Física de mediados del siglo XIX

1. Leyes de Newton aplicados a partículas
2. Ley de gravitación universal
3. Leyes de Newton aplicadas a fluidos
4. Calor y Termodinámica
5. Electricidad y Magnetismo

DESCRIPCION MECANICA DE LA NATURALEZA DOMINA TODA LA CIENCIA Y LA FILOSOFIA

- E. Kant «Crítica de la Razón Pura». Categorías: son los presupuestos para la aprehensión objetiva de la realidad. Las categorías básicas son
  - Tiempo asociado a la noción de causalidad. Es absoluto y eterno.
  - Espacio. Es absoluto.

  Las categorías son dadas a priori, anterior a toda experiencia. Sin ellas la experiencia objetiva no es posible.
- Biología. Descripción de un ser vivo como una máquina(Descartes). «La lógica de lo viviente» F. Jacob.
- Economía. Adam Smith «La riqueza de las naciones». Analogía mecánica del mercado.

- Las leyes de Maxwell
- La Mecánica Estadística. Paradoja de Gibbs.
- Espectros
- Radiación del Cuerpo Negro
- Lectura Complementaria:

  Subtle is the lord... The Science and Life of Albert Einstein, Abraham Pais

  Niels Bohr's time, Abraham Pais

  Physics The Strangest Man. The Hidden life of Poul Dirac, Graham Farmelo

  Physics and Beyond (La Parte y el Todo), Werner Heisenberg

Ludwig Boltzmann: 

- Ensembre microcanónico. Energía total del sistema es constante. Todos los estados microscópicos son igualmente probables. La entropía del sistema es:$S = k_B \ln W$. W es el número de estados accesibles. k_B es la constante de Boltzmann.
- Ensemble canónico. El sistema está en equilibrio térmico con un reservorio de calor a temperatura T. La probabilidad que un estado del sistema tenga energía E es:

  $P(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E}$, $Z = \sum_E e^{-\beta E} = e^{-\beta F}$ es la función de partición, $\beta = \frac{1}{k_B T}$,F:Energía libre.
- Ensemble GranCanónico. El sistema está en equilibrio térmico con un reservorio de calor a temperatura T con el cual puede intercambiar partículas. La probabilidad que un estado tenga energía E y N partículas es:

$P(E,N) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E + \mu N}$, $\mathcal{Z} = \sum_{E,N} e^{-\beta E + \mu N} = e^{-G}$ es la función de Granpartición, $\beta = \frac{1}{k_B T}$,G:Energía libre de Gibbs. μ:potencial químico.

$E = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m},$

$$Z = \prod_i \int d^3x \, d^3p \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} =$$

$$\left(V \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \right)^N$$

$$F = -\frac{N}{\beta} \left(\ln V + \frac{3}{2} \ln T + \mathrm{cte} \right)$$

$$F = U - TS \quad dF = TdS - PdV - TdS - SdT = -SdT - PdV$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{N}{\beta V}, \qquad PV = Nk_BT$$

La última ecuación es la ecuación de estado del gas ideal.

Energía: $U = <E> = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = N \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T$

Entropía:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = Nk_B\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}\right) + \frac{3}{2}Nk_B = Nk_B\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}'\right) \quad (1)$$

La entropía debe ser una función extensiva de las variables extensivas V, N. Tenemos

$$S(\lambda V, \lambda N, T) = \lambda S(V, N, T)$$

$S = Ns(v, T)$, $v = \frac{V}{N}$

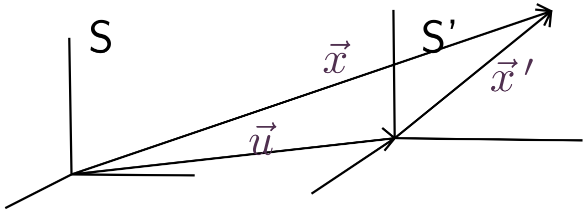
- (1) no es una función extensiva de V, N.
- $Z \to \frac{Z}{N!}, F = -\frac{N}{\beta}\left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}\right) + \frac{1}{\beta}\ln N!$
- Fórmula de Stirling: $\ln N! \sim N\ln N - N$
- $F = -\frac{N}{\beta}\left(\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}''\right)$, $S = Nk_B\left(\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln T + \text{cte}''\right)$
- $N!$ sólo se entiende en Mecánica Cuántica. Identidad de Partículas.

