1 Trabajo

$$W = \vec{F}.\Delta\vec{x}$$

$\vec{F}$: Fuerza aplicada, $\Delta\vec{x}$ es el desplazamiento.
Usando la Segunda Ley de Newton:

$$W = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta\vec{x} = m\Delta\vec{v}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = m\vec{v}.\Delta\vec{v} = \Delta(\frac{1}{2}m\,\vec{v}^2) = \Delta K\,,$$

Teorema del Trabajo y la Energía

K es la energía cinética.

2 UNIDAD DE ENERGIA: 1JOULE=1J=1 N M

Si (Fuerza Conservativa):

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}, F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y}, F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

se obtiene:

$$W = -\Delta U = \Delta K, \Delta(K + U) = 0$$

Por lo tanto se conserva la energía mecánica:

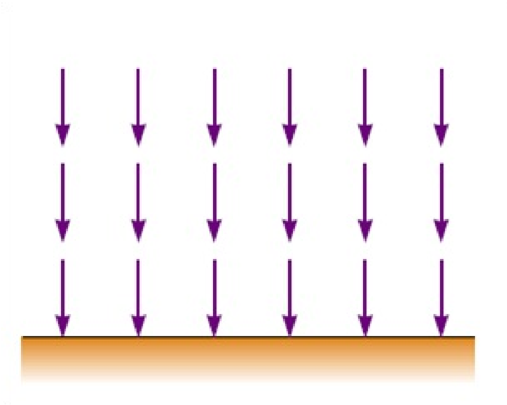
$$E = K + U$$

U es la Energía Potencial correspondiente a la fuerza F.
Si hay varias fuerzas actuando sobre el cuerpo, la energía mecánica es:

$$E = K + \sum_i U_i$$

Esto constituye el PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA.
E no se conserva si actúan fuerzas no-conservativas, como el roce. Para obtener la forma general del Principio de Conservación de la Energía es necesario considerar el intercambio de calor, que constituye otra forma de energía.

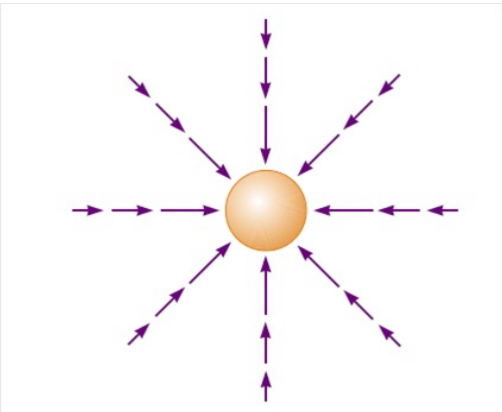
3 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

