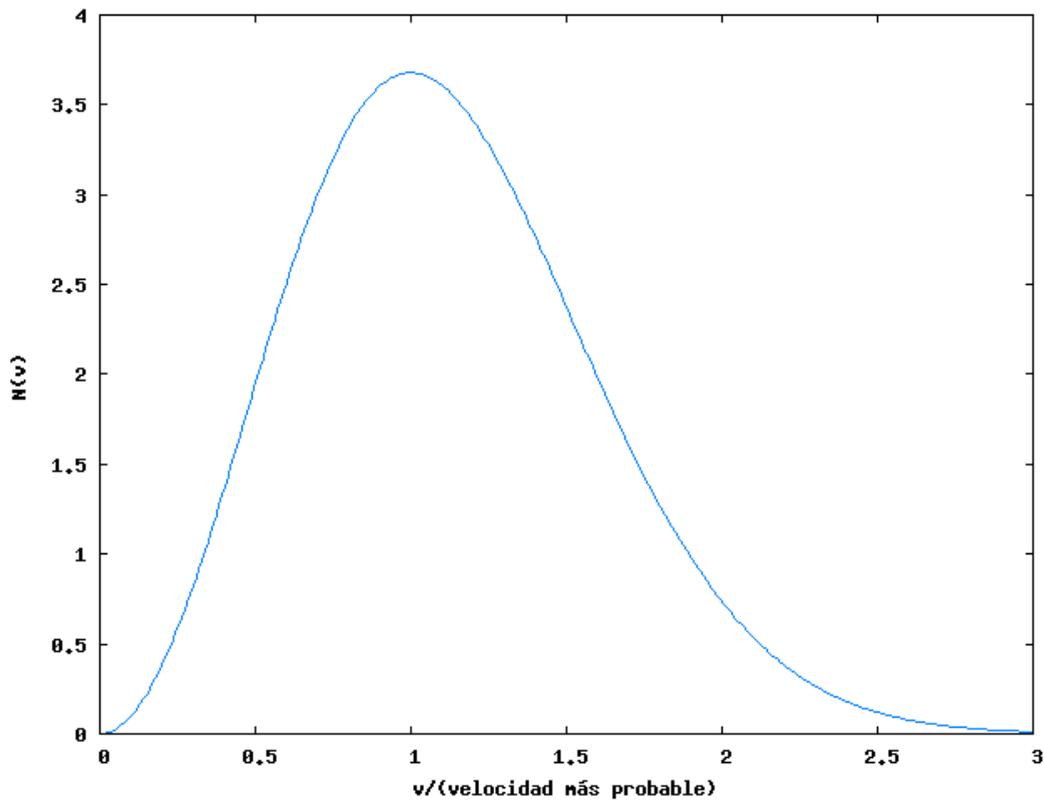
$$dN = N_0 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} d^3v$$

Escribiendo la última expresión en coordenadas esféricas para v y recordando que hay N moléculas de gas, lo que fija N_0 , se tiene la distribución de Maxwell:

$$N_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

Los promedios estadísticos son:

$$\langle A(v) \rangle = \frac{\int_0^{\infty} dv A(v) N_V(v)}{\int_0^{\infty} dv N_V(v)}$$



Ejercicio:

-Encontrar la velocidad más probable. R: $v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

-La rapidez promedio. R: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

-La velocidad cuadrática media. R: $v_{cm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

Las velocidades promedio de las moléculas que calculamos más arriba son grandes. Entonces por qué los olores en una pieza demoran un tiempo relativamente largo en detectarse? La razón es que las moléculas chocan entre sí. No se propagan en línea recta.

La distancia promedio recorrida por la molécula entre dos choques sucesivos se llama recorrido libre medio l . Para calcularlo imaginemos que las moléculas tienen diámetro d . Se puede ver que dos moléculas chocarán solamente si la distancia entre sus centros es menor a $2d$. En forma equivalente podemos pensar que el choque ocurre entre una molécula de radio $2d$ y otra puntual.

