

Recordemos que para una partícula de masa en reposo nula, se tiene:

$$E = cp, E = h\nu$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, se deduce

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

donde p es el momentum del fotón y λ su longitud de onda. Esta relación muestra que la luz (una onda) tiene una propiedad de partícula (momentum).

de Broglie (1924) se preguntó si la dualidad sería cierta para la materia. Para fundamentar esta hipótesis, escribió la última ecuación en la forma

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Esta expresión se llama la *longitud de onda de de Broglie* de la partícula. Asevera que todas las partículas tienen propiedades ondulatorias. Esta relación se ha verificado experimentalmente en múltiples ocasiones y constituye la base de la Mecánica Ondulatoria.

Este descubrimiento fundamental dio origen al *Microscopio Electrónico*.

- De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$
- En una órbita circular del átomo de H: $l = n \hbar$
- $l = pr$, $\frac{h}{\lambda}r = n \frac{h}{2\pi}$, $L = 2\pi r = n \lambda =$ Condición de onda estacionaria.
- Las reglas de cuantización son una consecuencia de la naturaleza ondulatoria de las partículas.

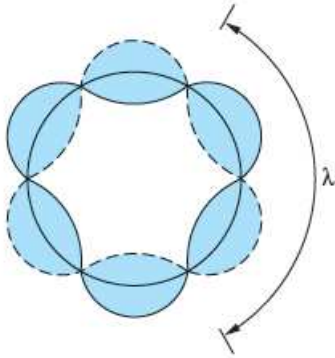


Figura 1.

Ondas estacionarias alrededor de la circunferencia de radio r



Figura 2.

Louis Victor De Broglie

1. Longitud de onda de De Broglie de una pelota de ping-pong: $m = 2g$, $v = 5m/s$.

$$R: \lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} J_s}{2 \times 10^{-3} kg \times 5m/s} = 6.6 \times 10^{-32} m \text{ 17 órdenes de magnitud que el tamaño del núcleo.}$$

2. Longitud de onda de De Broglie de un electrón con $K = 10eV$.

$$K = \frac{p^2}{2m_e}, p = \sqrt{2m_e K}, \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} J_s}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-18} kg J}} = 0.39nm \text{ Similar al}$$

tamaño de un átomo y a la distancia entre átomos de una red cristalina.

El experimento de Davisson-Germer demostró la naturaleza ondulatoria de los electrones, confirmando la hipótesis anterior de Broglie. Poner la dualidad onda-partícula sobre una base firme experimental, representó un gran paso adelante en el desarrollo de la mecánica cuántica. La ley de Bragg para la difracción, se había aplicado a la difracción de rayos X, pero esta fue la primera aplicación de ondas a las partículas.

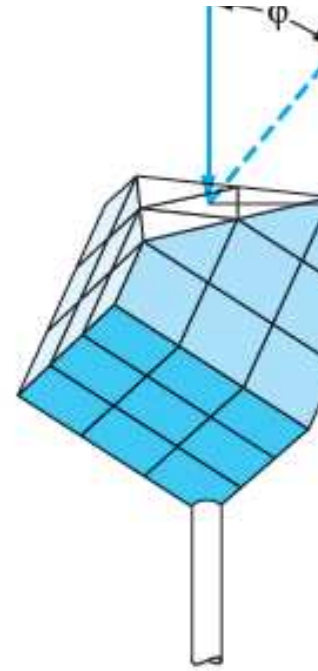


Figura 3.

Electrones de baja energía son dispersados en un ángulo φ por un cristal de Nickel. La energía cinética del electrón puede ser cambiada variando el potencial en la pistola de electrones.