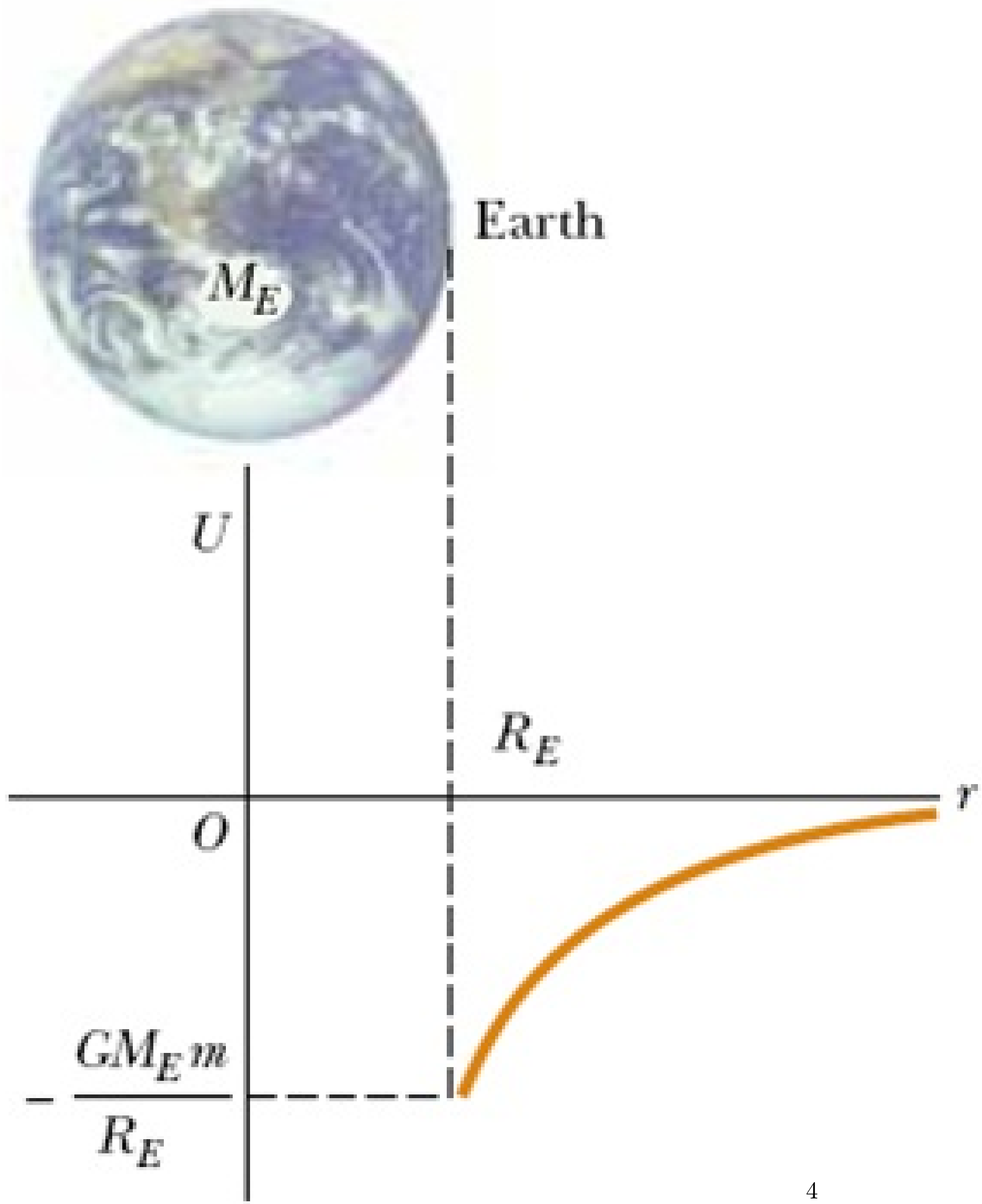


$$U = mgh$$

4 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, U(\infty) = 0$$




Earth
M_E
U
R_E
r
O
$-\frac{GM_E m}{R_E}$

5 Energía Total de una masa m en un campo gravitacional generado por una masa M

$$E = K + U$$

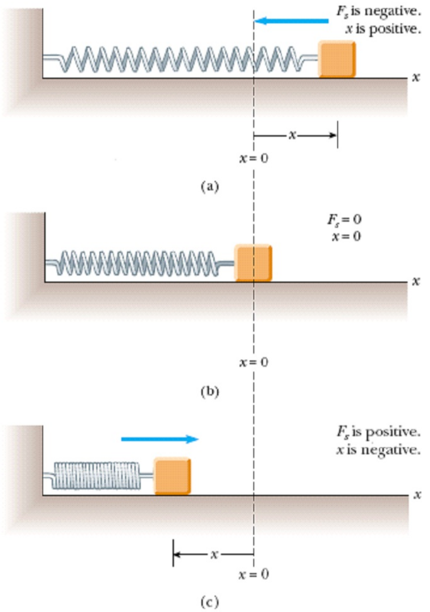
$$E = \frac{1}{2} m\, \vec{v}^2 - \frac{G M m}{r} \qquad , G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N m^2}{\mathrm{kg}^2}$$

6 Energía del Resorte

Ley de Hooke:

$$F = -kx$$

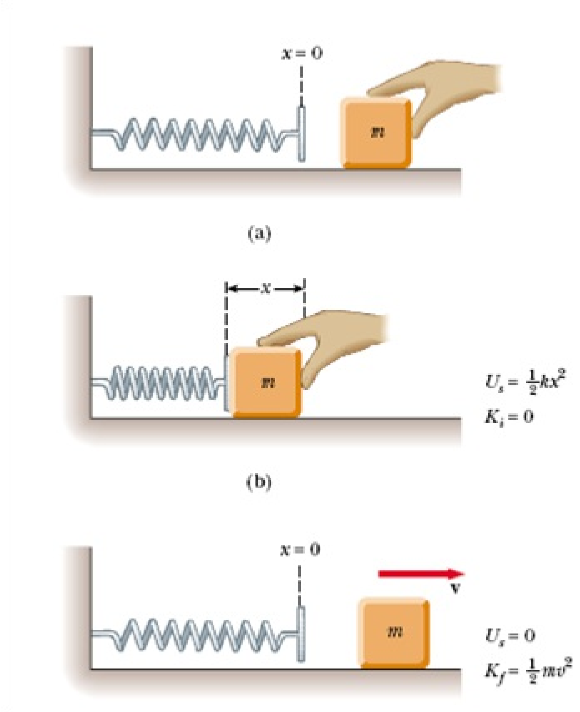
k: constante del resorte.
x :desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio.



La fuerza del resorte es conservativa.

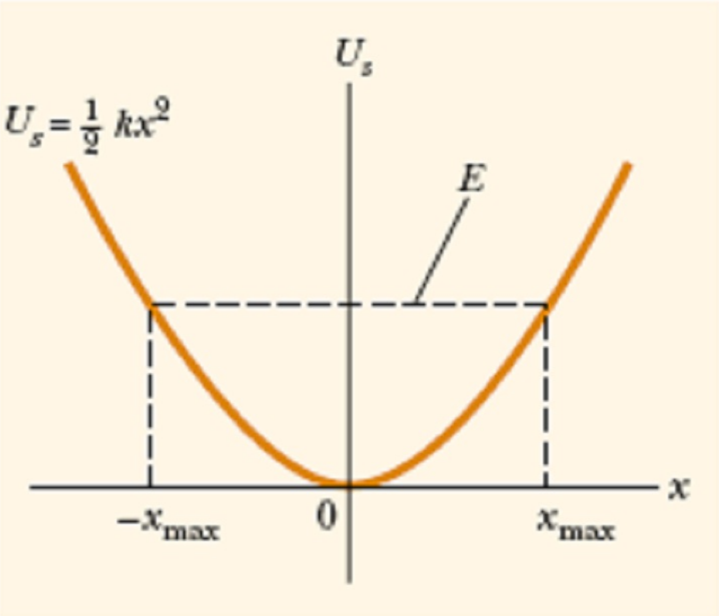
7 ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



