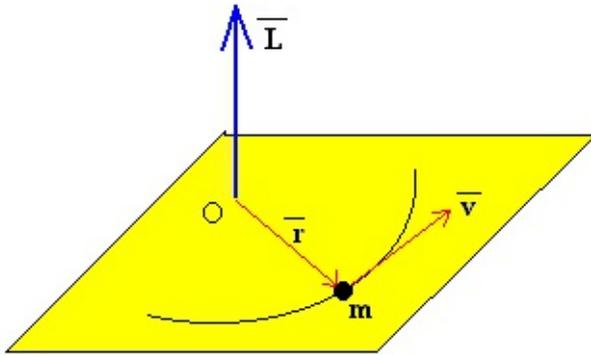


1 Momento angular de una partícula



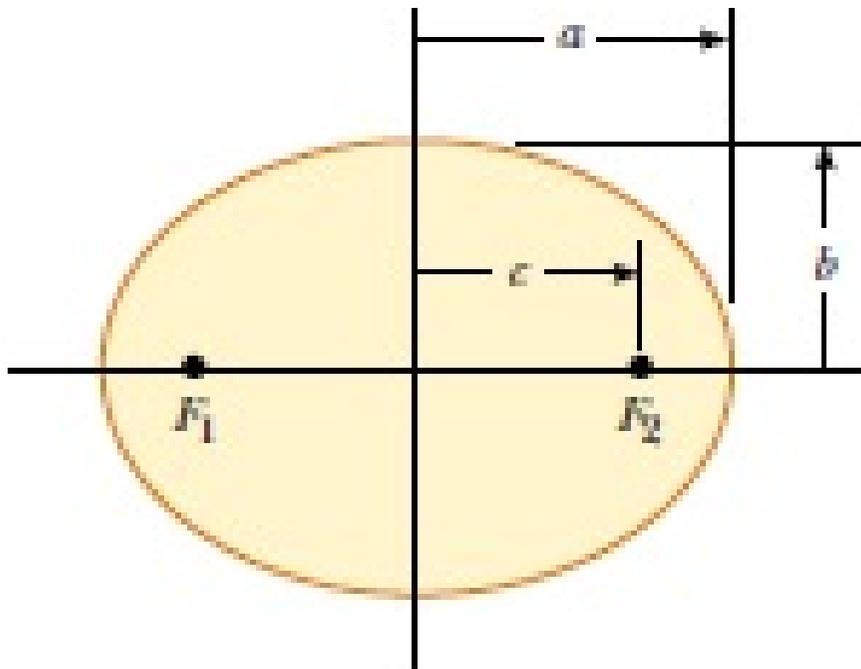
Se define momento angular de una partícula respecto del punto O, como el producto vectorial del vector posición \mathbf{r} por el vector momento lineal $m\mathbf{v}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

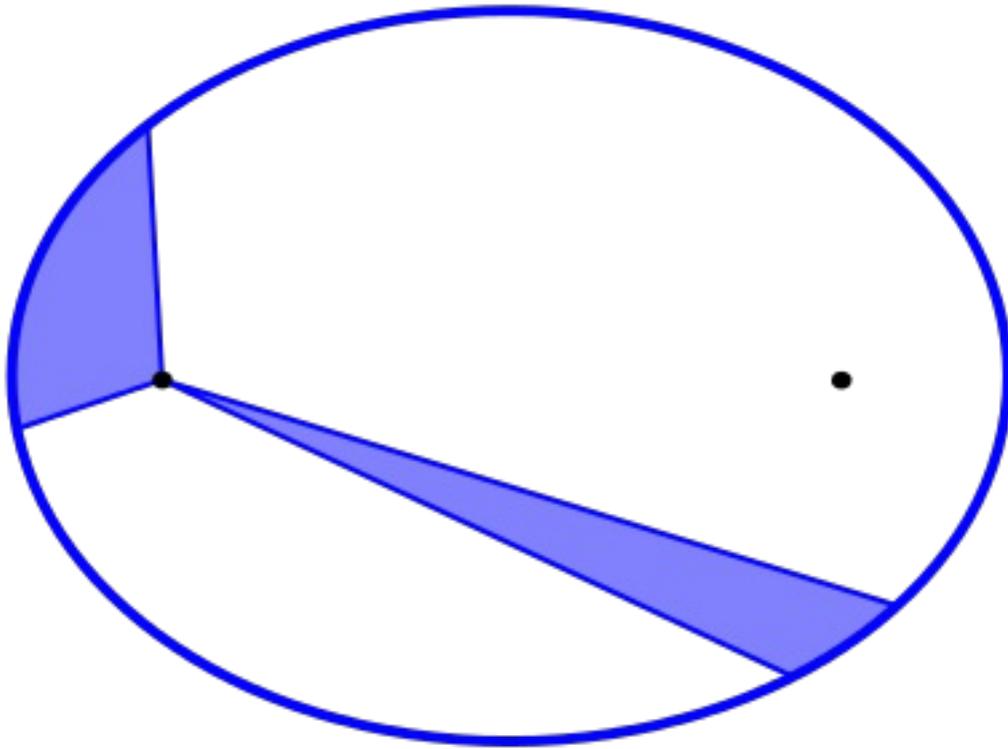
2 Leyes de Kepler

A partir de la ley de Gravitación y de las leyes de la mecánica se obtienen las leyes de Kepler del movimiento planetario:

1) Los planetas se mueven en elipses, con el Sol en uno de los focos.



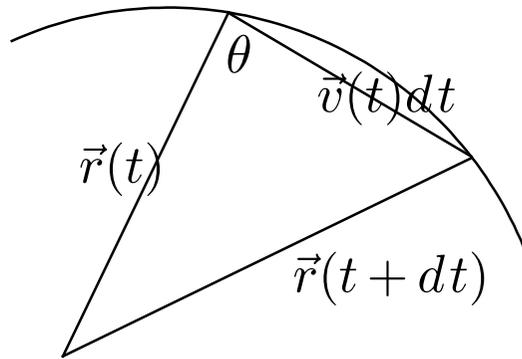
2) La línea que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.



