Equilibrio térmico

- Cuando luz incide sobre un cuerpo, parte de ésta es reflejada y otra parte es absorbida por el cuerpo.
- La luz absorbida aumenta la energía interna del cuerpo, aumentando su temperatura.
- El cuerpo contiene cargas eléctricas que son aceleradas al aumentar la temperatura. Esto produce emisión de luz, lo que implica una pérdida de energía interna del cuerpo, bajando su temperatura.
- El equilibrio térmico se logra a una temperatura T tal que la energía emitida por unidad de tiempo es igual a la energía absorbida por unidad de tiempo.
- La radiación emitida se llama radiación térmica.

Un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide en él se llama Cuerpo Negro Ideal(CNI).

Ley de Stefan(1879)-Boltzmann:La potencia por unidad de área R emitida por un CNI es:

$$R = \sigma T^4$$

T: temperatura absoluta. $\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ es la constante de Stefan

Un objeto que no es un CNI, emite menos energía por unidad de área que un cuerpo negro.

En ese caso: $R = \varepsilon \sigma T^4$, $\varepsilon \leqslant 1$ es el coeficiente de emisividad del objeto.

→ Tamaño de una estrella: La longitud de onda de emisión máxima de la estrella(color) dice que la temperatura en la superficie es $T = 3000K$. La estrella radía con una potencia $100\,P_\odot$ $P_\odot$ es la potencia del Sol con temperatura en la superficie de $5800K$.Encontrar el tamaño de la estrella.

Sol:$R_e = \frac{P_e}{4\pi r_e^2} = \sigma T_e^4$, $R_S = \frac{P_\odot}{4\pi r_S^2} = \sigma T_S^4$,$\frac{P_e}{P_\odot} = \left(\frac{r_e}{r_S}\right)^2 \left(\frac{T_e}{T_S}\right)^4$,$100 = \left(\frac{r_e}{r_S}\right)^2 \left(\frac{30}{58}\right)^4$,

$\left(\frac{r_e}{r_S}\right) = 10\left(\frac{58}{30}\right)^2$,$r_e = 37.4 r_S$, $r_S = 6.96 \times 10^8 m$

$R(\lambda)d\lambda$: potencia por unidad de área emitida entre λ y $\lambda + d\lambda$, λ=longitud de onda.

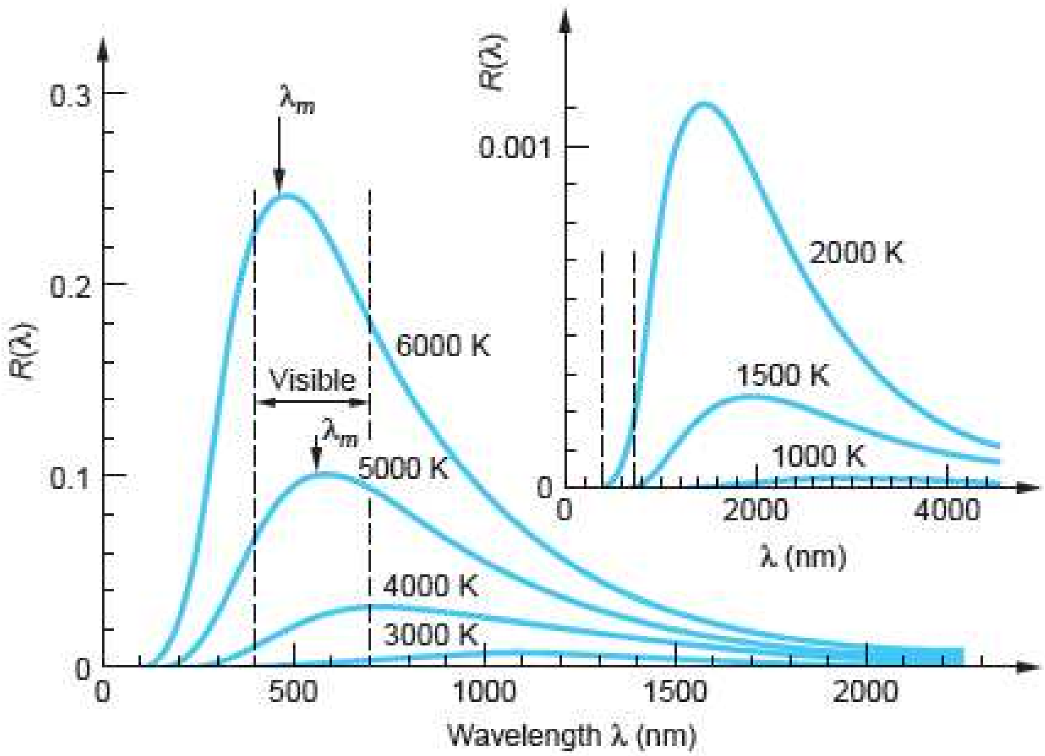

Figura 1. Distribución espectral del CNI a distintas temperaturas(1900).