Consideremos el movimiento de la molécula más grande. Su rapidez promedio es $\langle v \rangle$. En un tiempo t recorre una distancia $\langle v \rangle t$. Durante este tiempo chocará con un número de moléculas:

$$N = n_V \langle v \rangle t d^2 \pi$$

Por lo tanto la distancia entre choques sucesivos es:

$$l = \frac{\langle v \rangle t}{N} = \frac{1}{\pi d^2 n_V}$$

-frecuencia de choque $f = \text{choques por unidad de tiempo} = \pi d^2 n_V \langle v \rangle$.

-tiempo libre medio $= \frac{1}{f}$.

Hemos supuesto que las moléculas que chocan con la grande son estacionarias. Si incluimos su movimiento se tiene:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_V}, \quad f = \sqrt{2}\pi d^2 n_V \langle v \rangle$$

Se define:

$$Q = nC_V \Delta T \text{ (volumen constante)} ; Q = nC_P \Delta T \text{ (presión constante)}$$

Consideremos un proceso a volumen constante. Por lo tanto $W = 0$. La Primera Ley da:

$$\Delta U = Q = nC_V \Delta T$$

Si C_V es constante tenemos que:

$$U = nC_V T$$

Esta relación se aplica a todos los gases ideales, sean monoatómicos o no.

Para cambios infinitesimales de temperatura se tiene:

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Para un gas monoatómico se encuentra:

$$C_V = \frac{3}{2} R$$

Esta predicción calza bien con los gases reales monoatómicos.

Consideremos un proceso a presión constante. Se tiene:

$$\Delta U = nC_V \Delta T = Q - P\Delta V = nC_P\Delta T - nR\Delta T$$

Esto es:

$$C_P - C_V = R$$

Esta conclusión se aplica a cualquier gas ideal.

Para un gas ideal monoatómico se tiene:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1.67$$

En un proceso adiabático no hay intercambio de calor. De la primera ley:

$$dU = nC_V dT = -W = -PdV$$

pero:

$$PdV + VdP = nRdT$$

Despejando dT y recordando que $C_P - C_V = R$, tenemos:

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

Por lo tanto:

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

Se puede mostrar que como consecuencia de la Física clásica, es válido el teorema de Equipartición de la energía:

En equilibrio cada grado de libertad contribuye $\frac{1}{2}kT$ a la energía promedio de una molécula.

Un grado de libertad es una coordenada o una velocidad que aparece al cuadrado en la energía de la molécula.

Tenemos $E = \sum_{i=1}^L \frac{1}{2}k_i z_i^2$ = energía de una molécula

Función de partición de N moléculas: $Z = \int \prod_i d^N z_i e^{-\beta(E_1 + \dots + E_N)} = \left(\int \prod_i dz_i e^{-\beta E_i} \right)^N = \mathcal{Z}^N$,

$$\mathcal{Z} = \int \prod_i dz_i e^{-\beta \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} k_i z_i^2} = \prod_{i=1}^L \int dz_i e^{-\beta \frac{1}{2} k_i z_i^2} = \prod_{i=1}^L \sqrt{\frac{2\pi}{\beta k_i}}$$

$$\langle E_i \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_i d^N z_i E_i e^{-\beta(E_1 + \dots + E_N)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_i dz_i e^{-\beta \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} k_i z_i^2} E_i = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z},$$

$$\langle E_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{2\pi}{k_i} \right) - \ln \beta \right) = \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} \beta^{-1} = \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} kT$$

Veamos ahora como se aplica el Teorema de Equipartición a gases ideales:

- i) Molécula monoatómica: 3 grados de libertad(traslación). $U = 3 \times \frac{1}{2}k_B T$. $C_V = \frac{3}{2}R$.
- ii) Molécula biatómica: 3 grados de libertad(traslación)+ 2 grados de libertad (rotación con un eje invariante), $U = 5 \times \frac{1}{2}k_B T$. $C_V = \frac{5}{2}R$
- iii) Molécula poliatómica: 3 grados de libertad(traslación)+ 3 grados de libertad (rotación arbitraria), $U = 6 \times \frac{1}{2}k_B T$. $C_V = 3R$
- iv) Molécula diatómica con energía vibracional(resorte): 3(t)+2(r)+2(v)=7. Esto implicaría $U = 7 \times \frac{1}{2}k_B T$. $C_V = \frac{7}{2}R$, lo que no concuerda con los experimentos.