Esta ley se deduce de la conservación del momentum angular \vec{L} , lo cual se deriva del carácter central de la fuerza:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{constante}$$

Se tiene:



$$dA = \frac{1}{2}r(t)v(t)\text{sen } \theta dt. \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)| = \text{constante}$$

Notar que $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}(\theta)$.

3) El cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

Demostraremos esta ley para órbitas circulares:

La segunda ley de Newton da:

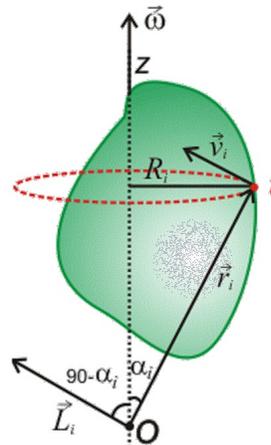
$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

pero $v = \frac{2\pi r}{T}$, donde T es el período. Se tiene:

$$\frac{4\pi^2}{GM} r^3 = T^2$$

3 Momento angular de un sólido rígido

Las partículas de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad que es proporcional al radio de la circunferencia que describen $v_i = \omega \times r_i$



En la figura, se muestra el vector momento angular L_i de una partícula de masa m_i cuya posición está dada por el vector r_i y que describe una circunferencia de radio R_i con velocidad v_i .

El módulo del vector momento angular vale

$$L_i = r_i m_i v_i$$

Su proyección sobre el eje de rotación Z es

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$$

El momento angular de todas las partículas del sólido es

$$L = \sum_i L_i$$

La proyección L_z del vector momento angular a lo largo del eje de rotación es

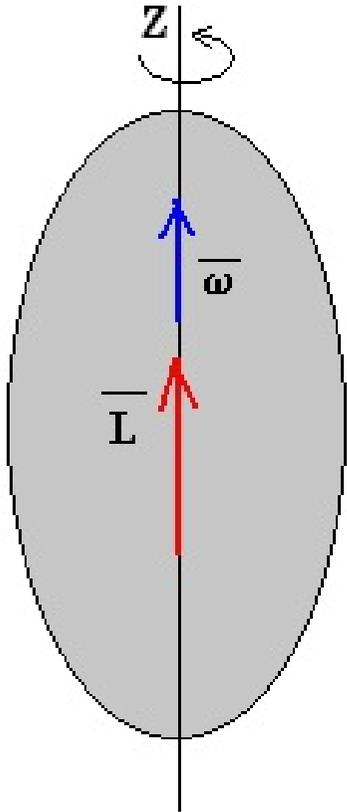
$$L_z = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega$$

El término entre paréntesis se denomina momento de inercia

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

En general, el vector momento angular L no tiene la dirección del eje de rotación, es decir, el vector momento angular no coincide con su proyección L_z a lo largo del eje de rotación. Cuando coinciden se dice que el eje de rotación es un eje principal de inercia.

Para estos ejes existe una relación sencilla entre el momento angular y la velocidad angular, dos vectores que tienen la misma dirección, la del eje de rotación, $L = I\omega$



El momento de inercia no es una cantidad característica como puede ser la masa o el volumen, sino que su valor depende de la posición del eje de rotación. El momento de inercia es mínimo cuando el eje de rotación pasa por el centro de

masa.

Cuerpo	Momento de Inercia I_c
Varilla delgada de longitud L	$\frac{1}{12}ML^2$
Disco y cilindro de radio R	$\frac{1}{2}MR^2$
Esfera de radio R	$\frac{2}{5}MR^2$
Aro de radio R	MR^2

Teorema de Steiner

El teorema de Steiner es una fórmula que nos permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto O, cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas.

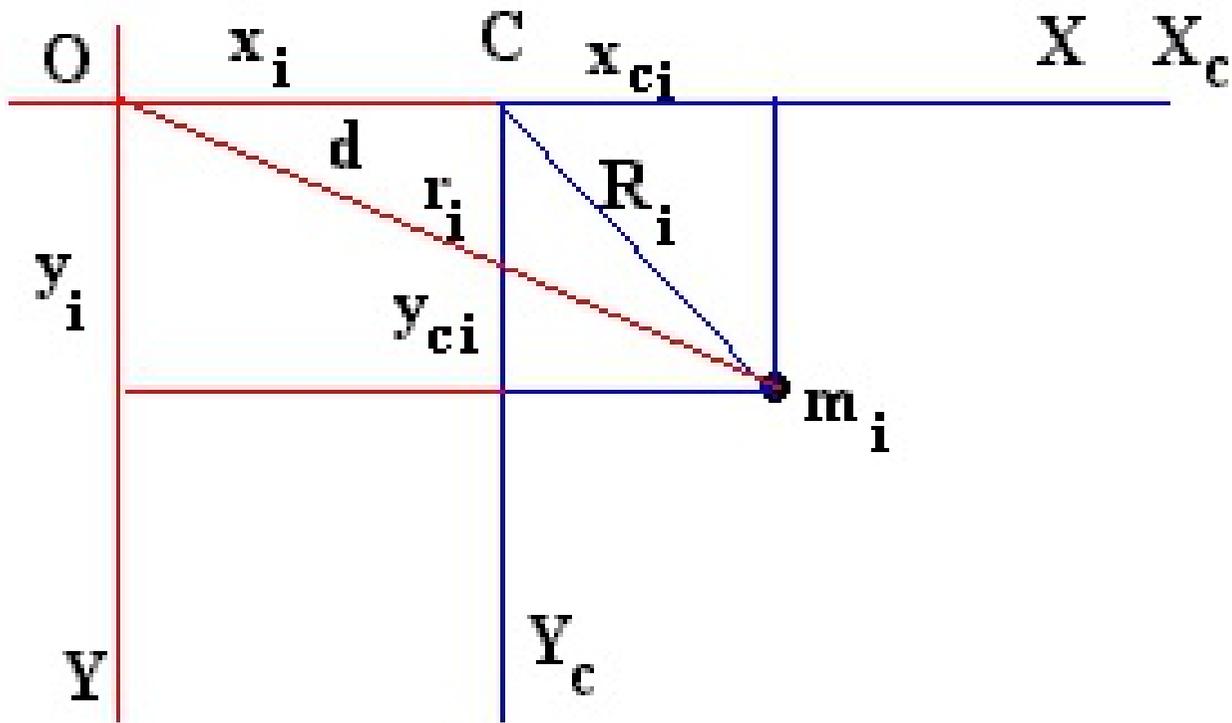
El momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por O es

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2$$

El momento de inercia respecto de un eje que pasa por C es

$$I_C = \sum_i m_i R_i^2$$

Para relacionar I_O e I_C hay que relacionar r_i y R_i .