- Un sistema de referencia S es inercial si en él es válida la Primera Ley de Newton(Ley de inercia):
- En ausencia de fuerzas externas, una partícula se mueve en una trayectoria rectilínea con velocidad constante:$\vec{x} = \vec{v}\,t + \vec{x}_0$
- Si S es un sistema de referencia inercial, un sistema S' que se mueve con velocidad constante $\vec{u}$ con respecto a S, también es inercial.

La mecánica clásica es invariante bajo las transformaciones de Galileo, que conectan las coordenadas y el tiempo de una partícula, medidas en dos sistemas inerciales(S,S') con velocidad relativa $\vec{u}$

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= \vec{x} - \vec{u}\,t \\ t' &= t \end{aligned}$$

El origen del sistema S' se mueve con velocidad $\vec{u}$ respecto al sistema S.



Suma de velocidades:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\,\vec{x}\,'}{dt'} = \frac{d\,\vec{x}}{dt} - \vec{u} = \vec{v} - \vec{u}$$

Aceleración:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\,\vec{v}\,'}{dt'} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

En mecánica clásica, la fuerza es función de la diferencia de las coordenadas de las partículas:

$$\begin{aligned} \vec{F}\,'(\vec{x}_i' - \vec{x}_j') = \vec{F}\,(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \\ \vec{F}\,' = m\,\vec{a}\,' \ \ = \\ \vec{F} = m\,\vec{a} \end{aligned}$$

Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell son:

1. Ley de Gauss:

$$\oint_S d\,\vec{S}.\vec{E} = \frac{q_V}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. Ley de Gauss del Magnetismo:

$$\oint_S d\,\vec{S}.\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

3. Ley de Ampere y corriente de desplazamiento:

$$\oint_C \vec{B}.d\,\vec{x} = \mu_0\left(I_S + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

4. Ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E}.d\,\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Una primera consecuencia fundamental de la corriente de desplazamiento es que los campos eléctricos y magnéticos son capaces de propagarse en forma de onda, cuya velocidad en el vacío fue calculada por Maxwell, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. Cuando Maxwell reemplazó los valores de la permitividad y la permeabilidad del vacío, conocidos usando experimentos con bobinas y condensadores, obtuvo que $c \sim 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$. La velocidad de la luz en el vacío!

Basado en esto, Maxwell propuso que la luz es una onda electromagnética.

Figura 1. James Clerk Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0},\qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})+\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{B})}{\partial t}=\vec{0},\qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{E})}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Usando la identidad (Demuéstrela!):

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de onda, dado que $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ en los dos casos:

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$
$$-\vec{\nabla}^2\vec{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Las dos ondas tiene la misma velocidad de propagación:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Velocidad de la luz

-Galileo. Encontró que de ser c finita es muy grande.

-Roemer se dio cuenta del retardo en los eclipses de Io si es que Júpiter se encuentra más lejos de la Tierra. Obtuvo $c = 2.3 \times 10^8$ m/s

-Fizeau usó una rueda dentada que giraba y un espejo. Su valor para c es: $c = 3.1 \times 10^8$ m/s

1 Movimiento Ondulatorio

Cuando se arroja una piedra al agua se produce una onda. En ella las partes del medio se desplazan sólo distancias cortas. Sin embargo a través de ellas la onda puede transportar energía a través de grandes distancias (Ej:Tsunamis).

Ondas Mecánicas:Necesitan un medio para transportarse.

Ondas Electromagnéticas: Cuál es el medio? El éter.