Además C_V depende de la temperatura, lo que implica que los diferentes grados de libertad se van excitando a diferentes energías. Esto se puede entender sólo en el marco de la Mecánica Cuántica.

-*Cuantización de la energía*: Se requiere un quantum de energía adecuado para excitar los grados de libertad. Si la temperatura es muy baja sólo los grados de libertad traslacionales contribuyen al calor específico.

v) Para sólidos a altas temperaturas: Los átomos vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. Cada uno tiene una energía: $E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$. Esto es 6 grados de libertad. Esto da $C_V = 3R$ (Ley de Dulong-Petit). Esto falla a bajas temperaturas donde se requiere la Mecánica Cuántica.

He	2.98	1.50
CO	4.94	2.49
H ₂	4.87	2.45
HCl	5.11	2.57
N ₂	4.93	2.49
NO	5.00	2.51
O ₂	5.04	2.54
Cl ₂	5.93	2.98
CO ₂	6.75	3.40
CS ₂	9.77	4.92
H ₂ S	6.08	3.06
N ₂ O	6.81	3.42
SO ₂	7.49	3.76
$R = 1.987 \text{ cal/mol-deg}$		

From J. R. Partington and W. G. Shilling, *The Specific Heats of Gases* (London: Ernest Benn, Ltd., 1924).

Figura 1. C_V para algunos gases a 15°C y 1 atm.

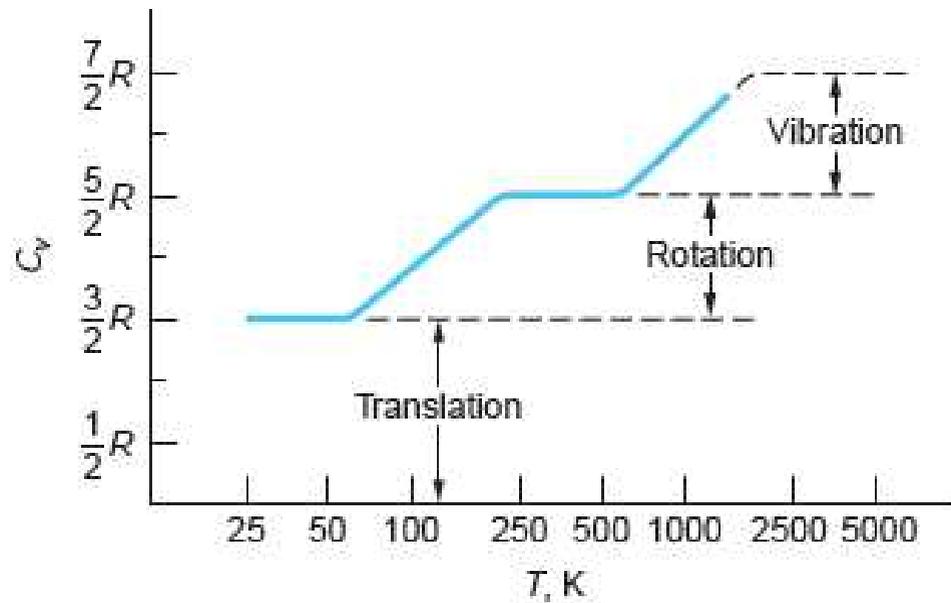


Figura 2. C_V como función de T para la molécula de Hidrógeno H_2 .

Esto contradice el Teorema de Equipartición de la energía.

Hay saltos cuánticos!

Use la distribución de Boltzmann y la fórmula del efecto Doppler, para encontrar el ancho de una línea espectral λ_0 debido al movimiento del átomo.

Cuando la fuente se aleja del observador con velocidad v : $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \sim \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right), \frac{|v|}{c} \ll 1$

Indicación: $\Delta\lambda = \lambda_0 \sqrt{\langle 1 + 2\frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \rangle} - 1 \sim \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

La distribución de Maxwell-Boltzmann funciona bien dentro del rango clásico, para partículas idénticas distinguibles. Sin embargo, algunos casos son mal interpretados utilizando esta estadística, especialmente cuando el número medio de ocupación es muy pequeño comparado con la unidad $\bar{n}_r \ll 1$.