En la figura, tenemos que

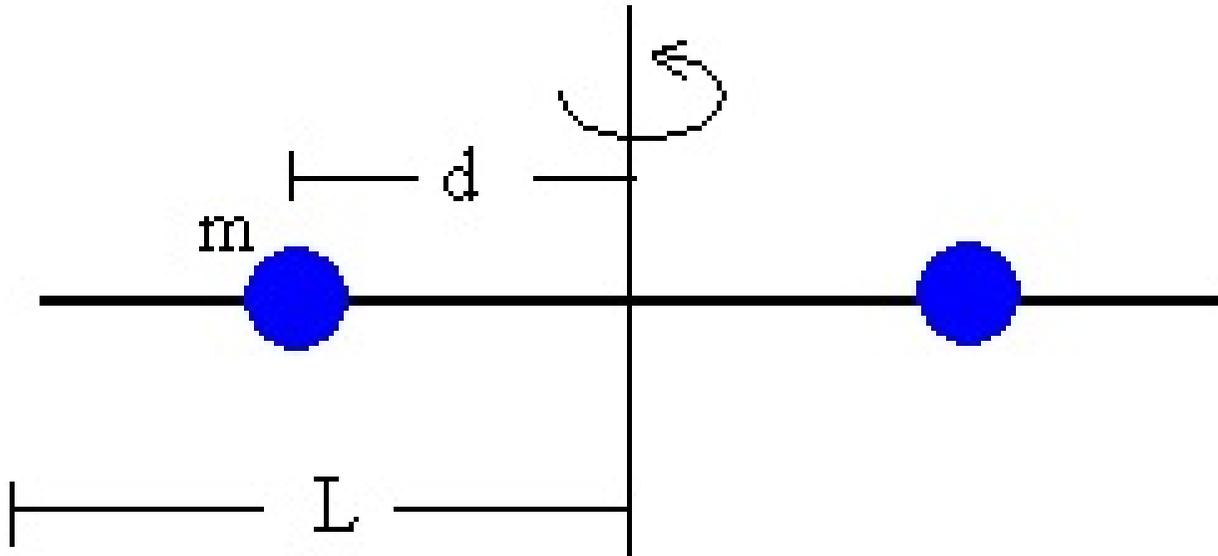
$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (x_{ci} + d)^2 + y_{ci}^2 = R_i^2 + 2dx_{ci} + d^2$$

$$I_O = I_C + 2d \sum_i x_{ci} + d^2 \sum_i m_i = I_C + d^2 M$$

El término intermedio en el segundo miembro es cero ya que obtenemos la posición x_C del centro de masa desde el centro de masa.

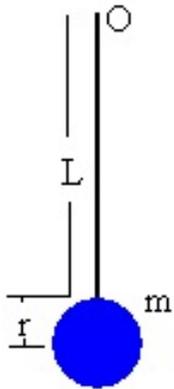
Ejemplos

Sea una varilla de masa M y longitud $2L$, que tiene dos esferas de masa m y radio r simétricamente dispuestas a una distancia d del eje de rotación que es perpendicular a la varilla y pasa por el punto medio de la misma.



$$I = \frac{1}{12}M (2L)^2 + 2\left(\frac{2}{5}mr^2 + md^2\right)$$

Un péndulo consiste en una varilla de masa M y longitud L , y una lenteja de forma cilíndrica de masa m y radio r . El péndulo puede oscilar alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por su extremo O



$$I = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}mr^2 + m(r + L)^2$$

Energía cinética de rotación

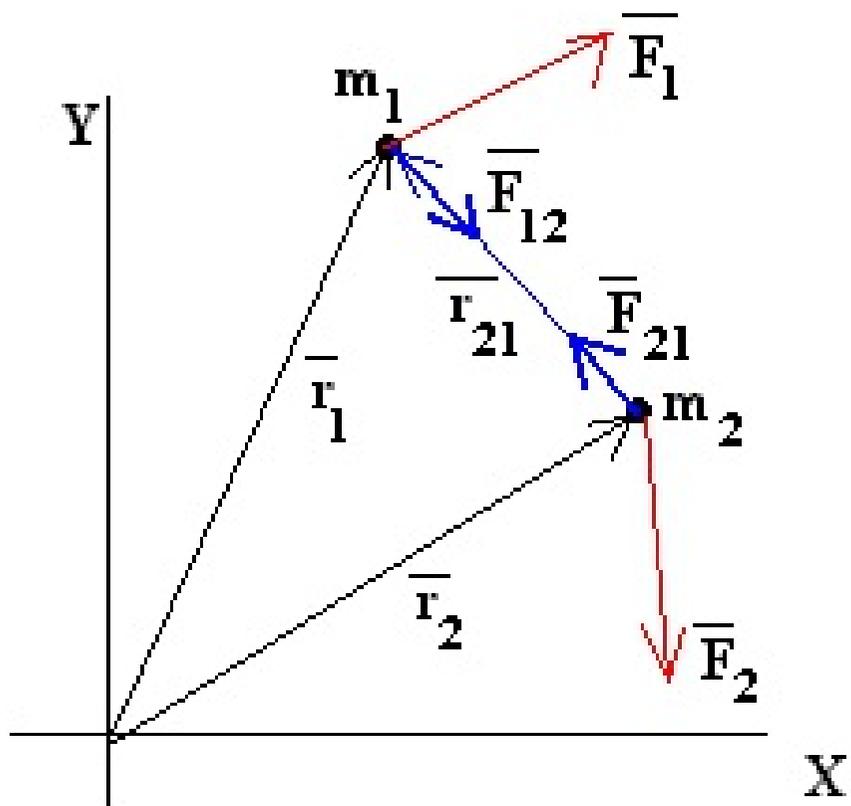
Las partículas del sólido describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad que es proporcional al radio de la circunferencia que describen $v_i = \omega \times R_i$. La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas. Esta suma se puede expresar de forma simple en términos del momento de inercia y la velocidad angular de rotación

