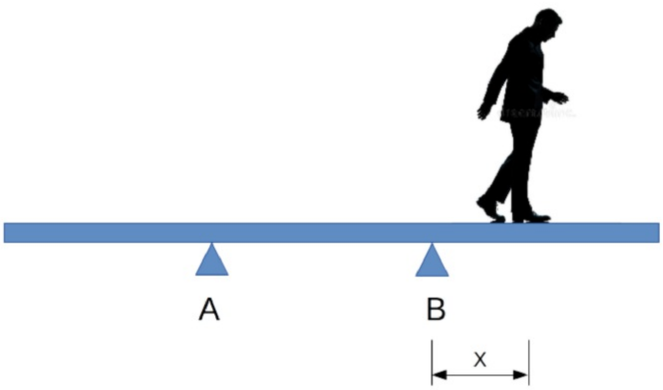
Problema 1: Una viga de madera de largo $L=6\,m$ y masa $M=80\,kg$ se encuentra apoyada en dos topes ubicados a $1/3$ y $2/3$ de L, medido desde uno de sus lados. Sobre la viga se encuentra una persona de masa $m=70\,kg$ a una distancia x medida desde el tope **B**. Si el momento de inercia de una barra medida desde un eje perpendicular a la barra, y que pasa por el centro es $I=\frac{1}{12}ML^2$, se pide que:

1. Determine el momento de inercia de la barra (solamente de la barra, sin la persona encima), medida desde un eje perpendicular a la barra y que pasa por el punto de apoyo **B**. (2 ptos)

2. Determine el momento de inercia de la barra y la persona (con respecto al eje que pasa por el punto B), si ésta se encuentra a una distancia x (medida desde el punto de apoyo **B**), tal como se muestra en la figura. Considere a la persona como una masa puntual. (2 ptos)

3. Determine la distancia x máxima (x_{max}) a la que se puede parar la persona sin que la barra vuelque. (2 ptos)



Sol:

$$I_a = I_{\text{CM}} + M(L/2 - 2L/3)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{36}ML^2 = \frac{1}{9}ML^2 = \frac{1}{9}80\,(6)^2 = 320\text{kg} - m^2$$

$$I_b = \frac{1}{9}ML^2 + mx^2$$

$$\tau = mgx - Mg(2L/3 - L/2) + N_A(2L/3 - L/3) = 0$$

$$m\,g + Mg - N_A - N_B = 0$$

$$x = \frac{L\,Mg - 2\,L\ N_A}{6\,g\,m}$$

El hombre está a punto de caer si $N_A = 0$, $x_{\text{máx}} = \frac{L\,M}{6\,m} = \frac{6\,80}{6\,70} = 1.14m$

Problema 2

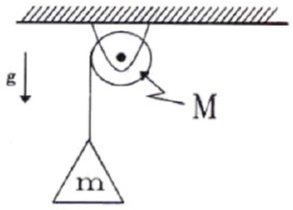
Un objeto de masa $m=20\,$kg. está colgado de una cuerda alrededor de un cilindro sólido circular de masa $M=5$kg. y radio R=10cm. La cuerda no resbala sobre el cilindro y ésta gira con respecto a su centro sin roce.

a). Enuncie la segunda ley de Newton para el cilindro y la masa m. (2 ptos.)

b). Obtenga la tensión de la cuerda y la aceleración de la masa m. (3 ptos.)

c). Determine la aceleración angular del cilindro. (1 pto.)

El momento de inercia I del cilindro corresponde a $I=\frac{1}{2}MR^2$



Sol:

$$
\begin{aligned}
mg - T &= ma \\
TR &= I\alpha, \qquad \alpha = \frac{a}{R} \\
T &= \frac{I}{R^2} a \\
mg &= \left(\frac{I}{R^2} + m\right) a \\
a &= \frac{m}{\frac{I}{R^2} + m} g = \frac{m}{\frac{M}{2} + m} g \qquad = 8.7 m/s^2 \\
T &= \frac{M}{2} \frac{m}{\frac{M}{2} + m} g \qquad = 21.7 N \\
\alpha &= \frac{m}{\frac{M}{2} + m} \frac{g}{R} \quad = 87.1 \text{rad}/s^2
\end{aligned}
$$

Problema 3 Considere el sistema Tierra-Luna. La Luna gira hoy en torno al centro de la Tierra en una órbita circular de radio $r = 384400$km. La masa de la Luna es $m = 7.349 \times 10^{22}$ kg. Actualmente, la Luna gira una órbita completa en 27 días. La masa de la Tierra es $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg. La Tierra es una esfera de radio $R = 6371$ km. Considere a la Luna como una masa puntual.

a) Calcule la velocidad angular de la Tierra hoy.(1pto.)

b) Calcule el momentum angular de la Luna hoy.(1pto.)

c) Encuentre el momentum angular total del sistema Tierra-Luna hoy.(1pto.)

d) Hace 4000 millones de años el día terrestre duraba 6 horas. Encuentre la velocidad angular de la Tierra en esa época.(1pto.)

e) A qué distancia de la Tierra estaba la Luna hace 4000 millones de años?(2ptos.)