Problema del éter

- El éter debe llenar todo el espacio, porque la luz nos llega de estrellas muy lejanas
- Sin embargo, el éter no debe actuar sobre los planetas. De otra manera, estos perderían energía y caerían en el Sol
- Hay viento de éter?
- Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo.
- La velocidad de la luz medida en dos sistemas inerciales con velocidad relativa $\vec{u}$

  es: $c' = c - u$

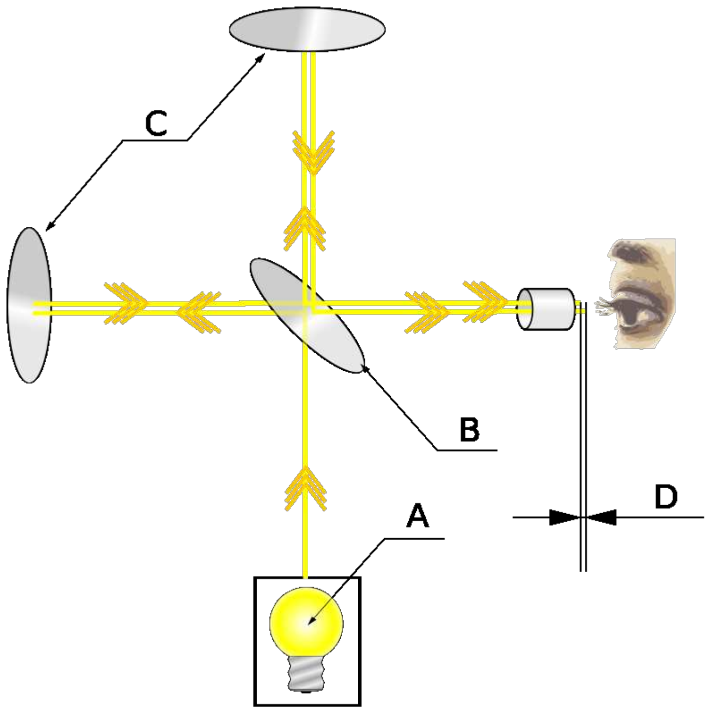
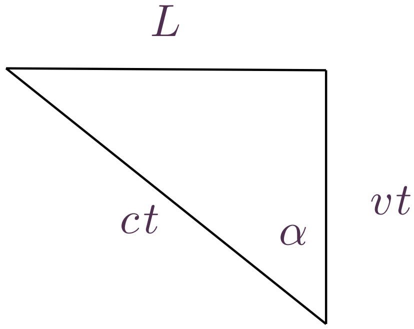


Figura 2. Interferómetro de Michelson:
A - Fuente de luz monocromática
B - Espejo semirreflectante
C - Espejos
D - Diferencia de camino.

La distancia entre los espejos y el semiespejo tiene una longitud "L", es decir, el "Recorrido 1" es igual al "Recorrido 2".

- t_1 es el tiempo que demora el rayo de luz en la trayectoria 1, perpendicular a la velocidad



de la Tierra en el sistema en reposo respecto al éter.

$$\cos\alpha = \frac{v}{c}, \frac{L}{ct} = \operatorname{sen}\alpha,\ t_1 = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sim \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

- t_2 es el tiempo que demora el rayo de luz en la trayectoria 2, medido en el sistema atado a la Tierra.

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \sim \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

La diferencia de tiempo entre las dos trayectorias es:

$$t_2 - t_1 = \frac{2L}{c}\frac{v^2}{2c^2}$$

La diferencia de fase entre los dos rayos es:

$$\Delta f = \frac{v^2}{c^2}\frac{L}{\lambda}$$

Una primera medida se realiza en la posición ya discutida. Luego se rota el aparato en 90°

Vemos que la diferencia de fase en el segundo caso es: $\Delta f = -\frac{v^2}{c^2}\frac{L}{\lambda}$

Por lo tanto, la diferencia de fase entre las dos medidas es

$$\Delta = 2\frac{v^2}{c^2}\frac{L}{\lambda}$$

Al rotar el aparato las líneas de interferencia debiesen moverse.

En el experimento de Michelson-Morley se tine que:

$\lambda = 6 \times 10^{-5}$cm. $L = 10^{3}$cm. $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$, $\Delta = 0.5$

NO SE OBSERVO MOVIMIENTO DE LAS LINEAS DE INTERFERENCIA!

- El electrón fue descubierto por J.J. Thompson en 1897. El midió el cuociente $\frac{e}{m}$
- En 1904, Lorentz propuso un modelo electromagnético del electrón.
- Todas las propiedades dinámicas del electrón son de naturaleza electromagnética, Su masa, momentum y la ecuación de movimiento del electrón, está determinada por las leyes de Maxwell.
- Usando esta idea, Lorentz encontró las transformaciones de Lorentz, que conectan las coordenadas espaciales y el tiempo medidos en el sistema propio del electrón con las coordenadas espaciales y el tiempo en el sistema de laboratorio.
- Las transformaciones de Lorentz dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell, como veremos más adelante. Es por esto que Lorentz las encontró.