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ecuación de la dinámica de rotación

Consideremos un sistema de partículas. Sobre cada partícula actúan las fuerzas exteriores al sistema y las fuerzas de interacción mutua entre las partículas del sistema. Supongamos un sistema formado por dos partículas. Sobre la partícula 1 actúa la fuerza exterior F_1 y la fuerza que ejerce la partícula 2, F_{12} . Sobre la partícula 2 actúa la fuerza exterior F_2 y la fuerza que ejerce la partícula 1, F_{21} .

Por ejemplo, si el sistema de partículas fuese el formado por la Tierra y la Luna: las fuerzas exteriores serían las que ejerce el Sol (y el resto de los planetas) sobre la Tierra y sobre la Luna. Las fuerzas interiores serían la atracción mutua entre estos dos cuerpos celestes.



Para cada una de las partículas se cumple que la variación del momento angular con el tiempo es igual al momento de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula considerada.

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta t} = r_1 \times (F_1 + F_{12})$$

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta t} = r_2 \times (F_2 + F_{21})$$

Sumando miembro a miembro, aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial, y teniendo en cuenta la tercera Ley de Newton, $F_{12} = -F_{21}$, tenemos que

$$\frac{\Delta(L_1 + L_2)}{\Delta t} = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + (r_1 - r_2) \times F_{12}$$

Como los vectores $r_1 - r_2$ y F_{12} son paralelos su producto vectorial es cero. Por lo que nos queda

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M_{\text{ext}}$$

El cambio del momento angular total del sistema de partículas con respecto del tiempo es igual al momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del sistema.

Consideremos ahora que el sistema de partículas es un sólido rígido que está girando alrededor de un eje principal de inercia, entonces el momento angular $L = I\omega$, la ecuación anterior la escribimos

$$\frac{\Delta I\omega}{\Delta t} = M_{\text{ext}}, \quad I\alpha = M_{\text{ext}}$$

Momento angular de un sistema de partículas

Consideremos el sistema de dos partículas de la figura anterior.

El momento angular total del sistema respecto del origen es

$$\mathbf{L} = \vec{r}'_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}'_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

Calculamos el momento angular respecto del centro de masas

$$\vec{r}_{1\text{cm}} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{cm}} \quad \vec{r}_{2\text{cm}} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{cm}}$$

$$v_{1\text{cm}} = v_1 - v_{\text{cm}} \quad v_{2\text{cm}} = v_2 - v_{\text{cm}}$$

El momento angular respecto del origen es la suma de dos contribuciones:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= (\vec{r}_{1\text{cm}} + \vec{r}_{\text{cm}}) \times m_1 (\vec{v}_{1\text{cm}} + \vec{v}_{\text{cm}}) + (\vec{r}_{2\text{cm}} + \vec{r}_{\text{cm}}) \times m_2 (\vec{v}_{2\text{cm}} + \vec{v}_{\text{cm}}) = \\ &= (\vec{r}_{1\text{cm}} \times m_1 \vec{v}_{1\text{cm}}) + (\vec{r}_{2\text{cm}} \times m_2 \vec{v}_{2\text{cm}}) + \vec{r}_{\text{cm}} \times (m_1 \vec{v}_{1\text{cm}} + m_2 \vec{v}_{2\text{cm}}) + \\ & \quad (m_1 \vec{r}_{1\text{cm}} + m_2 \vec{r}_{2\text{cm}}) \times \vec{v}_{\text{cm}} \end{aligned}$$

De la definición de posición y velocidad del centro de masas, tenemos que

$$m_1 \vec{v}_{1\text{cm}} + m_2 \vec{v}_{2\text{cm}} = 0, \quad m_1 \vec{r}_{1\text{cm}} + m_2 \vec{r}_{2\text{cm}} = (m_1 + m_2) \vec{r}_{\text{cm}}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{cm}} + (m_1 + m_2) \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}$$

En general, para un sistema de partículas de masa total M

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{cm}} + M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}$$

El primer término, es el momento angular interno relativo al sistema c.m. y el último término, el momento angular externo relativo al sistema de laboratorio, como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa.

Relación entre el momento de las fuerzas exteriores M_{ext} y el momento angular interno L_{cm} .

El momento de las fuerzas exteriores respecto del origen es la suma de dos contribuciones

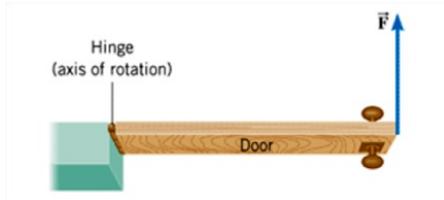
$$\begin{aligned} M_{\text{ext}} &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = (r_{1\text{cm}} + r_{\text{cm}}) \times F_1 + (r_{2\text{cm}} + r_{\text{cm}}) \times F_2 = r_{1\text{cm}} \times F_1 + \\ &r_{2\text{cm}} \times F_2 + r_{\text{cm}} \times (F_1 + F_2) = \\ &M_{\text{cm}} + r_{\text{cm}} \times (F_1 + F_2). \end{aligned} M_{\text{ext}} = M_{\text{cm}} + r_{\text{cm}} \times F_{\text{ext}}.$$

El primer término es el momento de las fuerzas exteriores relativo al c.m. y el segundo es el momento de la fuerza resultante $F_1 + F_2$ como si estuviera aplicada en el centro de masas.

