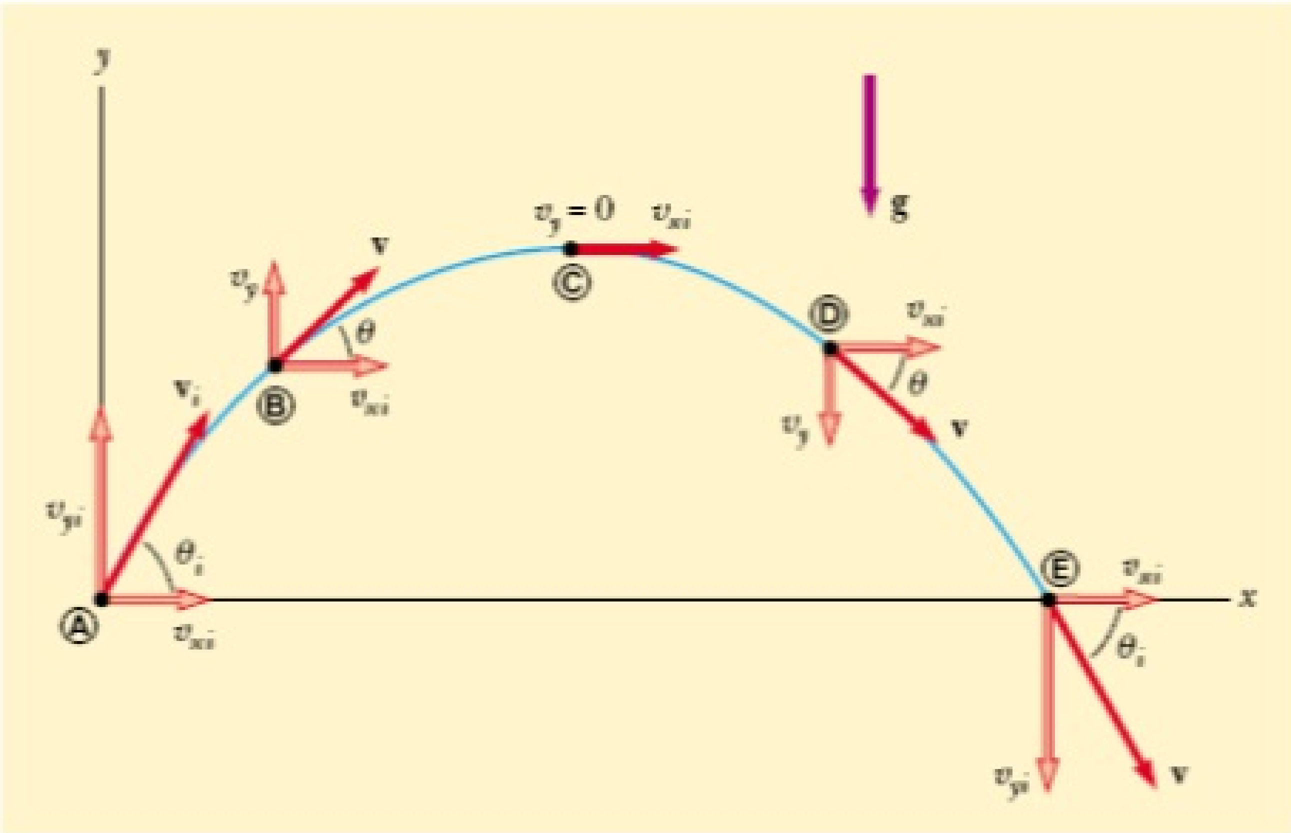