Cuando nos encontramos en el caso donde las partículas son indistinguibles es necesario clasificarlas en dos categorías.

- Partículas con spin 0 o entero (bosones), no obedecen el principio de exclusión de Pauli y el intercambio de una partícula con la otra no afecta la función de onda del sistema. (*función simétrica*)
- Partículas con spin $\frac{1}{2}$ o semientero (*fermiones*) que obedecen el principio de exclusión de Pauli, solo una partícula puede existir en un estado cuántico en particular. La función de onda del sistema cambia con un intercambio de alguna de las partículas (

antisimétrica).

Esto se refleja directamente en la probabilidad de encontrar una partícula en un estado dado, como se ve en siguiente tabla a continuación.

Estadísticas Cuánticas

	Maxwell-Boltzmann	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
partículas idénticas	distinguibles	indistinguibles	indistinguibles
principio de Ex. de Pauli	no	no	si
spin	cualquiera	entero	semientero
funciones de onda	no deben traslaparse	simétricas	antisimétricas
función de distribución	$f_{MB}(\epsilon) = e^{-\alpha} e^{-\epsilon/kT}$	$f_{BE} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT} - 1}$	$f_{FD} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_g)/kT} + 1}$

- Las primeras dos distribuciones no limitan el número de partículas en un estado dado. Sin embargo la tercera distribución limita a una partícula por estado.
- A altas energías se aproxima la distribución Bose-Einstein a la de Maxwell-Boltzmann. Además, se encuentran más partículas por estado en la distribución de Bose-Einstein que en la de Maxwell-Boltzmann.
- En la distribución de Fermi-Dirac se encuentra un número menor de partículas a bajas

energías por estado. Se aproxima también a la distribución clásica a altas temperaturas.

- La longitud de onda de de Broglie debe ser menor que la separación entre las moléculas. Entonces las moléculas son distinguibles:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2m \frac{3}{2}kT}} = \frac{h}{\sqrt{m kT}} \ll d = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{N}{V}\right) \frac{h^3}{(m kT)^{\frac{3}{2}}} \ll 1$$

- Podemos usar Boltzmann para describir el He atmosférico que es 5.24×10^{-6} del aire, a $T = 273K$?

R: N_A moléculas de aire ocupan $2.24 \times 10^{-2} m^3$ en condiciones normales. El número de átomos de He por unidad de volumen es: $\frac{N}{V} = 5.24 \times 10^{-6} \frac{6.02 \times 10^{23}}{2.24 \times 10^{-2} m^3} = 1.41 \times 10^{20}$ moléculas/ m^3 , $\left(\frac{N}{V}\right) \frac{h^3}{(m_{He} kT)^{\frac{3}{2}}} = 6.3 \times 10^{-11} \ll 1$, $m_{He} = 4m_p$, $m_p = 1.66 \times 10^{-27} kg$.

- Podemos usar Boltzmann para describir el He líquido que es 5.24×10^{-6} del aire, a $T = 4.2K$?

R: La densidad del He líquido con $T = 4.2K$ es $0.124 gr/cm^3$. Se obtiene

$$\left(\frac{N}{V}\right) \frac{h^3}{(m_{He} kT)^{\frac{3}{2}}} = 4.39. \text{ No se puede usar Boltzmann.}$$

Para determinar el número de partículas con energía E , $n(E)$ en las tres estadísticas, necesitamos la densidad del estado E , $g(E)$.

$$n(E) = g(E) f(E)$$

$f(E)$ es la probabilidad de tener un estado con energía E .

Determinemos la densidad de estados para una partícula libre en una caja cúbica de lado L .

Resolviendo la ecuación de Schrodinger encontramos:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = E_0 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Recordemos que $g(E)dE$ es el número de estados con energía entre $E, E + dE$.