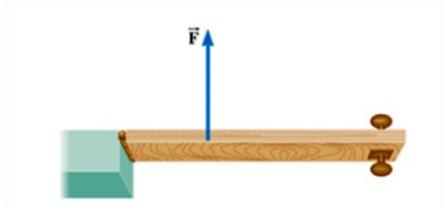
Principio de conservación del momento angular

El principio de conservación del momento angular afirma que si el momento de las fuerzas exteriores es cero (lo que no implica que las fuerzas exteriores sean cero, que sea un sistema aislado), el momento angular total se conserva, es decir, permanece constante

4 IDEA DE TORQUE



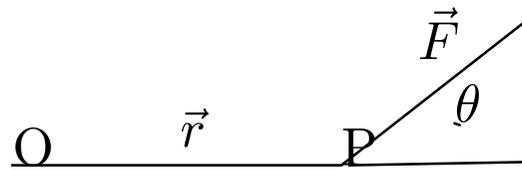
CUESTA MÁS ABRIR LA PUERTA



CUESTA MÁS ABRIR LA PUERTA



DEFINICIÓN DE TORQUE



O: EJE DE GIRO

P:PUNTO DE APLICACION

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \text{TORQUE}$$

TORQUE NETO:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots$$

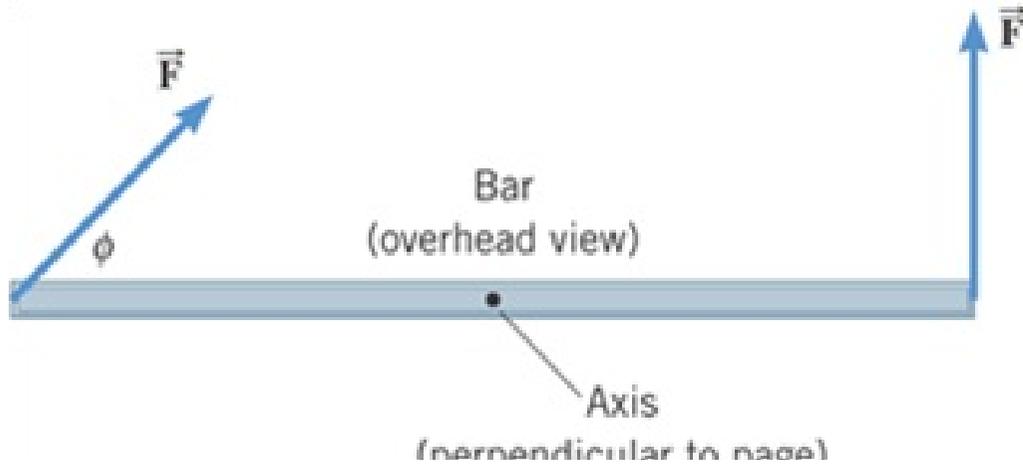
5 EQUILIBRIO

$\vec{F}_{\text{NETA}} = \vec{0}$, EQUILIBRIO DE TRASLACION

$\vec{\tau}_{\text{NETA}} = \vec{0}$, EQUILIBRIO DE ROTACION

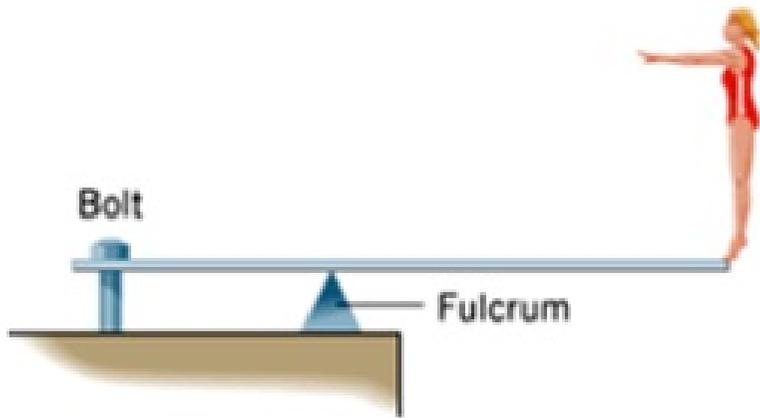
6 EJEMPLOS

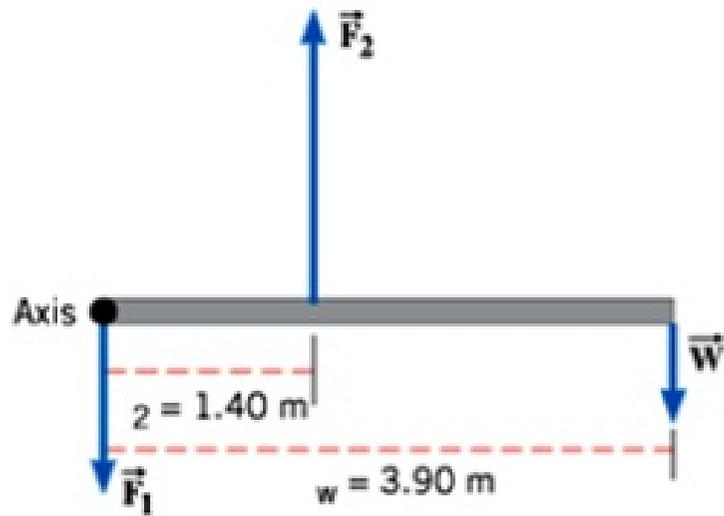
Ejemplo 1: Calcular el torque neto



Ejemplo 2:

Una mujer cuyo peso es de 530 N está en el extremo derecho de un trampolín con una longitud de 3.9 m y de peso despreciable. El trampolín se atornilla abajo en el extremo izquierdo y se apoya 1.4 metros en un fulcro. Encontrar las fuerzas que ejercen el perno y el punto de apoyo, sobre el trampolín.