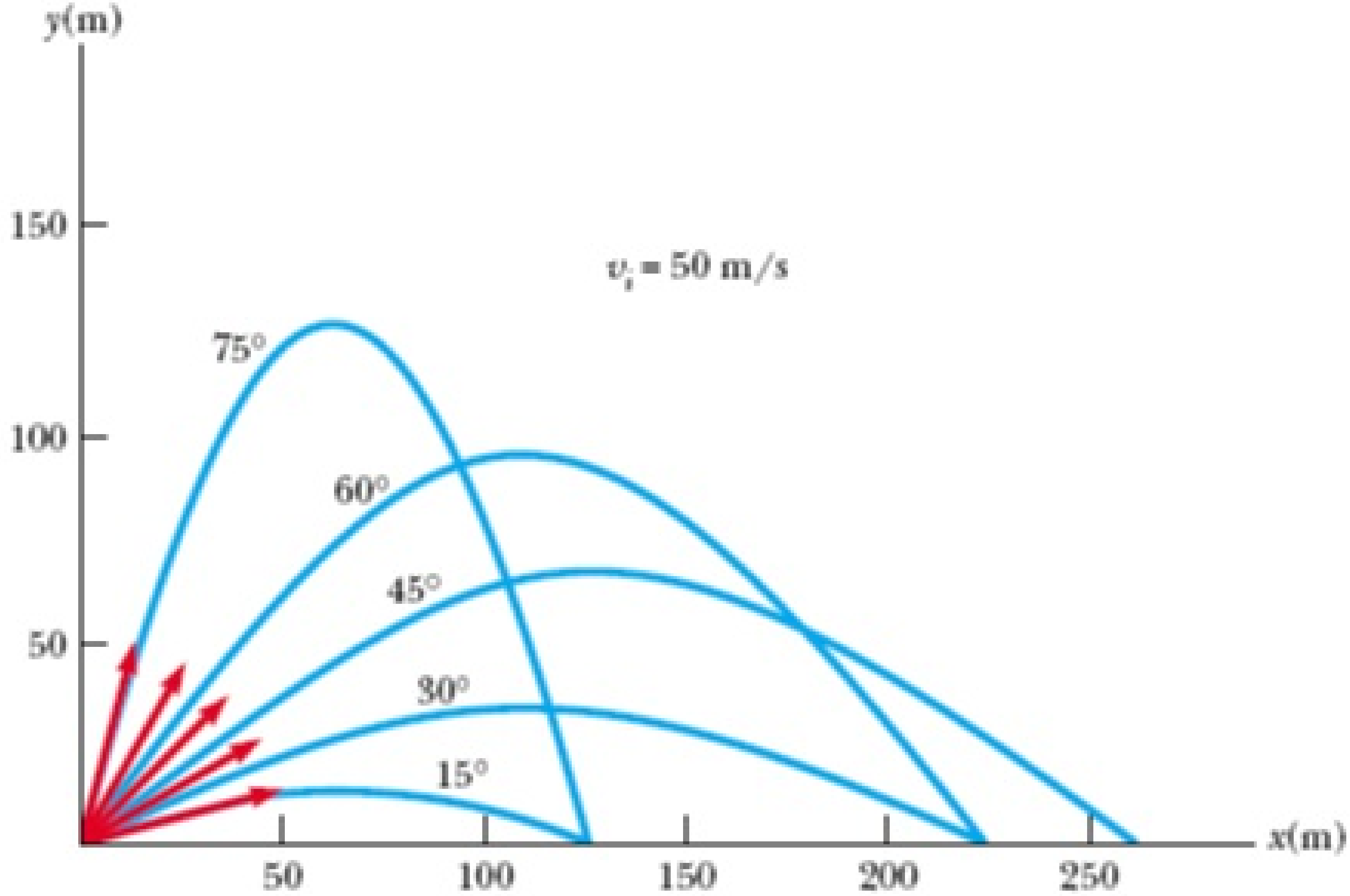
Tiro Parabólico