Ley de Desplazamiento de Wien(1893):La distribución espectral tiene un máximo para $\lambda = \lambda_m$ con

$$\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} m\, K$$

$$u(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$

$$u' = f'(\lambda T)\frac{T}{\lambda^5} - 5\frac{f(\lambda T)}{\lambda^6} = 0 \qquad x = \lambda T$$
$$x f'(x) - 5 f(x) = 0$$

Si se conoce f se puede encontrar el valor de x. Con lo cual el máximo es $\lambda_m T = x$.

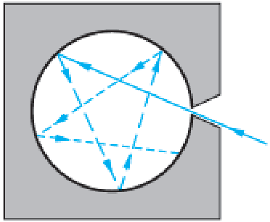

Figura 2. Un pequeño agujero en la pared de una cavidad es la mejor aproximación a un CNI. La luz que entra por el agujero tiene pocas posibilidades de salir por él antes de ser absorbida por las paredes de la cavidad.

$$R = \frac{c}{4} U$$

U: densidad de energía electromagnética al interior de la cavidad.

c: velocidad de la luz.

$$\boxed{R(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda)}$$

- Número de modos de oscilación por unidad de volumen $n(\lambda)$

$$n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}$$

- Teorema de equipartición de la energía: La energía promedio por grado de libertad es $\frac{1}{2}kT$.Para un oscilador se tienen 2 grados de libertad. $\varepsilon = kT$.k es la constante de Boltzmann.

- La ecuación de Raylegh-Jeans:$u(\lambda) = 8\pi kT\lambda^{-4}$ Dos polarizaciones independientes.

- Catástrofe Ultravioleta:$\int_0^\infty u(\lambda)d\lambda = \infty$.

Consideremos un cubo de radio a de paredes metálicas, conteniendo radiación electromagnética.

La luz es una onda transversal. Los campos eléctricos y magnéticos oscilan perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{x} - \omega t)} \quad \omega = c\left|\vec{k}\right| \quad \vec{k}.\vec{E}_0 = 0$$

Consideremos una onda que se propaga paralela al eje x del cubo. En $x = 0, a$ el campo eléctrico es paralelo a la superficie conductora. Pero en un conductor hay cargas eléctricas que se mueven hasta eliminar el campo eléctrico, en un estado estacionario. Esto es la onda tiene un nodo en $x = 0, a$. Lo mismo sucede con una onda propagándose a lo largo de las direcciones y, z del cubo.

Encontremos los modos de oscilación permitidos. Al reflejarse la onda en las paredes del cubo se forma una onda estacionaria que es la superposición de la onda incidente y la onda reflejada.

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(kx - \omega t) + \mathrm{sen}(kx + \omega t) = \mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\ \mathrm{sen}(\omega t) + (t \rightarrow -t) = \\ 2\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Nodo en $x = 0, a$, $ka = n\pi$, $n = 0, 1, 2....$

En general la onda se mueve en una dirección $\hat{n}$,$\mathrm{Im}\left(e^{i(k\hat{n}.\vec{x}-\omega t)}\right), \hat{n}.\hat{n}=1$. Se propaga en la dirección x, y, z con longitud de onda $\frac{2\pi}{\lambda_x}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}_x$...

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\lambda_x}a = n_x, \frac{2a}{\lambda}\hat{n}_x = n_x \qquad & \frac{2a}{\lambda}\hat{n}_y = n_y \qquad \frac{2a}{\lambda}\hat{n}_z = n_z \\
\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2) = n_x^2+n_y^2+n_z^2 \quad & \nu = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \\
r = \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \qquad & = \frac{2a}{c}\nu \\
N(\nu)d\nu = \frac{4\pi r^2}{8}dr \qquad & = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2a}{c}\nu\right)^2\frac{2a}{c}d\nu \qquad = \frac{4}{c^3}\pi a^3\,\nu^2\,d\nu \\
2\,\text{polarizaciones} & \\
N(\nu)d\nu = \frac{8}{c^3}\pi a^3\,\nu^2\,d\nu &
\end{aligned}
$$

Escribamos N en función de la longitud de onda.

$$
\begin{aligned}
a^3 n(\lambda)d\lambda = \frac{8}{c}\pi a^3\,\lambda^{-2}\,d\lambda\,\lambda^{-2}c \quad & = 8\pi\frac{a^3}{\lambda^4}d\lambda \\
n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda &
\end{aligned}
$$

