PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

Facultad de Física

FIZ0311

Prof. Jorge Alfaro S.

EXAMEN Viernes 3 de Julio de 2015

Problema 1 Responda las siguientes preguntas. Cada inciso vale 1 pt

a) ¿ Cuál fue el rol inicial de la constante cosmológica?

Sol:
La Teoría general de la Relatividad predice la expansion del Universo, Einstein introdujo la constante cosmológica en sus ecuaciones con la finalidad de tener un universo estático.

b) ¿ Cuales son las 3 evidencias empíricas que apoyan la teoriá cosmológica del Big-Bang ?

Sol:
La expansión del universo que se expresa en la Ley de Hubble, que se puede apreciar en el corrimiento hacia el rojo de las galaxias, las medidas detalladas del fondo cósmico de microondas, y la abundancia de elementos ligeros.

c) Escriba la ley de Hubble y explique que significa.

Sol:
La velocidad de recesión de una galaxia es proporcional a la distancia que esta se encuentra. La constante de proporcionalidad es la constante de Hubble, tal que $v = H_0\ D$. El descubrimiento de este fenómeno tiene su origen en la observación del corrimiento hacia el rojo de la luz emitida por galaxias lejanas.

d) £ Que significa que el universo sea homogéneo e isótropo ?

Sol:
Homogeneo: Significa que existira la misma evidencia observacional para observadores ubicados en distintos lugares del universo
Isotropo: Significa que sin importar en que dirección se este observando, se verán las mismas propiedades en el Universo.

e) £ En que consiste el problema del horizonte (causalidad) ?

Sol:
La información no puede viajar mas rápido que la luz, de manera que dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que la velocidad de la luz multiplicada por la edad del universo no pueden estar causalmente conectadas. Considerando esto resulta difícil explicar la distribución de la radiación de fondo de microondas, que es altamente simétrica como si las distintas regiones del universo hubiesen estado en equilibrio térmico sin importar cuan alejadas estén entre ellas.

f) £ Que es la materia oscura y que es energía oscura ?

Sol:
Se denomina materia oscura a la hipotética materia que no emite suficiente radiación electromagnetica para ser detectada con los medios técnicos actuales, pero cuya existencia se puede deducir a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible. La energía oscura es una forma de energía que estaría presente en todo el espacio, produciendo una presion que tiende a acelerar la expansión del Universo, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva.

Problema 2

Un cohete pasa frente a la Tierra al mediodia con una rapidez de 0,8 c. Observadores en el cohete y en la Tierra coinciden que en ese momento son las 12 del día.

a) A las 12:30 (según el reloj del cohete) el cohete pasa por una estación espacial fija respecto a la Tierra y sincronizada con ésta, £Que hora es en la estación, según un observador ubicado en la tierra? (1,5 pt)

Sol:
Sea $\Delta t_1'$ el tiempo transcurrido hasta que el cohete pasa por la estación, según un observador en la tierra, entonces: $\Delta t_1' = \gamma \Delta t_1$, con $\gamma = 1,667$ se obtiene $\Delta t_1' = 50 min$ Por lo tanto la hora en la estación es 12:50

b) £A que distancia de la Tierra (en coordenadas de la Tierra) está la estación? (1,5 pt)

Sol:
$\Delta x_1 = \Delta t_1'$ 0,8 c = 7,2 x 10^{11} m

c) A las 12:30 (según el reloj del cohete) el cohete manda una señal de radio a la Tierra. £A que hora llega la señal a la Tierra (según su propio reloj) ? (1,5 pt)

Sol:
Sea Δt_2 el tiempo que transcurre durante el viaje de la señal (según un obs en la tierra), entonces : $\Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{c} =$ 40 min . Por lo tanto la hora en la estación según un observador en la tierra es $12{:}00 + \Delta t_1' + \Delta t_2 =$ 13:30

d) La Tierra responde inmediatamente enviando una señal al cohete. £A que hora recibe la respuesta el cohete (según su propio reloj) ? (1,5 pt)

Sol:
Conviene trabajar todo en el sistema de referencia de la tierra, y luego pasar al sistema del cohete.