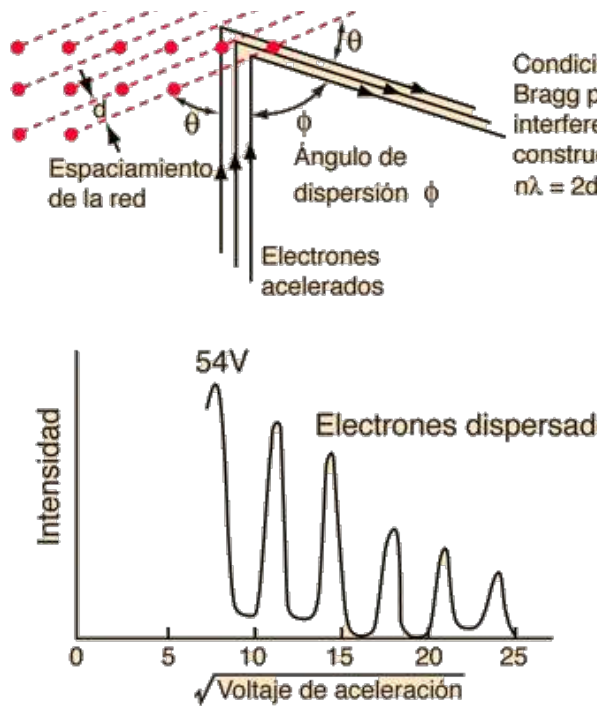


Figura 4.

Davisson, C. J., "Are Electrons Waves?,"

Franklin Institute Journal 205, 597 (1928)

Davisson y Germer diseñaron y construyeron un aparato de vacío, con el fin de medir las energías de los electrones dispersados desde

una superficie de metal. Los electrones procedentes de un filamento caliente, fueron acelerados por una tensión, y dirigidos para golpear una superficie de metal de níquel.

El haz de electrones era dirigido al blanco de níquel, que podía girar para observar la dependencia angular de los electrones dispersados. Su detector de electrones (llamado caja de Faraday), fue montado sobre un arco, de modo que pudiera ser girado para observar los electrones en diferentes ángulos. Fue una gran sorpresa para ellos, encontrar que en ciertos ángulos había un pico en la intensidad del haz de los electrones dispersados. Este pico indicaba un comportamiento de onda en los electrones, y daba valores que podían ser interpretado por la ley de Bragg, sobre el espaciado reticular del cristal de níquel.

Los datos experimentales de arriba, extraídos del artículo de Davisson citado

arriba, muestra picos repetidos de intensidad de electrones dispersados, con crecientes voltajes de aceleración. Estos datos fueron obtenidos con un ángulo de dispersión fijo. Utilizando la ley de Bragg, la expresión de la

longitud de onda de De Broglie, y la energía cinética de los electrones acelerados dan la relación $\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{2d \sin \theta} = \frac{p}{h} = \frac{\sqrt{2m_e e V}}{h}$

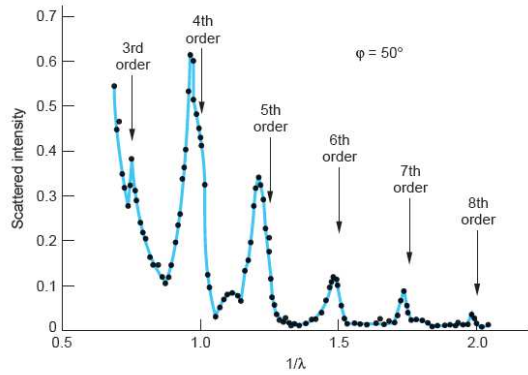


Figura 5.

Variación de la intensidad del electrón dispersado con la longitud de onda para ángulo de dispersión fijo.

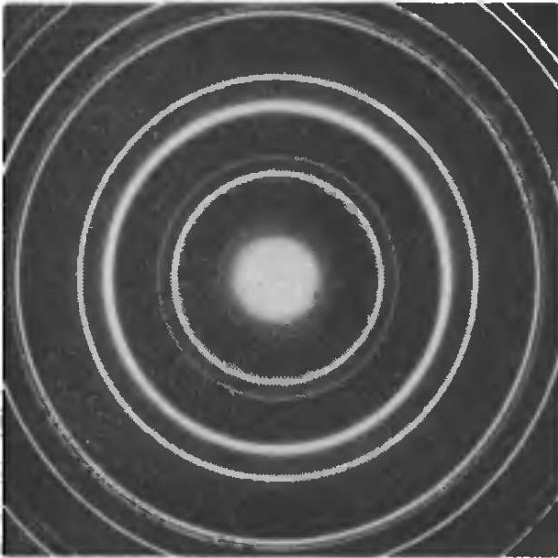


Figura 6. Dispersión de electrones por átomos de oro.