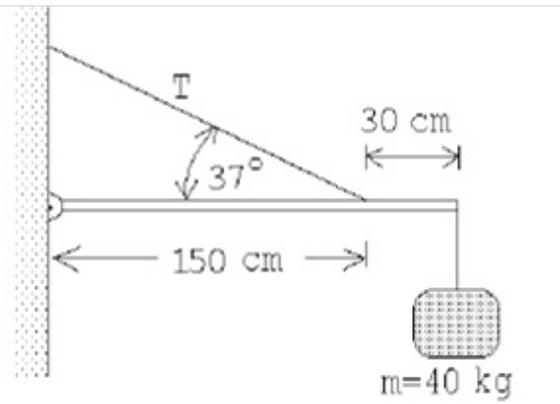




Respuesta: $F_1 = 950\text{ N}$, $F_2 = 1480\text{ N}$

Ejemplo 3:

La figura muestra un letrero luminoso de masa m que cuelga de una barra (de masa despreciable) que se mantiene horizontal con la ayuda de una cuerda. Calcule la tensión de la cuerda y la fuerza ejercida por la barra contra la pared.



Utilicemos un sistema cartesiano centrado en el punto de contacto entre la pared y la barra. El eje x positivo apunta hacia la derecha y el eje y positivo apunta hacia arriba.

$$N_x - T \cos \theta = 0, \quad N_y + T \sin \theta - mg = 0$$

$$LT \sin \theta - mg(L + l) = 0$$

$$T = \frac{mg(L + l)}{L \sin \theta},$$

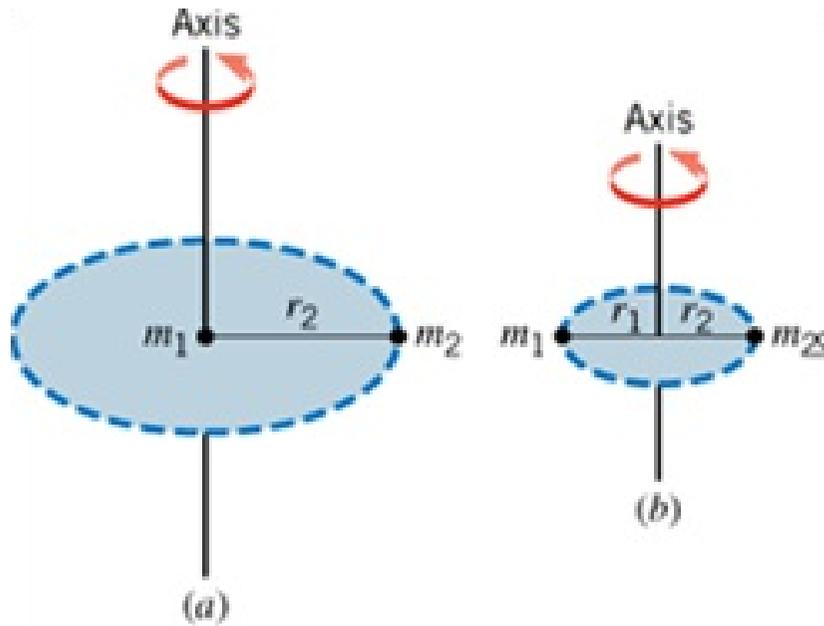
$$N_x = \frac{mg(L + l)}{L} \operatorname{ctg} \theta, \quad N_y = -mg \frac{l}{L}$$

La fuerza que la barra ejerce sobre la pared es $(-N_x, -N_y)$

En este caso: $\theta = 37^\circ$, $L = 1.5m$, $l = 0.3m$, $m = 40\text{kg}$

Ejemplo 4:

Dos partículas con masas m_1 , m_2 se fijan a los extremos de una varilla delgada rígida, cuya masa puede ser ignorada. Encuentre el momento de inercia, cuando este objeto gira con respecto a un eje que es perpendicular a la varilla en los casos (a) y (b).



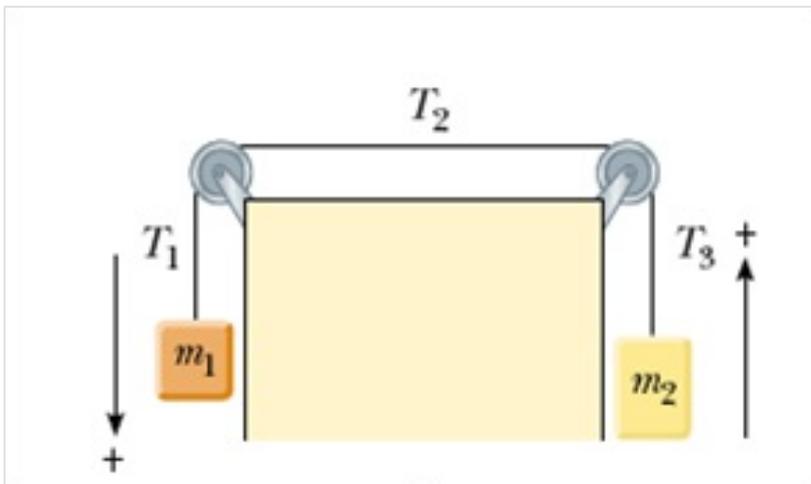
R: (a) $m_2 r_2^2$, (b) $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

