

# Las leyes de la Mecánica

## Leyes de Newton

Sea  $\vec{p} = m\vec{v}$  el momentum lineal de una partícula.  $m$  es la masa y  $\vec{v}$  la velocidad.

1) Principio de Inercia. Todo cuerpo que se mueve libremente (no está sometido a una fuerza) se mueve en una línea recta (o está en reposo).

2) Sea  $\vec{F}$  una fuerza actuando sobre una partícula. Se tiene

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}, \text{ para } m \text{ constante}$$

3) Acción y Reacción: La fuerza que ejerce una partícula 1 sobre una partícula 2 es igual y opuesta a la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1.

El momentum lineal total de un sistema de  $N$  partículas está dado por

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Un resultado importante es la conservación de  $\vec{P}$  si sobre las  $N$  partículas no actúan fuerzas externas (sistema aislado).

## Energía Cinética

La energía cinética de una partícula está dada por:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}, v = |\vec{v}|, p = |\vec{p}|$$

Para la mayoría de las fuerzas que se utilizan en mecánica existen funciones del punto del espacio  $U_i(\vec{x})$  llamada *Energía potencial* correspondiente a la fuerza  $\vec{F}_i$  tal que se conserva la energía mecánica total:

$$E = K + \sum_i U_i(\vec{x})$$

Las fuerzas para las que existe la función  $U$  se llaman *fuerzas conservativas*.

Más adelante mencionaremos los resultados de la Termodinámica, que estudia los fenómenos que involucran transferencia de calor. En ella se descubrió que el calor es una nueva forma de energía, que no proviene de fuerzas conservativas.

Agregando el calor a las formas de energía se llega al enunciado general del

## Principio de Conservación de la Energía

La suma total de todas las energías del universo se conserva.

## Relatividad Especial

La teoría de la Relatividad Especial se basa en dos postulados.

1) Principio de Relatividad. Todos los sistemas inerciales son físicamente equivalentes. Esto es las leyes de la Física son las mismas en dos sistemas inerciales moviéndose uno respecto al otro con velocidad constante.

2) Constancia de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) tiene el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

De estos postulados se derivan todos los resultados de la Relatividad Especial. Entre ellos:

1) Variación de la masa con la velocidad:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El momentum lineal sigue siendo  $\vec{p} = m\vec{v}$  .  $m_0$  es la *masa en reposo*.

2) La energía cinética es:

$$K = mc^2 - c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$

De aquí se deduce la famosa fórmula de Einstein de *equivalencia de la masa y la energía*:

$$E = mc^2$$

Por esto se tiene:

### **Principio de Conservación de la masa-Energía**

La suma total de todas las masas(multiplicadas por  $c^2$ ) y las energías del universo se conserva.

Para una partícula con masa en reposo 0(Ej.:fotón), se tiene:

$$E = cp$$

## **Fuerza elástica**

Si se deforma levemente un cuerpo de su posición de equilibrio mecánico, aparecerá una fuerza *elástica* que tratará de restaurar el equilibrio. Para una desviación pequeña  $x$  media a partir de la posición de equilibrio  $x = 0$ , la fuerza está dada por la *Ley de Hooke*:

$$F = -kx, k \text{ es la constante del resorte}$$

La energía potencial correspondiente a esta fuerza es:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Una partícula de masa  $m$  atada al extremo del resorte realizará un movimiento periódico, llamado armónico simple con una frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Ley de Gravitación Universal

La fuerza gravitacional entre dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas por una distancia  $r$  es

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  es la constante de gravitación de Newton,  $\hat{r}_{12}$  es el vector unitario con origen en la partícula 1 y que apunta a la partícula 2.

La energía potencial gravitacional está dada por:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

La ley de gravitación universal de Newton permite explicar los movimientos de planetas y estrellas y es válida en un amplio rango.

A partir de 1916 ha sido reemplazada por la *Relatividad General de Einstein*.

## Leyes de Kepler

A partir de la ley de Gravitación y de las leyes de la mecánica se obtienen las leyes de Kepler del movimiento planetario:

- 1) Los planetas se mueven en elipses, con el Sol en uno de los focos.
- 2) La línea que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley se deduce de la conservación del momentum angular  $\vec{L}$ , lo cual se deriva del carácter central de la fuerza:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{constante}$$

- 3) El cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

Demostraremos esta ley para órbitas circulares:

La segunda ley de Newton da:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

pero  $v = \frac{2\pi r}{T}$ , donde  $T$  es el período. Se tiene:

$$\frac{4\pi^2}{GM} r^3 = T^2$$

## Velocidad de escape

Consideremos un cuerpo celeste esférico de masa  $M$  y radio  $R$ . Si disparamos una partícula radialmente hacia afuera con velocidad  $v_0$ , se tiene la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$$

Si se impone que la partícula escape a  $r = \infty$ , debemos pedir que  $v$  sea cero en infinito. Por lo tanto  $E = 0$ . Esto es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$v_0$  es la velocidad de escape. Para la Tierra vale:  $v_0 = 11.3 \text{ km/s}$ .

La velocidad de escape revistirá vital importancia cuando discutamos la posibilidad de atmósfera en un cuerpo celeste. Como veremos más adelante (distribución de velocidades de Maxwell), a una temperatura  $T$  dada, siempre existe una proporción de moléculas que supera la velocidad de escape y se va del cuerpo celeste. Esta fuga de moléculas se acentúa al aumentar la temperatura o al disminuir  $M$  y es particularmente relevante para moléculas de masa pequeña.

## Fuerzas Electromagnéticas

### Ley de Coulomb

La fuerza eléctrica entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ , separadas por una distancia  $r$  es

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ,  $\hat{r}_{12}$  es el vector unitario con origen en la partícula 1 y que apunta a la partícula 2. La carga eléctrica se mide en Coulombs ( $C$ ). Dado que las cargas pueden ser positivas o negativas, la fuerza puede ser repulsiva, para cargas de igual signo o atractiva, para cargas de signo opuesto.

La energía potencial electrostática está dada por:

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

Resulta tremendamente conveniente introducir el concepto de *Campo Eléctrico*  $\vec{E}$ . Consideremos una carga  $Q$  en el origen. El campo eléctrico creado por la carga  $Q$  en cualquier punto  $\vec{r}$  es:

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

De esta manera, la fuerza que ejerce el campo eléctrico sobre una carga  $q$  situada en  $\vec{r}$  es

$$\vec{F}_q = q\vec{E}$$

lo que coincide con la ley de Coulomb. El campo eléctrico se mide en  $N/C$

Asociado al campo eléctrico, se introduce el potencial electrostático  $\varphi$ , tal que  $U = q\varphi$ . Para una carga  $Q$ , se tiene

$$\varphi(r) = K \frac{Q}{r}$$

El potencial electrostático se mide en volts.  $1V(\text{olt}) = 1J/C$ .

## Campo magnético

El movimiento de cargas eléctricas da origen a un campo magnético  $\vec{B}$ . El campo magnético produce una fuerza sobre una carga eléctrica en movimiento dada por:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{v}$  es la velocidad de la carga  $q$ .

La presencia de un campo eléctrico y otro magnético da lugar a la llamada *Fuerza de Lorentz*, que es válida aún en Relatividad Especial:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$