Mientras la señal viaja hacia la tierra, el cohete avanza una distancia $\Delta x_2 = \Delta t_2 \, 0,8\, c =$ 5,76 x 10^{11}m
Sea Δt_3 el tiempo transcurrido desde que la señal de respuesta sale de la tierra hasta que la señal llega al cohete, entonces

$$c = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + 0,8\, c\, (\Delta t_3)}{\Delta t_3}$$

De donde se obtiene $\Delta t_3 =$ 360 min. Luego la hora en el instante en que el cohete recibe la respuesta es $t = 19{:}\,30$

Por lo tanto la hora según el cohete es $t' = \gamma\, (\Delta t_3 + \Delta t_2) + 12{:}\,30 =$ 23:40

Problema 3

Considere fotones de alta energía (rayos γ) que son desviados al colisionar con electrones en reposo. Asuma que los fotones colisionados son devueltos en la misma dirección de incidencia y ademas que su energía es mucho mayor que la de los electrones en reposo.

a) Calcule el cambio en la longitud de onda de los fotones. (1pt)

Sol:

$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - cos(\theta))$, $\theta = \pi \rightarrow \Delta\lambda =$ 4,85x 10^{-12}m

b) Muestre que la energía de los fotones colisionados es la mitad de la energía de los electrones en reposo. (1pt)

Sol:
Sea E' la energia de los fotones colisionados, luego

$$\begin{aligned} E' &= \frac{h c}{\lambda'} \\ &= \frac{h c}{\lambda + 2 h / m_e c} \\ &= \frac{m_e c^2}{2 + m_e c^2 / E} \approx \frac{m_e c^2}{2} \end{aligned}$$

c) Determine la energía cinética de los electrones colisionados si la energía de los fotones incidentes es 150 MeV. (1pt)

Sol:

$E = E' + K \rightarrow K = 149{,}7$ MeV

d) £ Cual es la longitud de onda de estos electrones? (1pt)

Sol:
$K = \frac{p^2}{2 m_e} = \frac{h^2}{2 \lambda^2 m_e} \rightarrow \lambda =$ 9,53 x10^{-11} m

e) Si la energía de un haz de fotones es apenas una millonesima parte de la energía de los fotones en c) . £Es posible observar el efecto fotoeléctrico para un material cuya función trabajo es 4,5 eV ? (2pt)

Sol:
$E_\gamma = 150\, eV > \phi$, entonces hay efecto fotoeléctrico.

Problema 4: Preguntas cortas I

a) Usando la regla de cuantización del momentum angular en el modelo de Bohr, determine una expresión de los radios de las órbitas permitidas para un electrón que se encuentra girando alrededor de un átomo de número atómico Z. (2pt)

Sol:
$F_e = F_c \rightarrow \frac{Z\,q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2} = \frac{m\,v^2}{r}$, como $L = m\,v\,r = n\,\hbar$ se obtiene:

$$r = \frac{n^2\,\hbar^2\,4\,\pi\,\epsilon_0}{Z\,q^2\,m} = \frac{\epsilon_0\,n^2\,h^2}{\pi\,m\,Z\,q^2}$$

b) La ley de radiación electromagnetica para un cuerpo negro que se encuentra en equilibrio térmico viene dado por :

$$u(\nu, T) = \frac{8\,\pi}{c^3}\,\frac{h\,\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

A partir de esto, muestre que el máximo de la densidad de energía ocurre para una longitud de onda de la forma $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$. (2pt)

Sol:

$$\begin{aligned}\mu(\lambda, T) =& \mu(\nu, T)\left|\frac{d\,\nu}{d\,\lambda}\right| \\ =& \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5}\left(\exp\left(\frac{h\,c}{k\,T\,\lambda}\right) - 1\right)^{-1}\end{aligned}$$

Para encontrar el máximo derivar con respecto a λ :

$$\begin{aligned}0 =& \frac{\partial\,\mu}{\partial\,\lambda} \\ =& \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^6\,(\exp\,(h\,c/k\,T\,\lambda) - 1)^2}\left(-5\left(1 - \exp\left(\frac{-h\,c}{k\,T\,\lambda}\right)\right) + \frac{h\,c}{k\,T\,\lambda}\right)\end{aligned}$$

llamando $u = \frac{h\,c}{k\,T\,\lambda}$, se obtiene :

$$u = 5\,(1 - \exp\,(-u))$$

Iterando, se obtiene $u = 5(1 - e^{-5}) = 4.97$

c) Muestre que el momento magnético dipolar para un electrón girando con momentum angular $\vec{L}$ en una órbita clásica circular alrededor del núcleo, está dado por: $\vec{\mu} = (-e/2\,m)\vec{L}$. (2pt)

Sol:
$\mu = I\,A = \frac{e\,v}{2\,\pi\,r}\,\pi\,r^2 = \frac{1}{2}\,e\,v\,r = \frac{e\,L}{2\,m}$

Problema 5: Preguntas cortas II

a) Nombre y escriba las ecuaciones para todos los tipos de decaimientos radiactivos. (1pt)

Sol:

Alfa : ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$

Beta -: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e-$

Beta +: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^{+}$

Captura electrónica : ${}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y$

b) Escriba las transformaciones de Lorentz para un boost en la dirección y.(1pt)