Cuando lanzamos un cuerpo con una velocidad que forma un ángulo con la horizontal, éste describe una trayectoria parabólica. En su obra Dialogo sobre los Sistemas del Mundo (1633), Galileo Galilei expone que el movimiento de un proyectil puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado.




y(m)
150
100
50
$v_i = 50$ m/s
75°
60°
45°
30°
15°
50
100
150
200
250
x(m)

ACELERACION CONSTANTE

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

Hemos seleccionado el punto de salida como origen de coordenadas. Si la velocidad de salida es v_0 y el ángulo es ϕ_0, tendremos que las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \cos\ \phi_0 \qquad v_{0y} = v_0 \,\mathrm{sen}\, \phi_0$$

Y las propiedades cinemáticas del cuerpo en cualquier instante (t) de su movimiento son:

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
posición	$x = v_{0x}\,t$	$y = v_{0y}t - (1/2)gt^2$

Observa que la aceleración no depende del tiempo (es constante), pero la velocidad y la posición del móvil sí que dependen del tiempo. En el tiro parabólico son de interés la altura máxima y el alcance (o desplazamiento horizontal) conseguido.

La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical v_y de la velocidad se hace cero. Como $v_y = v_{0y} - gt$, se alcanzará la altura máxima cuando $t = v_{0y} / g$. Utilizando estos datos llegarás fácilmente a la conclusión de que el valor de la altura máxima es:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

El móvil estará avanzando horizontalmente a la velocidad constante v_{0x} durante el tiempo de vuelo, que será $2t$ (siendo t el tiempo en alcanzar la altura máxima) ya que el móvil tarda lo mismo en subir que en bajar, por lo tanto el alcance es:

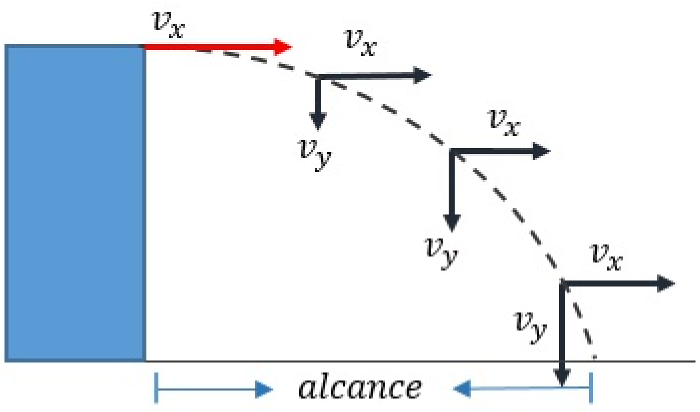
$$x_{\max} = 2 v_{0x} t$$

es decir

$$\text{alcance} = x_{\max} = (v_0^2 / g) \operatorname{sen} 2\phi_0$$

Tiro Horizontal

El movimiento que realiza la moto en la siguiente imagen es una rama de parábola y se llama tiro horizontal.



Si la velocidad de salida es v_0, tendremos que las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \qquad v_{0y} = 0$$

Como ocurría en el caso del tiro parabólico, este movimiento puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado. Las propiedades cinemáticas del cuerpo en cualquier instante (t) de su movimiento son:

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_0$	$v_y = -gt$
posición	$x = v_0 t$	$y = h - (1/2)gt^2$

Combinando las ecuaciones podemos llegar a la conclusión de que el tiempo de vuelo es:

$$t = \sqrt{(2h/g)}$$

y por lo tanto el desplazamiento horizontal alcanzado es:

$$x_{\max} = v_0 \sqrt{(2h/g)}$$

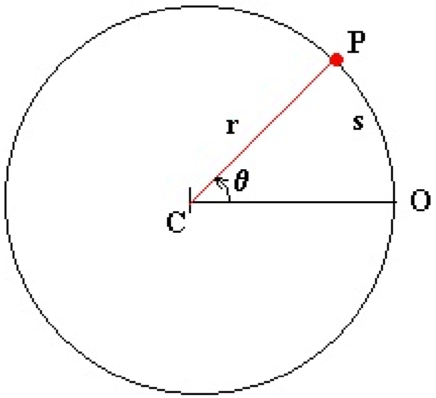
Observa que el tiempo de vuelo no depende de la velocidad, sino de la altura y del valor de la gravedad.

1 Movimiento Circular

En esta sección, vamos a definir las magnitudes características de un movimiento circular, análogas a las ya definidas para el movimiento rectilíneo.
Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

2 Posición angular, θ

En el instante t el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.



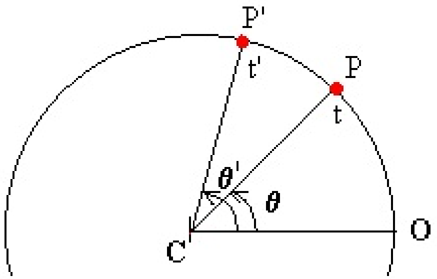
El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco s y el radio de la circunferencia r,

$$\theta = s/r$$

La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones. Se mide en radianes.

3 Velocidad Angular, ω

En el instante t' el móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo θ '. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta = \theta' - \theta$ en el intervalo de tiempo Δt=t'-t comprendido entre t y t'.