Postulados de la Relatividad Especial

1. Principio de Relatividad.Las leyes de la Física no cambian al pasar de un sistema inercial a otro.
2. Constancia de la velocidad de la luz. La velocidad de la luz en el vacío, c, es la misma en todos los sistemas inerciales.

Consideremos un rayo de luz emitido en los orígenes O, O' de dos sistemas inerciales en $t = t' = 0$. La velocidad relativa de los dos sistemas inerciales es $\vec{u}$. La posición del frente de onda descrito por observadores en los dos sistemas inerciales satisface:

$$c^2t^2 - \vec{x}^{\,2} = 0 = c^2t'^2 - \vec{x}^{\,\prime 2}$$

Si las transformaciones son lineales, se tiene: $c^2t'^2 - \vec{x}^{\,\prime 2} = A(\vec{u}\,)(c^2t^2 - \vec{x}^{\,2})$

$$c^2t'^2 - \vec{x}^{\,\prime 2} = A(\vec{u}\,)(c^2t^2 - \vec{x}^{\,2}) = A(\vec{u}\,)A(-\vec{u}\,)\big(c^2t'^2 - \vec{x}^{\,\prime 2}\big)$$

$A(\vec{u}\,)A(-\vec{u}\,) = 1$

Isotropía del espacio: $A(\vec{u}\,) = A(-\vec{u}\,)$,$A(\vec{u}\,) = \pm 1$.

Como $A(\vec{u})$ es una función continua del parámetro:$A(\vec{u}\,) = 1$.

$$\boxed{c^2t'^2 - \vec{x}^{\,\prime 2} = c^2t^2 - \vec{x}^{\,2}}$$

Sea $x_4 = ict$, $x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu$.

Convención de Einstein: Dos índices repetidos en un monomio significan la suma de esos índices de 1 a la dimensión del espacio.

$$x' = Ax \qquad {x'}^T x' = x^T A^T A x, \forall x$$
$$A^T A = 1, A \, \text{es una matriz ortogonal}$$

- $\det\,(A^T A) = 1 = \det\,(A)^2$, $\det\,(A) = \pm 1$, $\det\,(A)$es una función continua de A. Las matrices ortogonales tienen dos sectores topológicamente disconexos.
- Rotacíon en dos dimensiones:$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\det\,(A) = 1$

Consideremos un sistema S'que se mueve con velocidad u a lo largo del eje x de S. En $t=t'=0$ los orígenes de S y S'coinciden.

En el tiempo t el origen de S' tiene coordenada $x'=0$ en S' y coordenada $x=ut$ en S.

$$x' = \cos\theta x + \operatorname{sen}\theta x_4$$
$$0 = \cos\theta ut + \operatorname{sen}\theta ict \quad \tan\theta = i\frac{u}{c}, \beta = \frac{u}{c}$$

Tenemos que: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$, $\operatorname{sen}\theta = i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$x' = \gamma(x-ut), \;\; ict' = -i\beta\gamma x + \gamma ict \;\; t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

Transformaciones de Lorentz: $x' = \gamma(x-ut)$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$,
$x = \gamma(x'+ut')$, $t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$

Dilatación del tiempo: Consideremos un reloj situado en el origen del sistema S'. Tenemos que el intervalo de tiempo medido por el reloj en S', dt'se relaciona con el intervalo de tiempo medido en S, dt por $dt = \gamma dt'$, $\boxed{dt' = \gamma^{-1} dt}$. El reloj en S'mide un intervalo de tiempo más corto que el reloj en S.

Contracción de Fitzgerald-Lorentz: Consideremos una regla de largo L' medida en S'. Cuál es el largo de la regla medido en S?

Notemos que para medir el largo de la regla debemos usar dos eventos simultáneos en S.

$dx' = \gamma dx$, $L' = \gamma L$, $\boxed{L = \gamma^{-1} L'}$. La regla se ve más corta en S.