Energía Total de m en un resorte de constante k

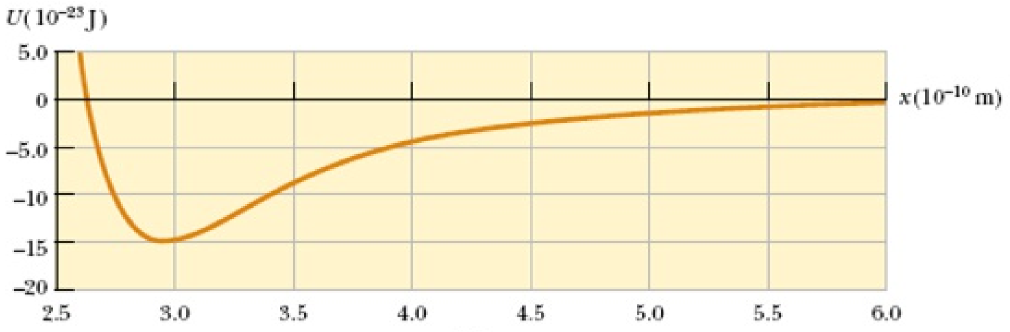
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



U_s
$U_s = \frac{1}{2} kx^2$
E
x
$-x_{max}$
0
x_{max}

8 Energía potencial entre átomos

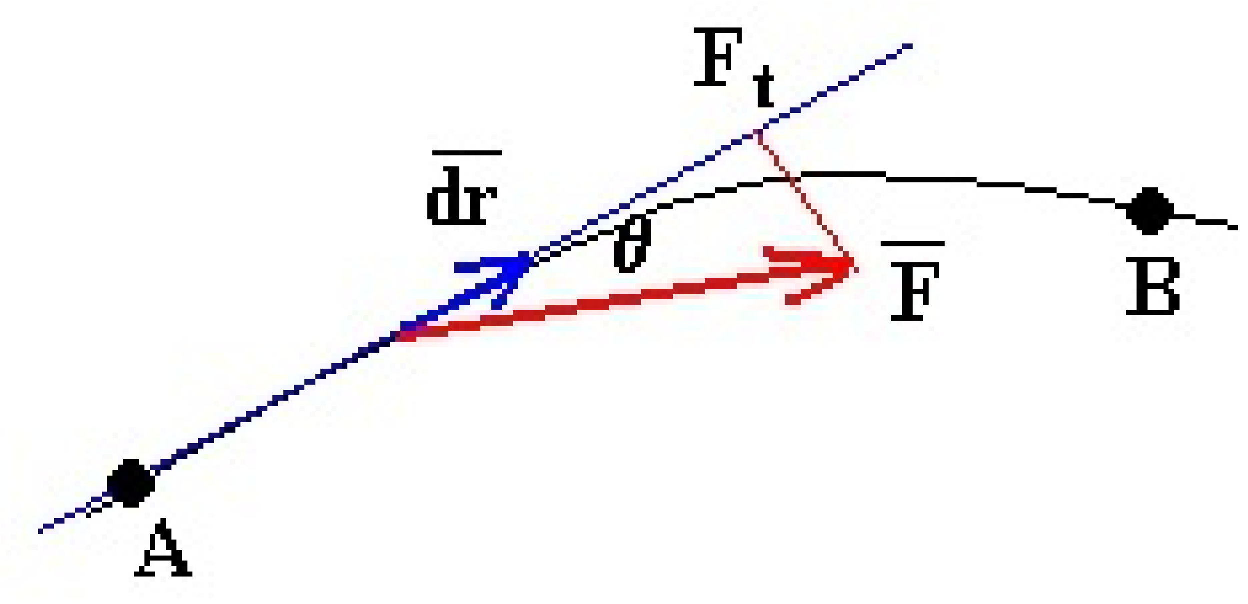
$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$



(a)

Concepto de trabajo

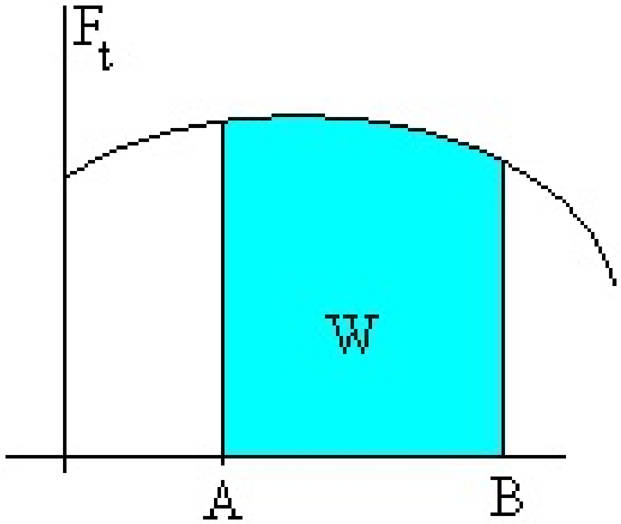
Se denomina trabajo infinitesimal, al producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.