Se denomina velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento y el tiempo:

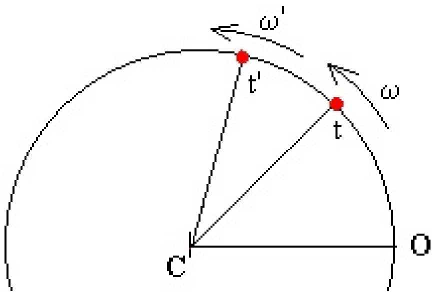
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

4 Aceleración angular, α

Si en el instante t la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t' la velocidad angular del móvil es ω'. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega = \omega' - \omega$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ comprendido entre t y t'.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

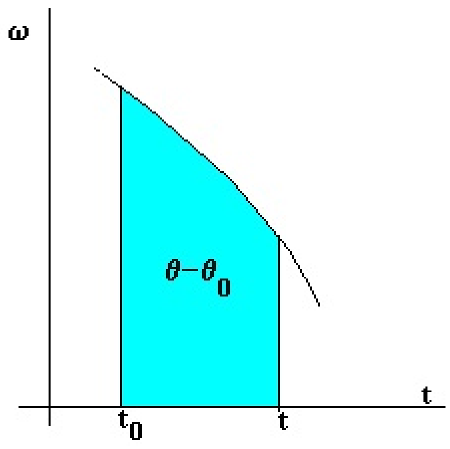
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

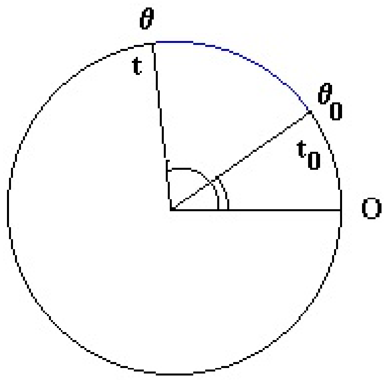
5 Dada la velocidad angular, hallar el desplazamiento angular

Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta - \theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

El producto ωdt representa el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t y t+dt, o en el intervalo dt. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos angulares infinitesimales entre los instantes t_0 y t.
En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad angular en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento angular total del móvil entre los instantes t0 y t, el arco en color azul marcado en la circunferencia.



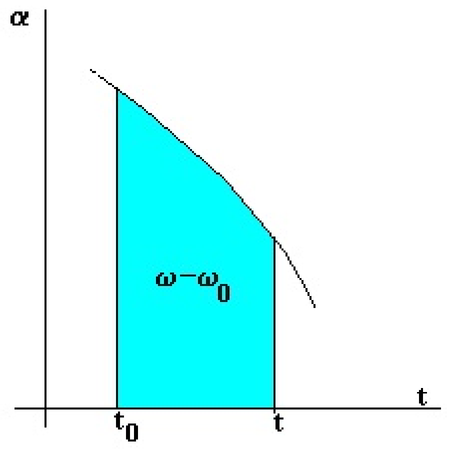


Hallamos la posición angular θ del móvil en el instante t, sumando la posición inicial θ_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva $\omega - t$ o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

6 Dada la aceleración angular, hallar la velocidad angular

Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular w en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad w -w0 que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de una gráfica de la aceleración angular en función del tiempo.

$$\omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt$$

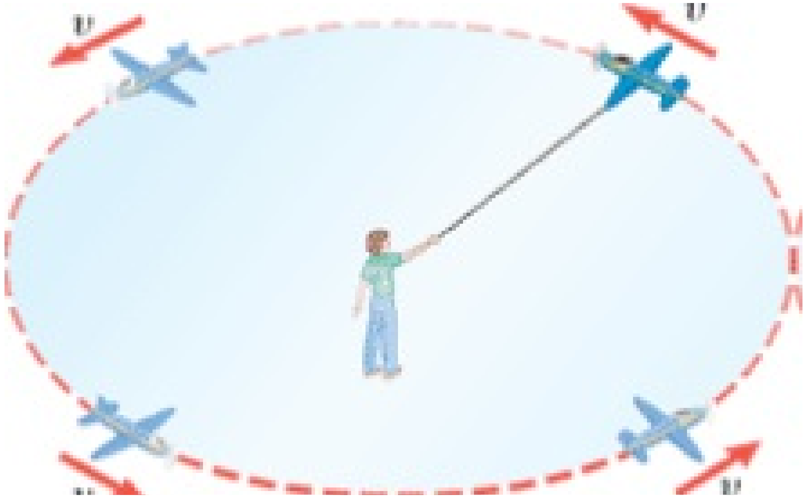


En la figura, el cambio de velocidad $\omega - \omega_0$ es el área bajo la curva $\alpha - t$, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$, y el valor inicial ω_0 en el instante inicial t_0, podemos calcular la velocidad angular ω en el instante t.