El intervalo espacio-temporal entre dos sucesos es un invariante de Lorentz:

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\,\vec{x}^{\,2} \qquad ds'^2 = ds^2$$

Consideremos un reloj que está atado a una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un sistema inercial S. Este reloj mide el intervalo de **tiempo propio** de la partícula, $d\tau$:

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - d\,\vec{x}^{\,2} = c^2dt^2\left(1 - \vec{\beta}^{\,2}\right)$$
$$d\tau = \gamma^{-1}dt$$

El intervalo de tiempo propio es un invariante relativista, es decir, es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Lagrangiano de una partícula libre: La acción debe ser un invariante de Lorentz.

El único invariante disponible es el intervalo de tiempo propio:$S=\alpha\int\, d\tau=\alpha\int\, dt\frac{d\tau}{dt}$.

$L=\alpha\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}$.

Para $\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\ll 1$, $L\sim\alpha\left(1-\frac{1}{2}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right)=\alpha-\frac{1}{2}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\alpha$,$\alpha=-m_0c^2$. m_0 es la masa en reposo de la partícula.

- Momentum lineal: Es la cantidad conservada debido a invarianza translacional de S.

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=-m_0\,c^2\gamma\left(-\frac{\vec{v}}{c^2}\right)=m_0\gamma\,\vec{v}=m\,\vec{v}$$

- $m=m_0\gamma$. La masa depende de la velocidad de la partícula.
- Energía cinética: Es la cantidad conservada debido a invarianza temporal de S.

$$E=\vec{v}\,.\vec{p}-L=m_0\gamma\,\vec{v}^{\,2}+m_0c^2\gamma^{-1}=$$
$$m_0\gamma c^2\left(\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}+1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right)=m\,c^2$$

- Cuadrivelocidad:$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ es un vector de Lorentz llamado cuadrivelocidad de la partícula.
- Se tiene que $v_\mu v_\mu = -c^2$
- Cuadrimomentum: $p_\mu = m_0 v_\mu$, $p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$
- Componentes: $p_4 = m_0 i c \frac{dt}{d\tau} = i\frac{E}{c}$,$p_\mu = \left(\vec{p}\,, i\frac{E}{c}\right)$
- $p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2 = \vec{p}\,^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2$,$E = c\sqrt{\vec{p}\,^2 + m_0^2 c^2}$
- Si $m_0 = 0$, $E = c|\vec{p}\,|$
- Invarianza translacional en el espacio-tiempo implica la conservación del cuadrimomentum.

Consideremos una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}\,'$ en S'. Cuál es la velocidad $\vec{v}$ de la partícula medida en S?

$x = \gamma(x' + ut')$, $t = \gamma\big(t' + \frac{u}{c^2}x'\big)$,$y = y'$,$z = z'$

$$v_x = \frac{\gamma(dx' + u\,dt')}{\gamma\big(dt' + \frac{u}{c^2}dx'\big)} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

$$v_y = \frac{dy'}{\gamma\big(dt' + \frac{u}{c^2}dx'\big)} = \gamma^{-1}\left(\frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2}v_x}\right)$$

$$v_z = \frac{dz'}{\gamma\big(dt' + \frac{u}{c^2}dx'\big)} = \gamma^{-1}\left(\frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2}v_x}\right)$$

La suma inversa se obtiene cambiando u por $-u$.

p_μ transforma como x_μ. $p'_x = \cos\theta p_x + \operatorname{sen}\theta p_4, p'_4 = -\operatorname{sen}\theta p_x + \cos\theta p_4$

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\frac{E}{c}\right) \quad E' = \gamma(-\beta c p_x + E)$$

$$p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

La fase de una onda plana es un invariante de Lorentz:$k'_\mu x'_\mu = k_\mu x_\mu$, $\forall x_\mu$->k_μ transforma como un vector de Lorentz.