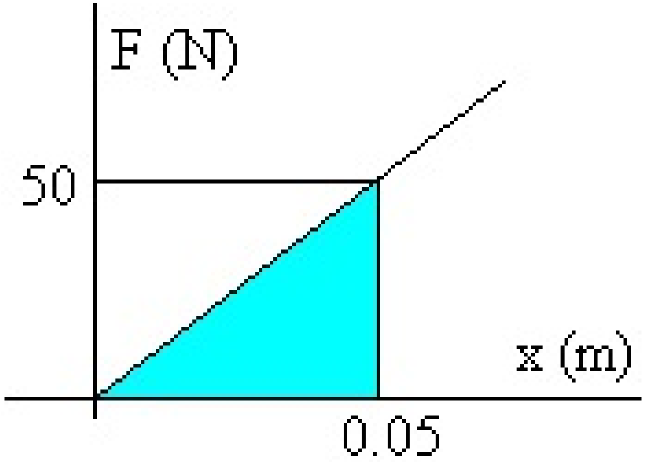
Donde F_t es la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento, ds es el módulo del vector desplazamiento dr, y q el ángulo que forma el vector fuerza con el vector desplazamiento.

El trabajo total a lo largo de la trayectoria entre los puntos A y B es la suma de todos los trabajos infinitesimales

Su significado geométrico es el área bajo la representación gráfica de la función que relaciona la componente tangencial de la fuerza Ft, y el desplazamiento s.



Ejemplo: Calcular el trabajo necesario para estirar un muelle 5 cm, si la constante del muelle es 1000 N/m.
La fuerza necesaria para deformar un muelle es F=1000x N, donde x es la deformación. El trabajo de esta fuerza se calcula mediante la integral

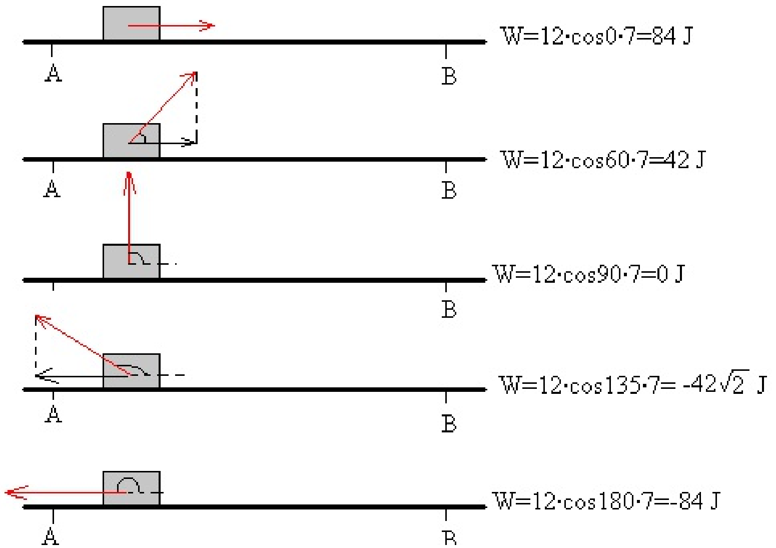


El área del triángulo de la figura es (0.05 . 50)/2=1.25 J

Cuando la fuerza es constante, el trabajo se obtiene multiplicando la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento por el desplazamiento.
W=Ft s

Ejemplo:

Calcular el trabajo de una fuerza constante de 12 N, cuyo punto de aplicación se traslada 7 m, si el ángulo entre las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son $0, 60, 90, 135, 180$ grados.



* Si la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo
* Si la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios, el trabajo es negativo
* Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo.

Concepto de energía cinética. Ejemplos

Supongamos que F es la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m. El trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la energía cinética de la partícula.

Ejemplo:

Hallar la velocidad con la que sale una bala después de atravesar una tabla de 7 cm de espesor y que opone una resistencia constante de F=1800 N. La velocidad inicial de la bala es de 450 m/s y su masa es de 15 g.

