Electrodinámica II

Prof. Jorge Alfaro 26 de Noviembre de 2009

Problema #1

Considere el choque de n cuerpos puntuales en un sistema de Lorentz S. El choque se produce simultáneamente en el mismo punto. Antes del choque, las masas en reposo y velocidades son, $m_a, \vec{v_a}, a = 1, ...n$. Después del choque se tienen $m'_a, \vec{v'_a}$. Tanto m_a, m'_a son positivas.

Diremos que el choque es totalmente inelástico en S si la suma de las energí as cinéticas de los productos de la colisión toma el valor mí nimo compatible con la conservación de la energí a y el momentum.

a) Encontrar $m'_a, \vec{v'_a}$, para un choque totalmente inelástico.

b) Es el concepto de choque totalmente inelástico una noción invariante de Lorentz?

Sol:Definamos

$(a) K = \sum_a (E'_a - m'_a c^2) + \lambda_i \sum_a ({p'_a}^i - p_a^i) + \mu \sum_a (E'_a - E_a)$, $\lambda_i \, y \, \mu$ son multiplicadores de Lagrange.

Minimizando K respecto a los momentum finales , obtenemos

$$\frac{\partial K}{\partial {p'_b}^j} = {v'_b}^j + \lambda_j + \mu {v'_b}^j = 0$$

Esto es, todas las part$i$culas finales se mueven con la misma velocidad (velocidada del CM),

$${v'_b}^j = V^j$$

Reemplazando esta velocidad en los $v$inculos, se tiene:

$$M' = \sum m'_a = \frac{\sum E_a}{c^2 \gamma(V)}$$

$$V^i = \frac{c^2 \sum_a p_a^i}{\sum_a E_a}$$

(b) Estas ecuaciones se pueden escribir en forma covariante:

$$\boldsymbol{P} = (M' c\gamma(V), M'\gamma(V)V^i) = \sum_a P_a$$

Problema #2

a) Encuentre la generalización relativista de la fórmula de Larmor.

b) Muestre que la pérdida de energía por revolución de una partícula relativista de carga e y masa en reposo m, moviéndose con velocidad angular constante en una órbita circular de radio R es:

$$L = \frac{4\pi}{3} \frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2} \frac{r_0}{R} \mathrm{mc}^2 (\beta = \frac{v}{c})$$

$r_0 = e^2/m\,c^2$.

Sol:

a) Buscamos una generalización covariante para la fórmula de Larmor dada más abajo:

Pdt=dE, lo que implica que P es un invariante de Lorentz. Buscamos invariantes de Lorentz de la partícula.

P=$\frac{2e^2\vec{a}^{\,2}}{3c^3}$

$$= A\frac{\mathrm{dp}_\mu}{d\tau}\ \ \frac{\mathrm{dp}_\mu}{d\tau}$$

en el límite NR se tiene que:

$\frac{\mathrm{dp}_\mu}{d\tau} = m(\vec{a}\,, 0)$, así que $P = \mathrm{Am}^2\vec{a}^{\,2}$ lo que implica,

$$A = \frac{2e^2}{3m^2c^3}$$

b)

$$p_\mu = m(\gamma\vec{v}\,, \mathrm{ic}\gamma)$$

Si suponemos que ω es constante,

$$v = \omega R$$

es constante, lo mismo que γ. Se tiene

$$P = \mathrm{Am}^2\gamma^4(v^2/R)^2$$

El período es

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi R}{v}$$

La pérdida de energía por revolución es:

$$L = \mathrm{PT} = \mathrm{Am}^2\gamma^4 2\pi v^3/R = 4\pi\beta^3\gamma^4\frac{e^2}{3R} = \frac{4\pi}{3}\frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2}\frac{e^2}{R}$$

Problema #3 4049

Considere un dipolo eléctrico oscilante $\mathbf{P}$(t). Este crea campos electromágneticos de radiación:

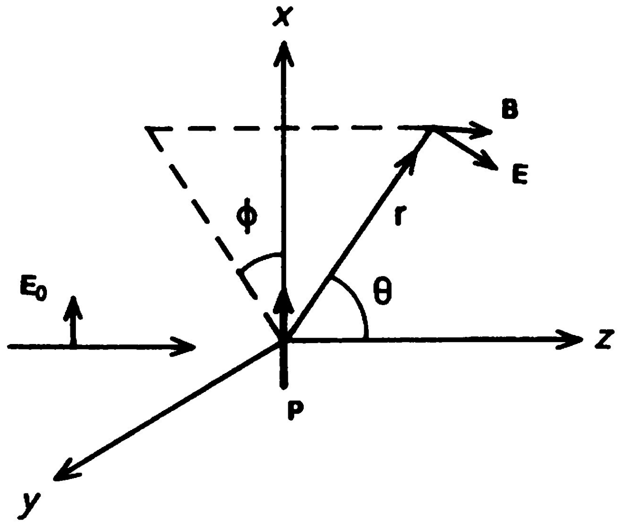
$$\boldsymbol{B}(r,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\qquad \hat{\boldsymbol{r}} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}(t - \frac{r}{c})$$
$$\boldsymbol{E}(r,t) = -c\ \ \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}(r,t)$$

(a) Una carga q situada en el origen es acelerada por una onda electromagnética plana linealmente polarizada de frecuencia ω y de amplitud del campo eléctrico $\boldsymbol{E}_0$. Encuentre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

R:

$$m\,\ddot{x} = qE_0e^{-i\omega t}, x = A\,e^{-i\omega t}, -A\omega^2 m = q\,E_0, A = -\frac{q\,E_0}{m\omega^2}$$
$$\boldsymbol{P} = q\,x(t)\hat{x} = -\frac{q^2\,E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}\hat{x}$$
$$\boldsymbol{B}(r,t) = -\frac{\mu_0 q^2 E_0}{4\pi r\,c m}\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{x}e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})},\quad \boldsymbol{E}(r,t) = \frac{\mu_0 q^2 E_0}{4\pi r\,m}e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{x})$$
$$\varepsilon_{ijk}r_j\varepsilon_{klm}r_l\delta_{m1} = (\delta_{il}\delta_{j1} - \delta_{i1}\delta_{jl})r_jr_l = r_ir_1 - \delta_{i1},$$
$$\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{x}) = \hat{r}\hat{r}_1 - \hat{x}$$

(b) Dibuje los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en un punto $\boldsymbol{r}$. Cuál es la polarización de los campos en este punto?



La onda emitida está linealmente polarizada en la dirección E.

(c) Encuentre la dependencia angular de la intensidad de radiación, usando los ángulos esféricos θ y ϕ, donde el eje z es en la dirección de propagación de la onda incidente y el eje x es en la dirección de polarización de la onda incidente.

R:

$$<S>=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^*\times H)=-\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}((\hat{r}\times B^*)\times B)$$

$(C_1 \times C_2) \times C_3 = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}C_{1l}C_{2m}C_{3k} = -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})C_{1l}C_{2m}C_{3k} = -C_1(C_2.C_3) + C_2(C_1.C_3), <S>=\frac{c}{2\mu_0}\hat{r}\,|B|^2$

$$I=\frac{c}{2\mu_0}|B|^2=(\frac{\mu_0 q^2 E_0}{4\pi r cm})^2\frac{c}{2\mu_0}(\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{x})^2=(\frac{\mu_0 q^2 E_0}{4\pi r cm})^2\frac{c}{2\mu_0}(\mathrm{sen}(\theta)^2\mathrm{sen}(\phi)^2+\cos(\theta)^2)$$

Indic.: La velocidad de q es pequeña. Sólo considere el efecto del campo eléctrico.

PUEDEN USAR LOS APUNTES DE CLASES

Tiempo: 3 horas

$$P=\frac{2e^2\vec{a}^2}{3c^3}$$
$$S=\frac{c|E|^2}{4\pi}$$