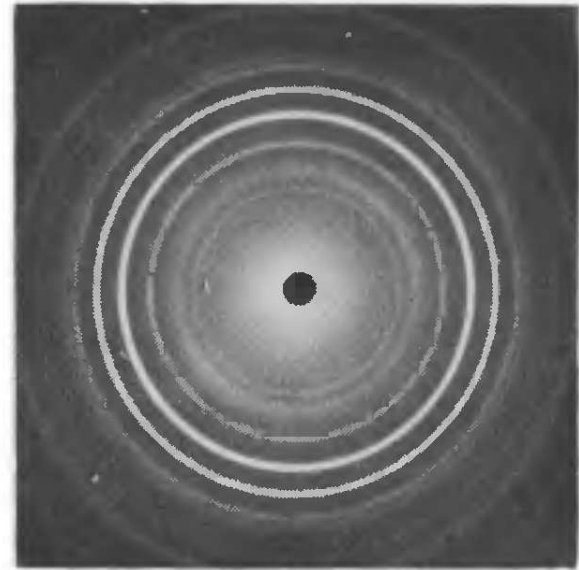


Figura 7. Dispersión de rayos X por cristales de óxido de Zirconio

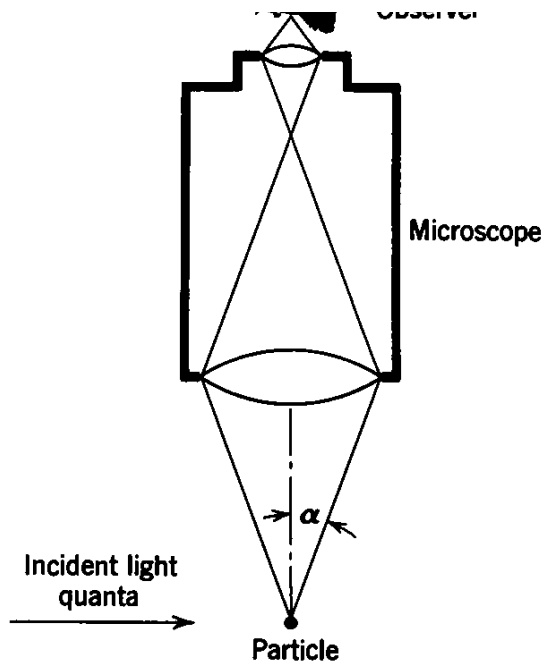
Según el principio de incertidumbre(Heisenberg 1927), ciertos pares de variables físicas, como la posición y el momento (masa por velocidad) de una partícula, no pueden calcularse simultáneamente con la precisión que se quiera. Así, si repetimos el cálculo de la posición y el momento de una partícula cuántica determinada (por ejemplo, un electrón), nos encontramos con que dichos cálculos fluctúan en torno a valores medios. Estas fluctuaciones reflejan, pues, nuestra incertidumbre en la determinación de la posición y el momento. Según el principio de incertidumbre, el producto de esas incertidumbres en los cálculos no puede reducirse a cero. Si el electrón obedeciese las leyes de la mecánica newtoniana, las incertidumbres podrían reducirse a cero y la posición y el momento del electrón podrían determinarse con toda precisión. Pero la mecánica cuántica, a diferencia de la newtoniana, sólo nos permite conocer una distribución de la probabilidad de esos cálculos, es decir, es intrínsecamente estadística.

En forma cuantitativa:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

lo mismo vale para las otras componentes de la posición y el momentum.