El trabajo realizado por la fuerza F es -1800×0.07=-126 J

La velocidad final v es

$$-126=\frac{1}{2}0.015v^2-\frac{1}{2}0.015\times 450^2\ v=431\frac{m}{s}$$

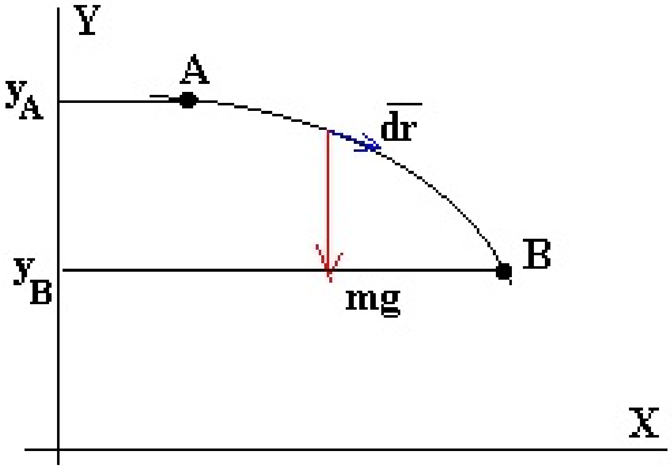
Fuerza conservativa. Energía potencial

Un fuerza es conservativa cuando el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una función que solo depende de las coordenadas. A dicha función se le denomina energía potencial.

El trabajo de una fuerza conservativa no depende del camino seguido para ir del punto A al punto B.

El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de un camino cerrado es cero.

El peso es una fuerza conservativa
Calculemos el trabajo de la fuerza peso F=-mg j cuando el cuerpo se desplaza desde la posición A cuya ordenada es yA hasta la posición B cuya ordenada es yB.

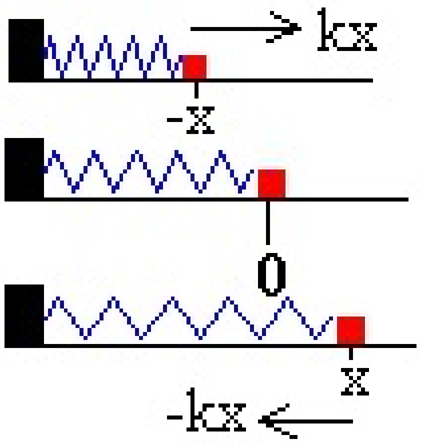


La energía potencial Ep correspondiente a la fuerza conservativa peso tiene la forma funcional

$$U = mgy + c$$

Donde c es una constante aditiva que nos permite establecer el nivel cero de la energía potencial.

La fuerza que ejerce un resorte es conservativa



Como vemos en la figura cuando un resorte se deforma x, ejerce una fuerza sobre la partícula proporcional a la deformación x y de signo contraria a ésta. Para x>0, F=-kx

Para x<0, F=kx

El trabajo de esta fuerza es, cuando la partícula se desplaza desde la posición xA a la posición xB es

$$W = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

La función energía potencial U correspondiente a la fuerza conservativa F vale

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

El nivel cero de energía potencial se establece del siguiente modo: cuando la deformación es cero $x=0$, el valor de la energía potencial se toma cero, $U=0$, de modo que la constante aditiva vale $c=0$.

Principio de conservación de la energía

Si solamente una fuerza conservativa F actúa sobre una partícula, el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de la energía potencial

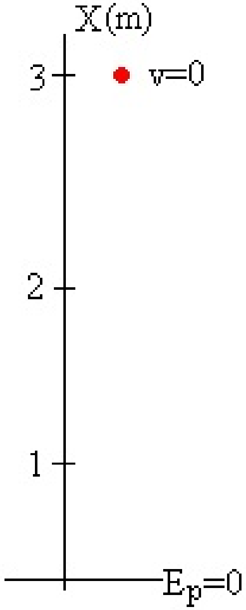
Como hemos visto en el apartado anterior, el trabajo de la resultante de las fuerzas que actúa sobre la partícula es igual a la diferencia entre el valor final e inicial de la energía cinética.

Igualando ambos trabajos, obtenemos la expresión del principio de conservación de la energía

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

La energía mecánica de la partícula (suma de la energía potencial más cinética) es constante en todos los puntos de su trayectoria.

Comprobación del principio de conservación de la energía



Un cuerpo de 2 kg se deja caer desde una altura de 3 m. Calcular

1.La velocidad del cuerpo cuando está a 1 m de altura y cuando llega al suelo, aplicando las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

2.La energía cinética potencial y total en dichas posiciones

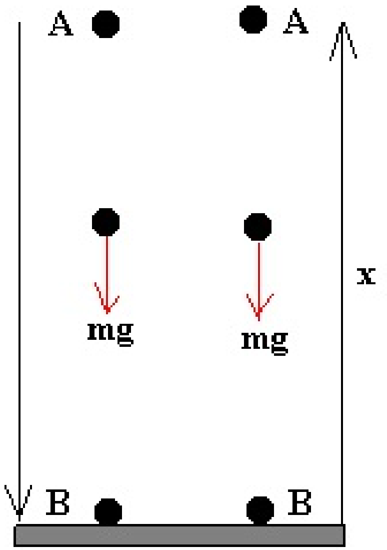
Tomar g=10 m/s2

Posición inicial x=3 m, v=0.
U=2·10·3=60 J, K=0, E_A=K+U=60 J
Cuando x=1 m
U=$2\cdot 10\cdot 1=20\,J\,, K=40, E_B=K+U=60\,J$
Cuando x=0 m
$U=2\cdot 10\cdot 0=0\,J\,, K=60, E_C=K+U=60\,J$
La energía total del cuerpo es constante. La energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta.

