Problema # 1

Una partícula emite radiación de Cerenkov al moverse en un medio con velocidad mayor que la velocidad de la luz en el medio.

a) Derive la relación entre la velocidad de la partícula $v = \beta c$, el índice de refracción del medio n y el ángulo θ relativo a la trayectoria de la partícula, al cual la radiación de Cerenkov se emite.

b) El gas de Hidrógeno a 1 atmósfera y a 20 grados tiene un índice de refracción $n = 1 + 1.35x10^{-4}$. Cuál es la energía cinética mínima en Mev que un electrón ($m_0 = 0.5 M e\, v/c^2$) necesita para emitir radiación de Cerenkov en este medio?

Sol:

a) La radiación de Cerenkov se debe a la superposición constructiva de dos ondas. La emitida por la partícula en t=0,T. Se obtiene un ángulo rectángulo cuya hipotenusa es vT y lados cT.

Esto es:

$$\cos\theta_c = \mathrm{cT}/vT = \frac{c_n}{v} = \frac{c}{n v}$$

b)

$$c = n v \ ,$$

$$\begin{aligned}
v &= c/n \\
E &= m c^2 \gamma \\
&= 0.5(1/\sqrt{1-(1/n)^2} \quad -1)\mathrm{Mev} \\
&= 0.5(1/\sqrt{2 \times 1.35x10^{-4}} - 1) \qquad \mathrm{Mev} \\
&= 29.93\,\mathrm{Mev}
\end{aligned}$$

Problema #2 5036

Un positrón no-relativista de carga e y velocidad $v_1 (v_1 << c)$, choca de frente con un núcleo fijo de carga Ze. El positrón, que viene de lejos, es desacelerado hasta detenerse y luego es acelerado nuevamente en la dirección opuesta hasta alcanzar su velocidad final v_2. Tomando en cuenta la pérdida de energía por radiación (pero suponiendo que es pequeña), encuentre v_2 como función de v_1 y Z.

Sol:

La energía mecánica del positrón es:

$$E_F = m v_1^2/2 = m v_2^2/2 + \Delta E$$

dónde ΔE es la pérdida de energía por radiación. Como la pérdida de energía es pequeña y el movimiento es NR, la podemos calcular usando la fórmula de Larmor. Necesitamos saber la aceleración del positrón en su trayectoria:

$$a = \frac{\mathrm{Ze}^2}{m r^2}$$

Se tiene:

$$dE = \frac{P}{\dot{r}}\,dr = \frac{A}{r^4\,\dot{r}}dr = \frac{A}{r^4}\frac{dr}{\sqrt{v_1^2 - \frac{2\mathrm{Ze}^2}{m\,r}}},\, A = \frac{2e^6Z^2}{3m^2c^3}$$

$$\Delta E = 2A\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^4}\,\frac{1}{\sqrt{v_1^2 - \frac{2\mathrm{Ze}^2}{m\,r}}}\ \ ,\ r_0 = \frac{2\mathrm{Ze}^2}{mv_1^2}$$

$$\Delta E = \frac{2A}{v_1}\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}} = \frac{2\,A}{v_1r_0^3}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{32\,A}{15\,v_1\,r_0^3} = \frac{8\,m\,v_1^5}{45c^3Z}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{m\,v_1^2}{2} - \frac{8\,m\,v_1^5}{45c^3Z}$$

$$v_2 = v_1\sqrt{1-\frac{16v_1^3}{45c^3Z}} \approx v_1(1-\frac{8v_1^3}{45c^3Z})$$

Problema #3 Landau p.238

Encuentre la sección eficaz total efectiva para el scattering por un oscilador,de una onda electromagnética linealmente polarizada, tomando en cuenta el amortiguamiento por radiación.

Sol:

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} + \tau\frac{d\,\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}}{dt} \qquad ,\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} = q\,\mathrm{Re}(\,\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}) - m\omega_0^2\boldsymbol{x}$$

$\ddot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2\boldsymbol{x} + \tau\omega_0^2\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$,

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0e^{-i\omega t}$,

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0\frac{1}{-\omega^2+\omega_0^2-i\tau\omega_0^2\omega}$$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}|\boldsymbol{\varepsilon}^*.\dot{\boldsymbol{v}}\,|^2$, $<\ \dot{\boldsymbol{v}}^2\ > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{v}}\dot{\boldsymbol{v}}^*)$

$$<\ \frac{dP}{d\Omega}> = \frac{q^2}{8\pi c^3}(\,\frac{q}{m})^2|\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2\frac{\omega^4}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(\tau\omega_0^2\omega)^2}, \boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

$$\mathrm{flujo} = \frac{c}{8\pi}\,|E_0|^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q^2}{c^4}(\,\frac{q}{m})^2|\boldsymbol{\varepsilon}_0.\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2\frac{\omega^4}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(\tau\omega_0^2\omega)^2}$$

$$\int d\Omega\,\boldsymbol{\varepsilon}_i^*\boldsymbol{\varepsilon}_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{i\,j}\,\mathrm{para\,cada\,polarizacion\,(hay\,2)},$$

$$\sigma = \frac{2q^2}{c^4}(\,\frac{q}{m})^2\frac{4\pi}{3}\frac{\omega^4}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(\tau\omega_0^2\omega)^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{q^4}{m^2c^4}\frac{\omega^4}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(\tau\omega_0^2\omega)^2}$$