- En el microscopio de Heisenberg, un fotón incide sobre el electrón y luego llega al microscopio. Pero para detectar la posición del electrón con mucha precisión hace falta un fotón de onda muy corta, es decir, con mucha energía. Un fotón de radiación gamma: **y cuando ese fotón muy energético choca con el electrón, lo manda disparado en una dirección determinada**, independientemente de la velocidad que tuviera antes. Al saber muy bien dónde estaba el electrón no tenemos ni idea de cuan rápido va.
- No es simplemente que el electrón se ve alterado por el fotón. La naturaleza cuántica de la materia y la energía es la razón de que aparezca la incertidumbre de Heisenberg. La cuestión es que la luz no es infinitamente divisible: está formada por cuantos de energía, los fotones. Y el “tamaño energético” de cada uno de esos pedazos discretos **es mayor cuanto más corta es la longitud de onda**. *No es posible utilizar radiación gamma y emitir una cantidad tan pequeña como queramos – la energía mínima emitida es un fotón muy energético*. Si la física clásica fuera cierta, podríamos coger radiación de longitud de onda arbitrariamente corta (muy precisa) y sin embargo emitir una cantidad arbitrariamente pequeña de esa radiación (que apenas afectase al electrón).
- *Si quisiéramos alterar muy poco la velocidad del electrón haría falta un fotón con muy poca energía, es decir, de longitud de onda muy larga, y entonces no tendríamos ni idea de dónde está el electrón*. No se puede ganar: conocer el estado completo del electrón (su posición y velocidad) con precisión arbitraria es imposible.



$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \alpha}, \quad \Delta p_x \approx 2 \frac{h}{\lambda} \sin \alpha \text{ (Compton),}$$

Combinando Δx y Δp_x , tenemos

$$\Delta x \Delta p_x \approx \left(\frac{\lambda}{\sin \alpha} \right) \left(2 \frac{h}{\lambda} \sin \alpha \right) = 2h,$$

Figura 8.

Mediante el principio de incertidumbre es posible estimar la energía del punto cero de algunos sistemas. Para ello supondremos que en tales sistemas el punto cero cumple que la partícula estaría clásicamente en reposo (a nivel cuántico significa que el valor esperado del momento es nulo). Este método del cálculo de energías tan solo da una idea del orden de magnitud del estado fundamental, nunca siendo un método de cálculo del valor exacto (en algún sistema puede resultar que el valor obtenido sea el exacto pero ello no deja de ser más que una simple casualidad). La interpretación física del método es que debido al principio de incertidumbre, la localización de la partícula tiene un coste energético (el término de la energía cinética), de modo que cuanto más cerca del centro de fuerzas esté la partícula más energía tendrá el sistema debido a las fluctuaciones cuánticas, de modo que en el nivel fundamental el sistema minimizará su energía total.

- Partícula en una caja de largo L
- $\Delta x \leq L$
- $(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle$
- $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle \geq \left(\frac{\hbar}{2L}\right)^2$
- $\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \left(\frac{\hbar}{2L}\right)^2 \frac{1}{2m}$

Este cálculo da una idea de las energías que hay que aportar para confinar una cierta partícula en una región, tal como puede ser un nucleón en el núcleo.

A continuación se estimará la energía fundamental de un átomo monoeléctrico. Por el principio de indeterminación se tiene que:

$\Delta r \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ Empleando como estimación que para el nivel fundamental se cumple:

$\Delta r \cdot \Delta p \approx \hbar \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta r}$ La energía total es la suma de cinética más potencial. Dado que el valor medio del momento radial es nulo, su valor cuadrático esperado será igual a su desviación y se aproximará el valor esperado del inverso del radio al inverso de su desviación.

$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m_e} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right\rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m_e(\Delta r)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\Delta r}$ En el nivel fundamental la energía ha de ser mínima de modo que:

$\frac{dE}{d\Delta r} = 0 \Rightarrow \Delta r = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2} = a_0$ El valor obtenido es casualmente idéntico al radio de Bohr y sustituyendo en la estimación obtenida para la energía se obtiene:

$E = -\frac{(Ze^2)^2 m_e}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = E_0$ Casualmente este es exactamente la energía del estado fundamental de un átomo hidrogenoide. El objetivo del método es la estimación del valor, si bien en este ejemplo particular obtenido es idéntico al calculado formalmente.

Empleando como estimación:

$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \quad \Rightarrow \quad \Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x}$ Tomando que el valor medio de la posición y momento son nulos debido a la simetría del problema se tiene que la energía total es:

$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$ Minimizando la energía:

$\frac{dE}{d\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ Sustituyendo el valor en la energía se obtiene:

$E = \hbar\omega = 2E_0$ Como se puede observar el valor obtenido es el doble del punto cero del oscilador armónico, de modo que aunque el valor obtenido no sea exacto el orden de magnitud sí es el correcto.