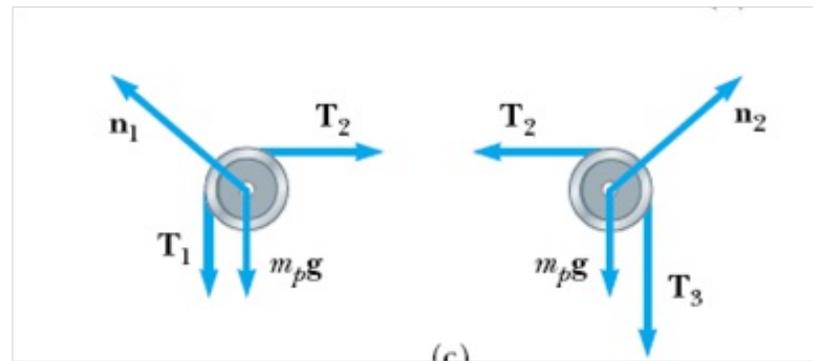
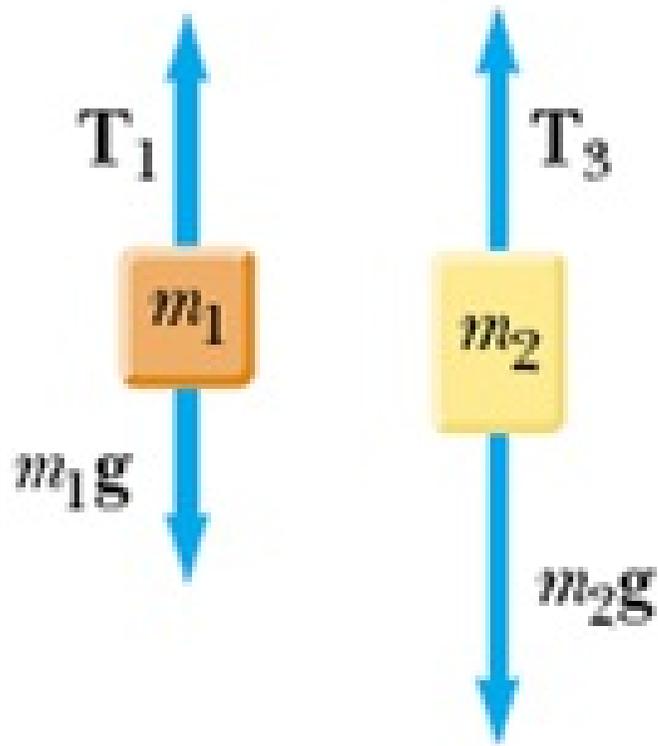
Ejemplo 5:

El motor de una sierra eléctrica trae desde el reposo, la cuchilla circular hasta la velocidad angular de $80 \text{ rev} / \text{s}$ en 240 rev . Este tipo de hoja de sierra tiene un momento de inercia de $1.41 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Calcular el torque neto (supuesto constante) que el motor debe aplicar. R: $0.118 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2$

7 Máquina de Atwood

Dos bloques que tienen masas m_1 y m_2 están conectados entre sí por una cuerda ligera que pasa sobre dos poleas idénticas sin fricción en sus ejes, cada una de las cuales tiene momento de inercia I y radio R . Encuentre la aceleración de cada bloque y las tensiones en cada sección de la cuerda.





Desarrollo:

$$m_1g - T_1 = m_1a$$

$$T_3 - m_2g = m_2a$$

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha$$

$$(T_2 - T_3)R = I\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3}{2}$$

$$\frac{T_1 - T_3}{2} = \frac{Ia}{R^2}$$

$$(m_1 - m_2)g + T_3 - T_1 = (m_1 + m_2)a$$

$$(m_1 - m_2)g - \frac{2Ia}{R^2} = (m_1 + m_2)a$$

Respuesta para la aceleración:

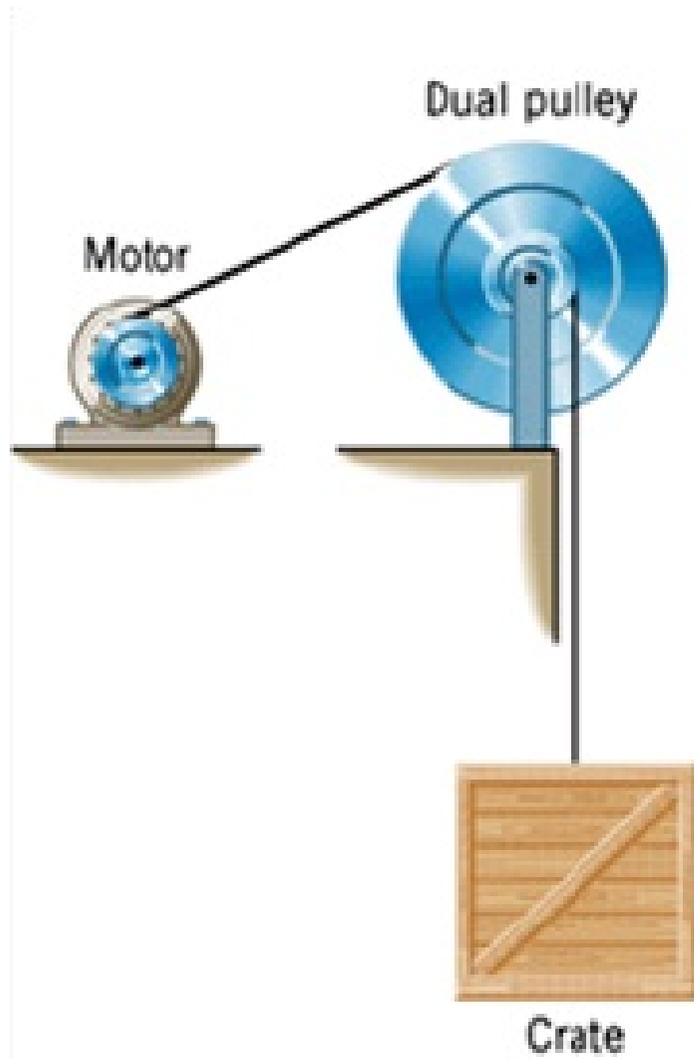
$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2I/R^2}$$

¿Qué pasaría si las poleas se consideran con masa nula?