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento circular son similares a las del movimiento rectilíneo.

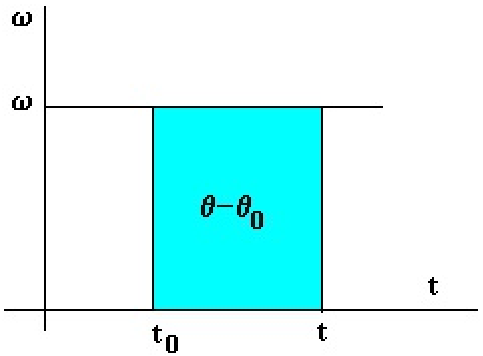
7 Movimiento circular uniforme



Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero. La posición angular θ del móvil en el instante t lo podemos calcular integrando

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

o gráficamente, en la representación de ω en función de t.



Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

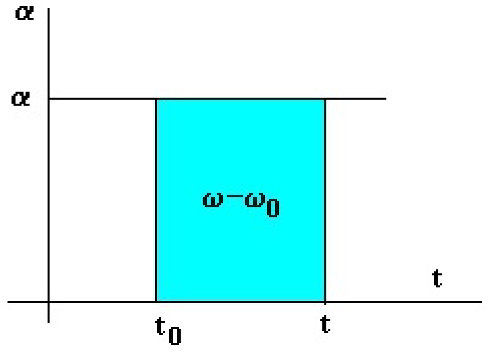
$$\alpha = 0 \qquad \omega = \text{constante} \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

8 Movimiento circular uniformemente acelerado

Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración a es constante.

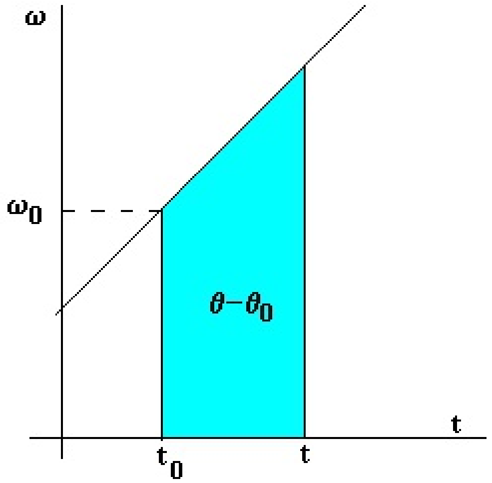
Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$



Dada la velocidad angular ω en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento $\theta-\theta_0$ del móvil entre los instantes t0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$\theta-\theta_0=\omega(t-t_0)+\frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$



Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

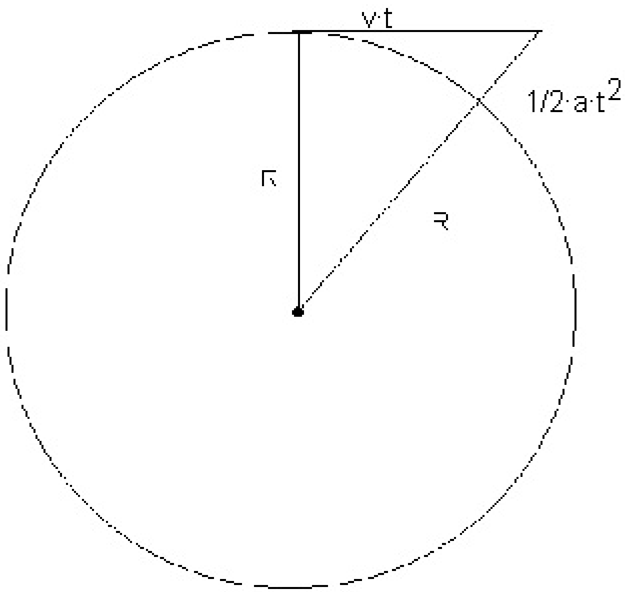
$$\alpha = \text{constante} \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento $\theta - \theta_0$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

9 Aceleración Centrípeta

Veamos qué aceleración es necesaria para mantener a un cuerpo girando alrededor de un punto sin que tienda a ser expelido por la rotación de éste.