Sol:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\,(t - v\,y/c) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma\,(y - v\,t) \\ z' &= z \end{aligned}$$

c) £Cuales son los valores de la componente z del momento magnético del átomo de Hidrógeno asociados al spin del electrón y al momentum angular orbital del electrón ? (1pt)

Sol:

$\mu_l = \frac{-e}{2\,m}\sqrt{l\,(l+1)}\,\hbar$ y $\mu_s = -g\frac{e}{2\,m}\sqrt{s\,(s+1)}\,\hbar$

d) £Cual es la degeneración para el ground state, el primer y segundo estado exitado en el átomo de Hidrógeno ? (1pt)

Sol:

$d\,e\,g(E_n) = n^2 \rightarrow 1{,}4$ y 9 para los 3 primeros niveles de energía

e) Enuncie cuales son las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza y que rol juegan en física. Ordene en forma creciente las magnitudes de éstas. (1pt)

Sol:
fuerza electromagnética → Determina las propiedades químicas de los elementos.
fuerza débil → Interviene en el decaimiento radiactivo de los núcleos atómicos.
fuerza fuerte → Es determinante para entender la estabilidad de los núcleos atómicos.
fuerza gravitacional → Determina la estructura y evolución del Universo a gran escala.
En orden creciente las magnitudes de las 4 fuerzas fundamentales son : $f_g < f_w < f_{em} < f_s$

f) Explique el teorema de equipartición.(1pt)

Sol:
En equilibrio térmico cada grado de libertad constribuye $\frac{1}{2}\,k\,T$ a la energía promedio de una molécula.

Problema 6

I Considere una partícula de masa m en presencia del siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ V_0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Encuentre una relacion entre V_0 y a, de forma tal que la partícula tenga un estado posible con energía $E = V_0/2$. (4pt)
Sol:

Las soluciones para las 3 regiones son : $\Psi_I = 0$, $\Psi_{II} = A\, s\, e\, n\, (k\, x) + B\, c\, o\, s\, (k\, x)$, $\Psi_{III} = D\, e\, x\, p(-\alpha\, x)$, con $k^2 = 2\, m\, E/\hbar^2$ y $\alpha^2 = 2\, m\, (V_0 - E)/\hbar^2$
Las condiciones de borde son:

$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \rightarrow B = 0$
$\Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \rightarrow A \sin(k\, a) = D \exp(-\alpha\, a)$
$\Psi'_{II}(a) = \Psi'_{III}(a) \rightarrow k\, A \cos(k\, a) = -\alpha\, D \exp(-\alpha\, a)$

Dividiendo las dos ultimas ecuaciones: $t\ a\ n\ (k\ a) = -k/\alpha \rightarrow t\ a\ n\ \left(\frac{\sqrt{2\, m\, E}}{\hbar}\ a\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$
Si $E = V_0/2$ entonces de la ecuacion anterior se obtiene $V_0 = \frac{\pi^2\, \hbar^2}{16\, a^2\, m}$

II Determine el valor de expectación de la energía cinética $<K>$ y de la energía potencial $<V>$ para el átomo de Hidrógeno en el ground state. (2pt)
Sol:

El ground state corresponde a $\Psi_{1,0,0} = \frac{2}{a_0^{3/2}}\, e\, x\, p(-r/a_0) \frac{1}{\sqrt{4\, \pi}}$, luego

$$<K> = \int \Psi^*_{1,0,0} \frac{-\hbar^2}{2\, m} \left(\frac{1}{r^2} \partial_r\, (r^2\, \partial_r) \right) \Psi_{1,0,0}\, 4\, \pi\, r^2\, d\, r =$$
$$\frac{\hbar^2\, 4\, \pi}{\sqrt{\pi\, a_0^3}\, 2\, m} \int_0^\infty \left(\frac{2\, r}{\sqrt{\pi\, a_0^5}} - \frac{r^2}{\sqrt{\pi\, a_0^7}} \right) \exp(-2\, r/a_0) \ = \frac{\hbar^2}{2\, m\, a_0^2}$$

Mientras que

$$<V> \ = \frac{-4\, \pi\, k}{\pi\, a_0^3} \int_0^\infty r \exp(-2\, r/a_0) d\, r = -k/a_0$$

Datos: $Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\, \pi}}$, $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\, \pi}}\ c\ o\ s(\theta)$, $R_{1,0} = \frac{2}{a_0^{-3/2}}\ e\ x\ p(-r/a_0)$. $\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, d\, x = (n-1)!$
$m_e = 0,511\, M\, e\, V/c^2$ $\lambda_c = 2{,}426 \text{ x } 10^{-12}$ m