- Número de estados entre 0, E (Ver figura) = $N(E)$, $N(E) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3$, $R = \sqrt{\frac{E}{E_0}}$

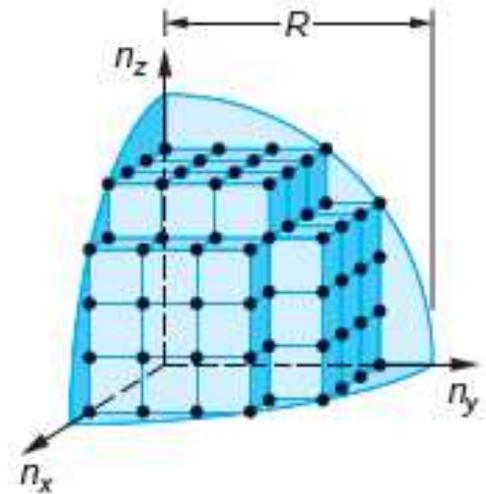


Figura 3.

$$\frac{\pi}{6} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{3}{2}}, g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}V}{h^3} E^{\frac{1}{2}}.$$

- Si la partícula tiene espín s , debemos

multiplicar por el número de estados de espín $2s + 1$.

- $\int_0^{\infty} g(E) e^{-\alpha} e^{-E/kT} = N$

- $e^{-\alpha} = \frac{N h^3}{(2s + 1)(2\pi m kT)^{\frac{3}{2}}}$

Bajo cierta temperatura crítica T_c todos los átomos con espín entero (bosones) se encuentran en el nivel fundamental. Esto recién se realizó experimentalmente en 1995.

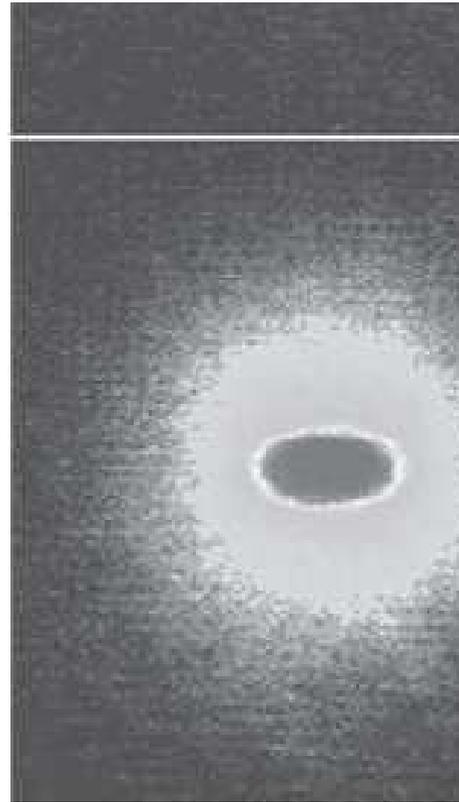


Figura 4.

Las imágenes sucesivas muestran la sombra de la nube de átomos de Sodio (Na) conteniendo un BEC a medida que se expande de su forma inicial tipo cigarro.

- Conviene separar el cálculo del número total de partículas en dos partes, una que de cuenta de aquellas cuyo valor de la energía es el propio del estado fundamental, y otro distinta de cero, estados excitados. De no hacerlo se llegaría a una contradicción, como se verá.

$$N = N_0 + N'$$

- El número de partículas cuya energía es distinta de cero viene dada por la siguiente expresión, donde $g(E)$ es la distribución de probabilidad que nos dice cuantas partículas tienen su energía comprendida entre E y $E + dE$.

$N' = \int_0^{\infty} g(E) \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} dE$, $g(E) = g_s \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$, siendo g_s el grado de degeneración, V el volumen del sistema, h la constante de Planck, m la masa de los bosones y E la energía.

- $N' = g_s \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{E^{1/2}}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} dE = g_s \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{\alpha} e^x - 1} dx$, $x = \frac{E}{kT}$
- $\frac{N'}{V} \leq g_s \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}} (2.315)$

- $\rho \leq g_s \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}} (2.315), T \geq T_c, T_c = \left(\frac{\rho}{2\pi g_s (2.315)} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2mk}$

- $E_0 = 0, N_0 = \frac{1}{e^\alpha - 1}$

- $T < T_c, e^\alpha = 1 + \frac{1}{N_0}$. Sea $\alpha \ll 1, N_0 = \alpha^{-1}, N = N_0 + N'$

$$N_0 = N - N' \sim N - N'_{\max}(T) = N \left(1 - \frac{N'_{\max}(T)}{N} \right) = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \right), N'_{\max}(T) \text{ se da para } \alpha = 0$$

- $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}$

Aquí se ve como cuando $T \rightarrow 0, N_0 \rightarrow N$. Es decir, los bosones se agrupan en el estado fundamental.