Fuerzas no conservativas

Para darnos cuenta del significado de una fuerza no conservativa, vamos a compararla con la fuerza conservativa peso. El peso es una fuerza conservativa.

Calculemos el trabajo de la fuerza peso cuando la partícula se traslada de A hacia B, y a conti-nuación cuando se traslada de B hacia A.

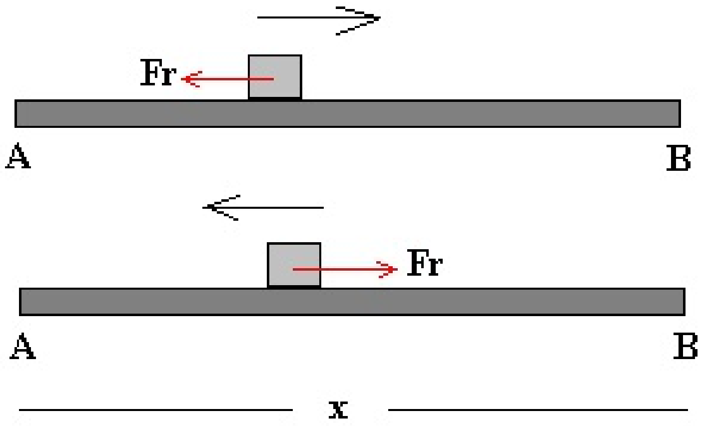


$W_{\mathrm{AB}} = mgx$

$W_{\mathrm{BA}} = -mgx$

El trabajo total a lo largo el camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es cero.

La fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa



Cuando la partícula se mueve de A hacia B, o de B hacia A la fuerza de rozamiento es opuesta al movimiento, el trabajo es negativo por que la fuerza es de signo contrario al desplazamiento. $W_{\mathrm{AB}} = -\mathrm{Fr}\, x$
$W_{\mathrm{BA}} = -\mathrm{Fr}\, x$
El trabajo total a lo largo del camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es distinto de cero
$W_{\mathrm{ABA}} = -2\mathrm{Fr}\, x$

Balance de energía

En general, sobre una partícula actúan fuerzas conservativas Fc y no conservativas Fnc. El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la diferencia entre la energía cinética final menos la inicial

$$W_c + W_{\mathrm{nc}} = K_B - K_A$$

El trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y la final

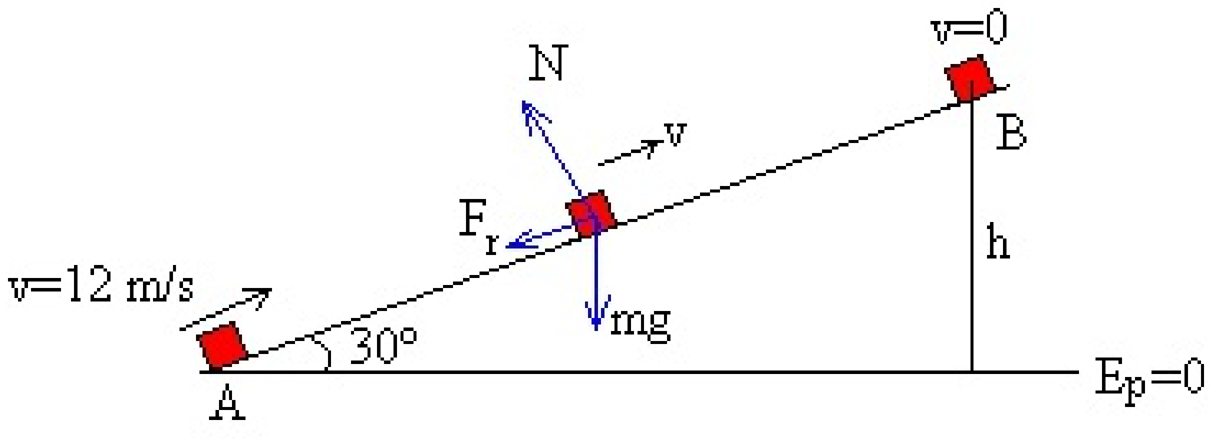
$$W_c = U_A - U_B$$

Obtenemos que

$$W_{\mathrm{nc}} = K_B - K_A - U_A + U_B = E_B - E_A$$

El trabajo de una fuerza no conservativa modifica la energía mecánica (cinética más potencial) de la partícula.