$k_\mu = \left(i\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$, $\omega = c\left|\vec{k}\right|$

k_μ transforma como x_μ. $k'_x = \cos\theta\, k_x + \operatorname{sen}\theta k_4$,$k'_4 = -\operatorname{sen}\theta k_x + \cos\theta k_4$

$$k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\frac{\omega}{c}\right) \quad \omega' = \gamma(-\beta c k_x + \omega)$$
$$k'_y = k_y \qquad\qquad k'_z = k_z$$

$$\omega = \gamma\omega'\left(1 + \frac{u}{c}\,\hat{k}'_x\right)$$

Para una onda viajando en la dirección negativa de x,

$$\omega = \omega'\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}, \nu = \nu'\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}, \lambda = \lambda'\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}$$

λ : Longitud de onda de la luz.

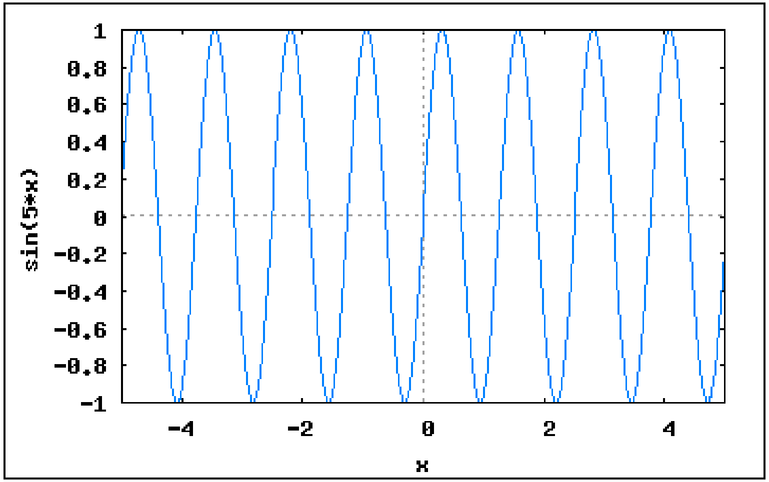
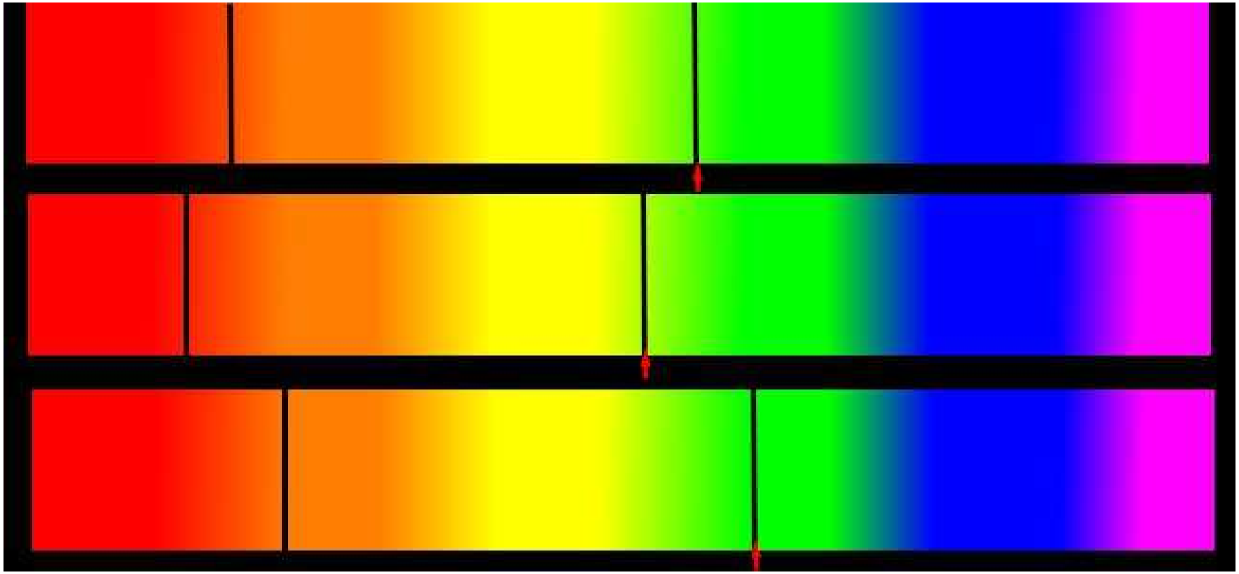


Figura 3.