En e) use que $\Omega^2 d^3$ es independiente del tiempo, donde Ω es la velocidad angular de la Luna, situada a una distancia d del centro de la Tierra.

Momento de inercia de una esfera:$\frac{2}{5} M R^2$.

Sol:

a)

$$\omega_h = \frac{2\pi}{T_h} = \frac{2\pi}{24\,60\,60} = 7.27 \times 10^{-5} \text{rad}/s$$

b)

$$L_L = m r^2 \omega_L = m r^2 \frac{2\pi}{T_l} = 7.349\,10^{22}\,(384400\,10^3)^2 \frac{2\pi}{27\,24\,60\,60} = 2.925 \times 10^{34} \text{kg}\, m^2/s$$

c)

$$L_T = I\omega_h = \frac{2}{5}MR^2\omega_h = \frac{2}{5}\,5.972\,10^{24}\,(6371\,1000)^2\,7.27\,10^{-5} = 7.049\times 10^{33}\text{kg}\,m^2/s$$
$$L = L_T + L_L = 3.630\times 10^{34}\text{kg}\,m^2/s$$

d)

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{6\,60\,60} = 29.08\times 10^{-5}\text{rad}/s$$

e)

$$L = I\omega_a + m r_a^2 \omega_{La}, \quad \text{conservaci'on de momentum angular}$$
$$\text{Tercera Ley de Kepler:} \qquad r_a^3\omega_{La}^2 = r^3\omega_L^2$$
$$\omega_{La} = \omega_L\left(\frac{r}{r_a}\right)^{3/2}$$
$$L = I\omega_a + m r_a^2\omega_L\left(\frac{r}{r_a}\right)^{3/2} = I\omega_a + m r^2\omega_L\sqrt{\frac{r_a}{r}}$$
$$r_a = r\left[\frac{L - I\omega_a}{m r^2\omega_L}\right]^2 = 2.949\times 10^7 m = 29490\text{km}$$

Problema 4

El astronauta A tiene un pendulo (masa $m_A = 1$ kg, cuerda $r = 1/2$ m) y
el astronauta B tiene un resorte (masa $m_B = 1$ kg, constante de resorte $k = 20\ \frac{N}{m}$)

1. En la tierra ($g_T = 9.8\ \frac{m}{s^2}$): encuentre la frecuencia (f) y el periodo (T) de ambos dispositivos. (2ptos.)

2. En la tierra: Asumiendo que en el tiempo $t = 0$ el ángulo inicial del pendulo es $\alpha_A = 5$ grados, y el desplazamiento inicial del resorte es $x_B = 3$ cm. Encuentre la energía cinetica de las masas m_A y m_B en el tiempo $t = T/4$.(2ptos.)PARTEN DEL REPOSO.

3. En marte ($g_M = 3.7\ \frac{m}{s^2}$): Los astronautas **A** y **B** usan sus dispositivos para cronometrizar la duración de su paseo en el planeta como cien veces el período. Quién termina su paseo antes y por cuánto? (2ptos.)

Sol:

1.

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.42s,\ f = \frac{1}{T} = 0.7\,\text{Hertz}$$
$$T_{\text{res}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.4\,s,\ f = 0.7\,\text{Hertz}$$

2. En $t = T/4$ pasa por el mínimo de la energía potencial

$$E_p = \frac{1}{2}m_A\,l^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_A\,gl\theta^2 = \frac{1}{2}m_A\,gl\theta_0^2 = \frac{1}{2}m_A\,l^2\omega_1^2 = K_p$$
$$K_p = \frac{1}{2}m\,g\,l\,(5\,\pi/180)^2 = 0.019J$$
$$E_r = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$
$$K_{\text{res}} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\,20\,9\,10^{-4} = 9\times 10^{-3}J$$

3.

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2.31s$$

Astronauta A pasea 231s;Astronauta B pasea 140s