Y del triángulo de la figura obtenemos:

$$(R + \frac{1}{2}at^2)^2 = R^2 + v^2t^2$$

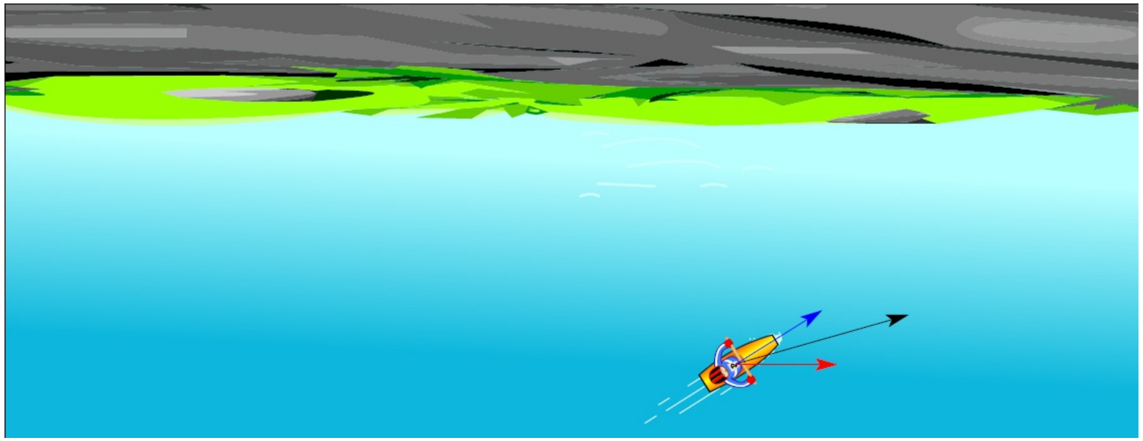
Puesto que esta aproximación es válida sólo para tiempos muy pequeños, podemos despreciar el término que contiene a t^4 y obtener finalmente que:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

La expresión de arriba es la aceleración necesaria para mantener un objeto describiendo una circunferencia de radio R con una velocidad v, y más conocida como aceleración centrípeta.

10 Composición de Movimientos. Movimiento Relativo

Vamos a suponer que deseamos cruzar un río con una moto de agua que se mueve a velocidad constante.



Si ponemos el timón en la dirección del punto de destino, no llegaremos a éste porque la corriente nos irá arrastrando mientras avanzamos hacia la otra orilla.
Si observas con detenimiento llegarás a la conclusión de que conseguiremos llegar a nuestro destino cuando la componente X de la velocidad del bote sea de igual valor pero de sentido contrario a la componente X de la velocidad del río (que es su única componente).
Lógicamente esto lo hacemos con el timón, poniendo un ángulo de navegación que contrarreste la velocidad del río, es decir navegando un poco a contracorriente.

Podemos decir que la moto de agua tiene simultáneamente un movimiento de avance hacia la otra orilla, producido por el motor, y otro movimiento de arrastre, producido por la corriente. Esto equivale a decir que el movimiento de la moto es la composición de los movimientos de .avance y arrastre.

Ambos movimientos son uniformes (de velocidad constante) y, como consecuencia, el movimiento resultante también lo es.

Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "El tiempo que se tarda en cruzar el río no depende de la corriente".

En general se tiene la siguiente situación. Consideremos dos sistemas de referencia inerciales S y S'. S se mueve respecto a S' con velocidad $\vec{u}$. Las posición de una partícula respecto a S es $\vec{x}$ y respecto a S' es $\vec{x}'$. Los tiempos medidos en $S(S')$ son $t(t$'). Se tiene que:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{u}\, t, \quad t' = t$$

Esta es la transformación de Galileo entre dos sistemas inerciales.

Si consideramos los cambios de posición en los dos sistemas de referencia, encontramos la regla de suma de velocidades de Galileo:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$$

El ejemplo del bote atravesando un río, en presencia de una corriente, es un caso particular de la regla de suma de velocidades.