Cuando la fuente se aleja del observador con velocidad v

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$



La gráfica muestra un ejemplo del espectro de absorción de la luz de una estrella. Las dos líneas negras corresponden a luz que fue absorbida por átomos en la atmósfera de la estrella. El primer espectro corresponde a una estrella en reposo relativo a nosotros que observamos desde la Tierra. El segundo espectro corresponde a una estrella que se aleja de nosotros. Note como las líneas del espectro se corren hacia el rojo. Finalmente, el último espectro corresponde a una estrella que se acerca a nosotros. Note como las líneas del espectro se corren hacia el violeta.

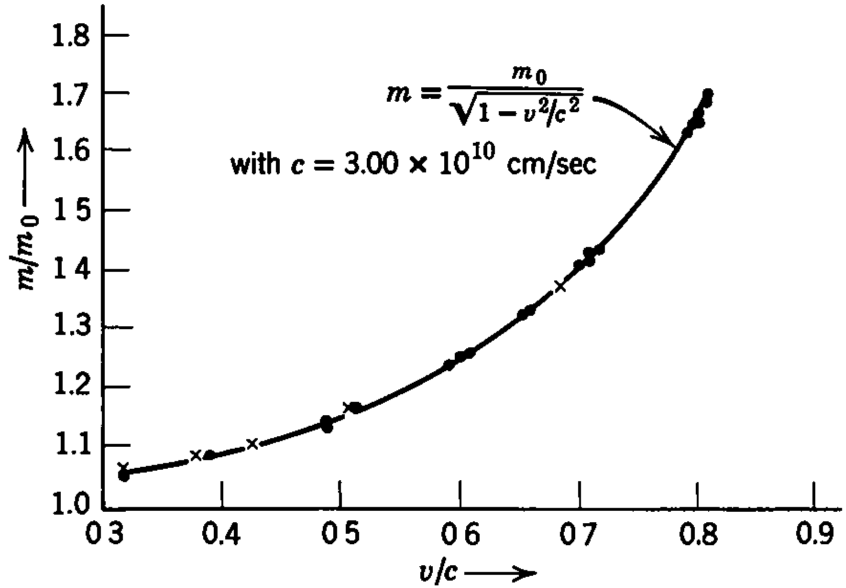


Figure 1–14. An experimental verification of the dependence of mass on velocity. From I. Kaplan, *Nuclear Physics*, 1955, Addison Wesley, Reading, Mass.

- Transformación de la aceleración:$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$,$a_x = \frac{a'_x \frac{dt'}{dt}\left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right) - \frac{u}{c^2} a'_x \frac{dt'}{dt}(v'_x + u)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)^2}$,

$$a_x = \frac{a'_x \frac{dt'}{dt}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)^2} = \frac{a'_x \frac{dt'}{dt}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)^2} = \frac{a'_x \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)^3}$$

- Consideremos un sistema atado al cuerpo que está acelerando(sistema propio). Se tiene: $v'_x = 0$.
- $a_x = a'_x \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$
- $a'_x = g$ como en la Tierra.

$$\dot{u} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{du}{d\tau} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \qquad \int \frac{du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = g\tau$$

$$u = c\tanh w \qquad du = c\,\mathrm{sech}^2 w\, dw \qquad w - w_0 = \frac{g}{c}(\tau - \tau_0)$$

$$u = c\tanh\left(\frac{g}{c}(\tau - \tau_0) + w_0\right) \quad \frac{dx}{d\tau} = c\,\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{g}{c}(\tau - \tau_0) + w_0\right) \; \tanh\left(\frac{g}{c}(\tau - \tau_0) + w_0\right)$$

$$x = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g}{c}(\tau - \tau_0) + w_0\right) + x_0$$

Viaje a Andrómeda. Acelera la mitad del tiempo, luego desacelera la mitad del tiempo.

$$u = c\tanh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad x = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right)$$

$x = 10^6$ años-luz $\tau = 4.4 \times 10^8 s = 14.11$años.

Tiempo total:28.5 años, a bordo de la nave.

Tiempo en la Tierra:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \mathrm{sech}\left(\frac{g}{c}\tau\right) \quad t = \frac{c}{g}\mathrm{senh}\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

$t = 3.15 \times 10^{13} s$, $t = 1000000.9$años.

Tiempo total en la Tierra: 2000001.9 años.

Choques