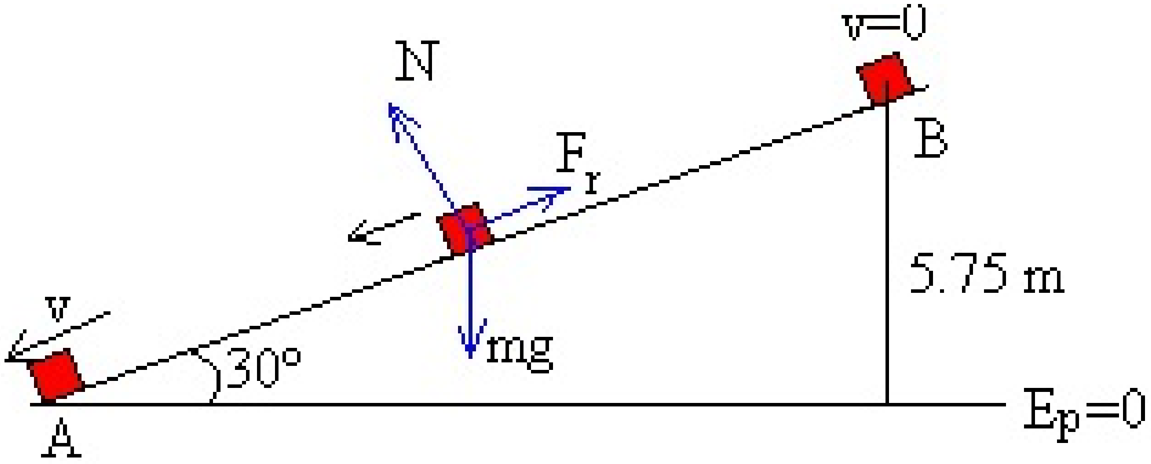
Ejemplo 1:
Un bloque de masa 0.2 kg inicia su movimiento hacia arriba, sobre un plano de 30° de inclinación, con una velocidad inicial de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0.16.



Determinar:
*La longitud x que recorre el bloque a lo largo del plano hasta que se para
*la velocidad v que tendrá el bloque al regresar a la base del plano
Cuando el cuerpo asciende por el plano inclinado
*La energía del cuerpo en A es $E_A = \frac{1}{2} 0.2 \cdot 12^2 = 14.4\,J$
*La energía del cuerpo en B es $E_B = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h = 0.98 \cdot x\,J$
*El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de A a B es
$W = -\mathrm{Fr} \cdot x = -\mu \cdot m\,g \cdot \cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot \cos 30 \cdot x = -0.272 \cdot x\,J$

De la ecuación del balance energético $W = E_B - E_A$, despejamos $x = 11.5\,m$, $h = x \cdot \mathrm{sen}30° = 5.75\,m$

Cuando el cuerpo desciende



*La energía del cuerpo en B es $E_B = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h = 0.98 \cdot x = 0.98 \cdot 11.5 = 11.28\,J$

*La energía del cuerpo en la base del plano $E_A = = \frac{1}{2} 0.2 \cdot v^2$

*El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de B a A es $W = -\mathrm{Fr} \cdot x = -\mu \cdot m g \cdot \cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot \cos 30 \cdot 11.5 = -3.12\,J$

De la ecuación del balance energético $W = E_A - E_B$, despejamos $v = 9.03 m/s$.

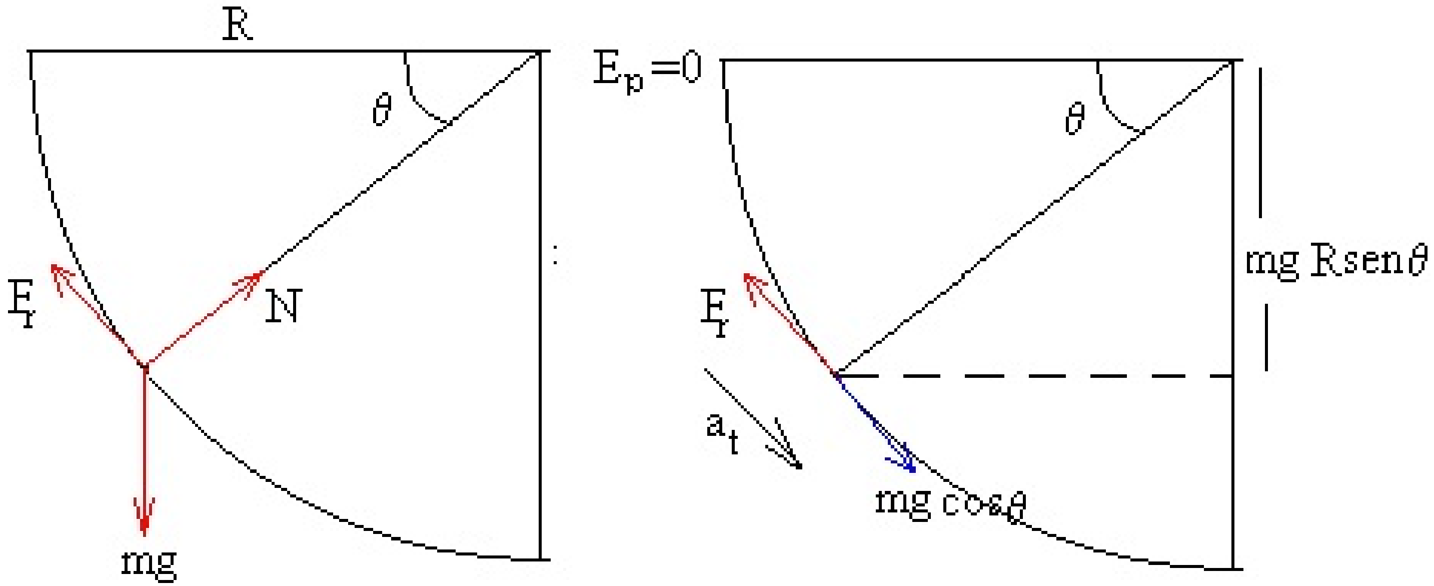
Ejemplo 2:
Una partícula de masa m desliza sobre una superficie en forma de cuarto de circunferencia de radio R, tal como se muestra en la figura.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:

*El peso mg

*La reacción de la superficie N, cuya dirección es radial

*La fuerza de rozamiento Fr, cuya dirección es tangencial y cuyo sentido es opuesto a la velocidad de la partícula.