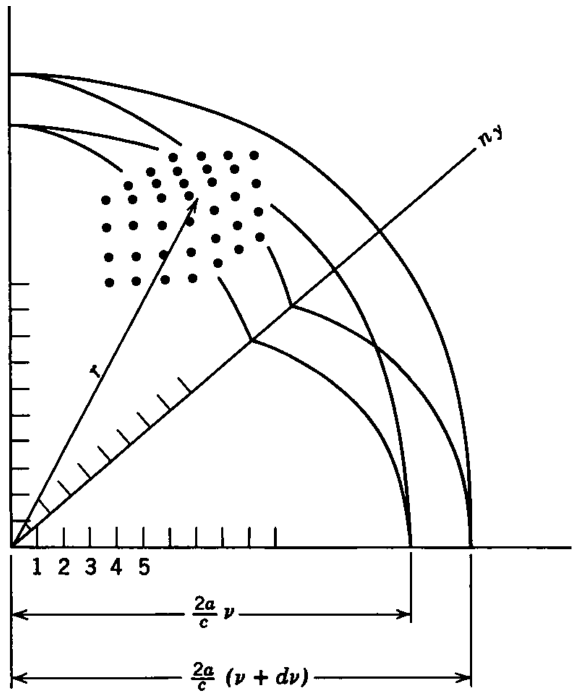

Figura 3. Sistema de coordenadas rectangulares usado para contar las frecuencias permitidas en una cavidad cúbica.

Planck

- Promedio de la energía. E continuo.

$$<E>=\frac{1}{Z}\int_0^\infty dE E e^{-\beta E}, Z=\int_0^\infty dE e^{-\beta E}=\frac{1}{\beta}$$

$$<E>=-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}=kT$$

- Planck: Los niveles de energía de un oscilador están cuantizados:$E_n = n h\nu, n=0,1\ldots.$

  h: constante de Planck, ν: frecuencia de oscilación.

$$<E>=\frac{1}{Z}\sum_n E_n e^{-\beta E_n}, Z=\sum_n e^{-\beta h\nu n}=\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$$

$$<E>=-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}=\frac{e^{-\beta h\nu}h\nu}{1-e^{-\beta h\nu}}$$

$$u(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}\frac{e^{-\beta h\nu}h\nu}{1-e^{-\beta h\nu}} = 8\pi\lambda^{-5}\frac{hc}{e^{\beta hc/\lambda}-1}$$

La curva experimental da $h = 6.626 \times 10^{-34} Js$

1. Máximo del espectro solar:Encontrar la longitud de onda de máxima emisión.

   Sol:$\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} m K$, $\lambda_m = 499.7\text{nm}$, $1\text{nm} = 10^{-9} m$

2. Energía media de un oscilador:Encontrar la energía media de un oscilador con $h\nu = kT$.

   Sol:$<E> = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = \frac{kT}{e-1} = 0.582 kT$

3. Use la distribución de Planck para encontrar la constante en la ley de Wien.

   Sol: De la fórmula de Planck se obtiene:$f(x) = 8\pi \frac{hc}{e^{hc/(kx)} - 1}$,$x f'(x) - 5 f(x) = 0$

$$f'(x) = -8\pi c h \left(e^{hc/(kx)} - 1\right)^{-2} e^{hc/(kx)} \left(-\frac{hc}{k} x^{-2}\right)$$

$$x\left(e^{hc/(kx)} - 1\right)^{-2} e^{hc/(kx)} \left(\frac{hc}{k} x^{-2}\right) - 5\left(e^{hc/(kx)} - 1\right)^{-1} = 0$$

$$\frac{hc}{k} e^{hc/(kx)} = 5x\left(e^{hc/(kx)} - 1\right) \qquad u = \frac{hc}{kx} \qquad u = 5 - 5e^{-u}$$

$$u = 4.99322, x = \frac{hc}{4.99322k} = 2.8 \times 10^{-3} m K$$

Use la distribución de Planck para deducir la fórmula de Stefan-Boltzmann.

$u(\lambda) = 8\pi\lambda^{-5}\frac{hc}{e^{\beta hc/\lambda}-1}, \int_0^\infty d\lambda u(\lambda) = U, x = \beta hc/\lambda,\ d\lambda = -\beta hc x^{-2} dx$

$$U = 8\pi\beta(hc)^2(\beta hc)^{-5}\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1} = 8\pi\beta^{-4}(hc)^{-3}\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1} \quad \int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$R = \frac{c}{4}U = \frac{2}{15}\pi^5 c\frac{k^4}{(hc)^3}T^4 = \sigma T^4,\ \sigma = \frac{2}{15}\pi^5\frac{k^4}{h^3c^2}$

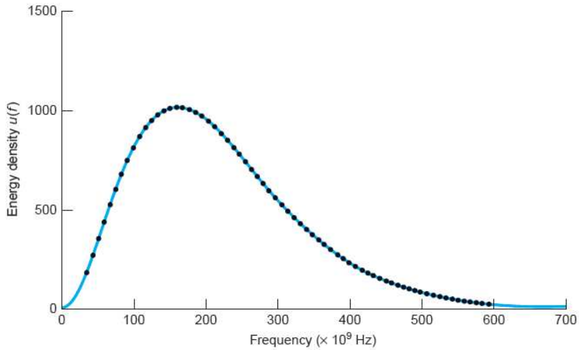

Figura 4. Fondo de Radiación Cósmica

medido por COBE T=2.725K

Esta radiación llena todo el Universo. Se originó cuando la luz se separó de la materia 380000 años después del Big Bang.