Este fenómeno se conoce como condensación de Bose-Einstein. La denominación puede inducir a error pues no se trata de una condensación como un gas normal. Cuando un gas ideal clásico cambia de estado gaseoso a líquido se dice que se condensa, en ese caso disminuye su volumen (o aumenta su densidad). En el condensado de Bose no hay disminución de volumen, las partículas se quedan quietas.

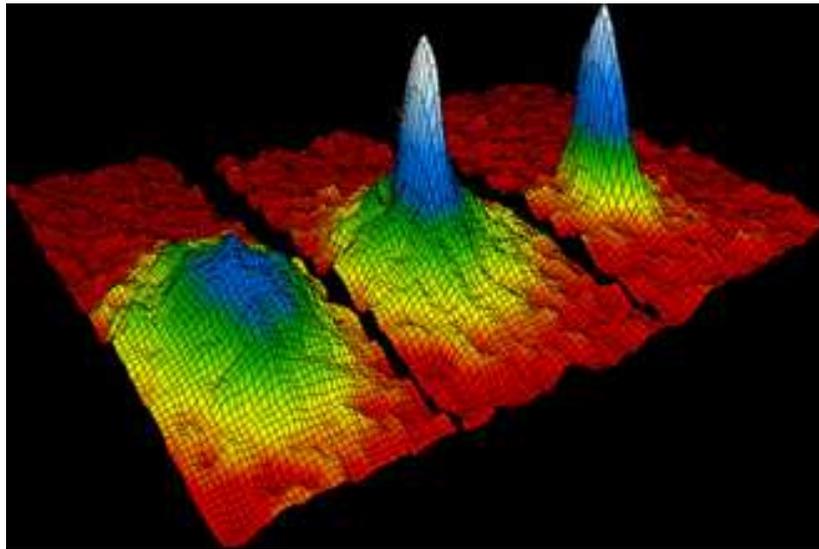


Figura 5.

Distribución de momentos que confirma la existencia de un nuevo estado de agregación de la materia, el condensado de Bose-Einstein. Datos obtenidos en un gas de átomos de rubidio, la coloración indica la cantidad de átomos a cada velocidad, con el rojo indicando la menor y el blanco indicando la mayor. Las áreas blancas y celestes indican las menores velocidades. A la izquierda se observa el diagrama inmediato anterior al condensado de Bose-Einstein y al centro el inmediato posterior. A la derecha se observa el diagrama luego de cierta evaporación, con la sustancia cercana a un condensado de Bose-Einstein puro. El pico no es infinitamente angosto debido a la relación de indeterminación de Heisenberg: dado que los átomos están confinados en una región del espacio, su distribución de velocidades posee necesariamente un cierto ancho mínimo. La distribución de la izquierda es para $T > T_c$ (sobre 400 nanokelvins (nK)), la central para $T < T_c$ (sobre 200 nK) y la de la derecha para $T \ll T_c$ (sobre 50 nK)

Encontrar la densidad de fotones del Universo.

Los fotones obedecen la estadística de B-E con $\alpha = 0$, debido a que el número de partículas no se conserva.

$$n(E) = g(E) \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$$

$g(E)$ se encontró en la discusión de la fórmula de Planck: $n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}$.

Esto es $g(E)dE = \frac{8\pi VE^2}{c^3 h^3} dE$

El número de fotones por unidad de volumen en el CMB es:

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty \frac{8\pi E^2}{c^3 h^3} \frac{1}{e^{E/kT} - 1} dE, \quad x = \frac{E}{kT}, \quad \frac{N}{V} = \frac{8\pi (kT)^3}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \sim 2.4,$$

$$T_{\text{CMB}} = 2.7K, \quad \frac{N}{V} = 3.97 \times 10^8 \text{ fotones}/m^3.$$