Descomponiendo el peso mg, a lo largo de la dirección tangencial y normal, escribimos la ecuación del movimiento de la partícula en la dirección tangencial

$ma_t = mg \cdot \cos\theta - \mathrm{Fr}$
Donde a_t es la componente tangencial de la aceleración.
Calculamos el trabajo Wr realizado por la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento es de sentido contrario al desplazamiento.
El trabajo realizado por la fuerza no conservativa Fr vale

$$W_r = -mgR\,\mathrm{sen}\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

Si el móvil parte del reposo $v = 0$, en la posición $\theta = 0$. Cuando llega a la posición θ
*La energía cinética se ha incrementado en $mv^2/2$.
*La energía potencial ha disminuido en $mgR\,\mathrm{sen}\theta$.
El trabajo de la fuerza de rozamiento es igual a la diferencia entre la energía final y la energía inicial o bien, la suma de la variación de energía cinética más la variación de energía potencial.
El trabajo total de la fuerza de rozamiento cuando la partícula describe el cuarto de círculo es

$$W_r = -mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

9 POTENCIA

$$\mathrm{Potencia} = \frac{\mathrm{Trabajo}}{\mathrm{Tiempo}}$$

$$\mathrm{Potencia} = \frac{\mathrm{Energia\,que\,sale}\,o\,\mathrm{entra}}{\mathrm{Tiempo}}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

La unidad de potencia en MKS es el Watt:

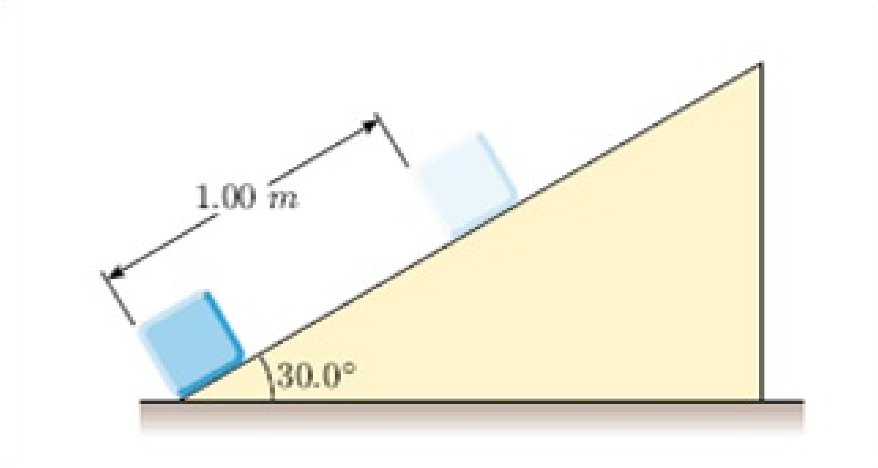
$$1W = 1J/s$$

10 EJEMPLOS ADICIONALES

1.-Calcule el trabajo que se realiza contra la gravedad al levantar un objeto de 3 kg a través de una distancia vertical de 40 cm. R: 12 J.

2.-Una escalera de 3 m de longitud que pesa 200 N tiene su centro de gravedad a 120 cm del nivel inferior. En su parte más alta tiene un peso de 50 N. Calcúlese el trabajo necesario para levantar la escalera de una posición horizontal, sobre el piso, a una vertical. R: 0.39 kJ.

3.-Una caja de 3 kg se desliza hacia abajo por una rampa que mide 1 m de largo y que está inclinada en un ángulo de 30° como se muestra en la figura. La caja inicia desde el reposo en la parte alta y experimenta una fuerza de roce constante de 5 N y continua moviéndose una corta distancia sobre el piso horizontal una vez que sale de la rampa. Use métodos de energía para determinar la rapidez de la caja en la parte inferior de la rampa. R: 2.54 m/s.



4.-Una esquiadora inicia desde el reposo en la parte más alta de una pendiente sin fricción de 20 m de altura. En la parte mas baja de la pendiente encuentra una superficie horizontal donde el coeficiente de roce cinético entre los esquís y la nieve es 0.21.¿Que distancia recorre ella en la superficie horizontal antes de detenerse, si no se impulsa con los bastones? R: 95.3 m

5.-Un automóvil de 1200 kg va cuesta abajo por una colina con una inclinación de 30 °. Cuando la rapidez del automóvil es de 12 m/s, el conductor aplica los frenos. £Cuál es el valor de la fuerza constante F (paralela al camino) que debe aplicarse si el auto se va a detener cuando haya viajado 100 m? R: 6.7 kN.