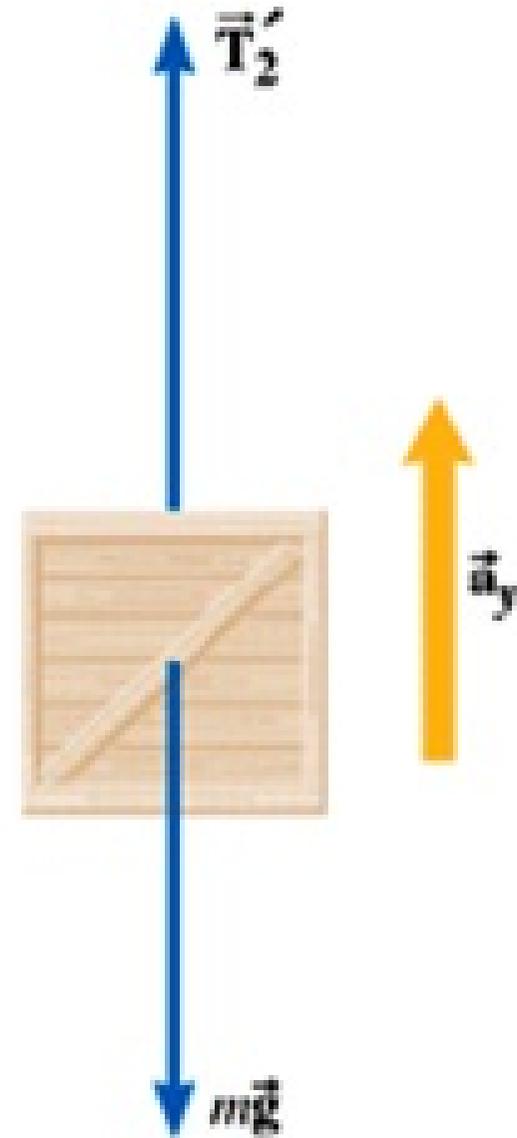
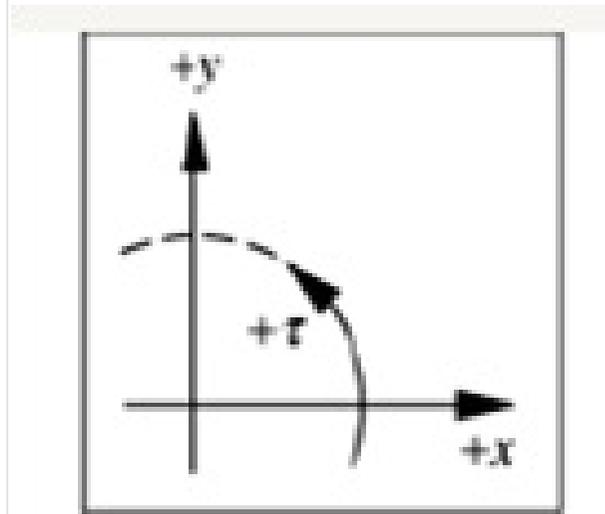
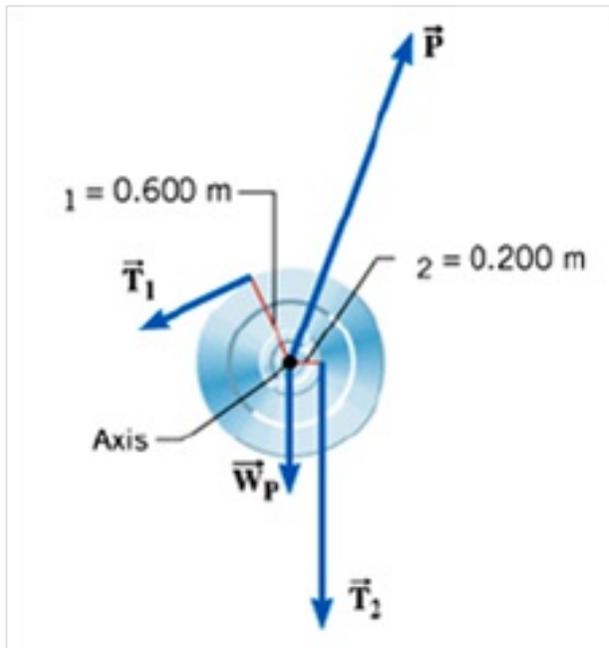
Ejemplo 6:

Una caja de 451 kg de masa está siendo levantada por el mecanismo que muestra la figura. Los dos cables están envueltos en torno a sus respectivas poleas, que tienen un radio de 0.6 y 0.2 m, respectivamente. Las poleas están unidas como una doble polea, como una sola unidad. Sobre el eje que pasa por su centro, la combinación tiene un momento de inercia de 46 kg m². Los cables no resbalan

en la doble polea. Una tensión de magnitud 2150 N se mantiene en el cable de conexión al motor. Encuentre la aceleración angular de la doble polea y la tensión en el cable conectado a la caja.



R:6.34 rad/s², 4991.7N



$$T_1 R_1 - T_2 R_2 = I \alpha$$

$$T_2 - m g = m a$$

$$\alpha R_2 = a$$

Se tiene que:

$$T_2 R_2 - m g R_2 = m \alpha R_2^2$$

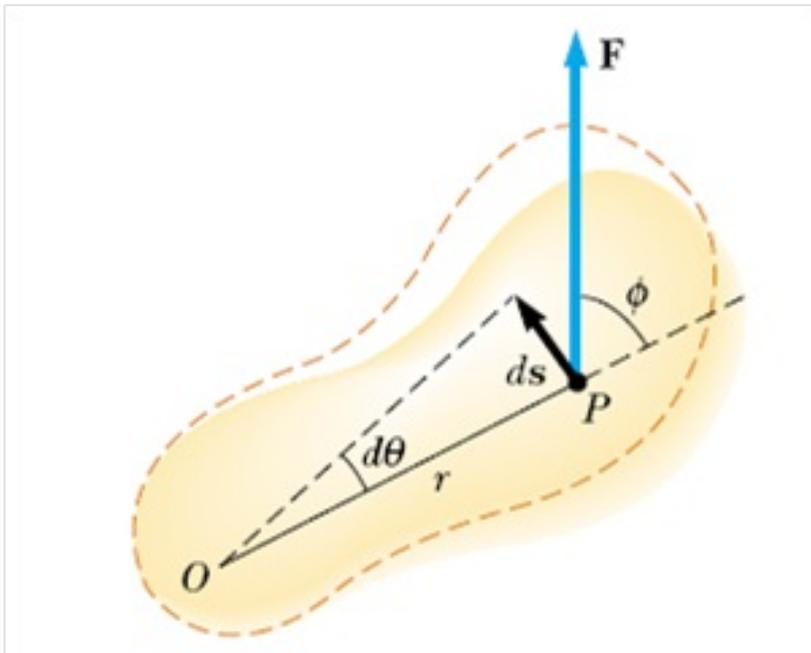
$$T_1 R_1 - m g R_2 = \alpha (I + m R_2^2)$$

$$\alpha = \frac{T_1 R_1 - m g R_2}{I + m R_2^2}$$

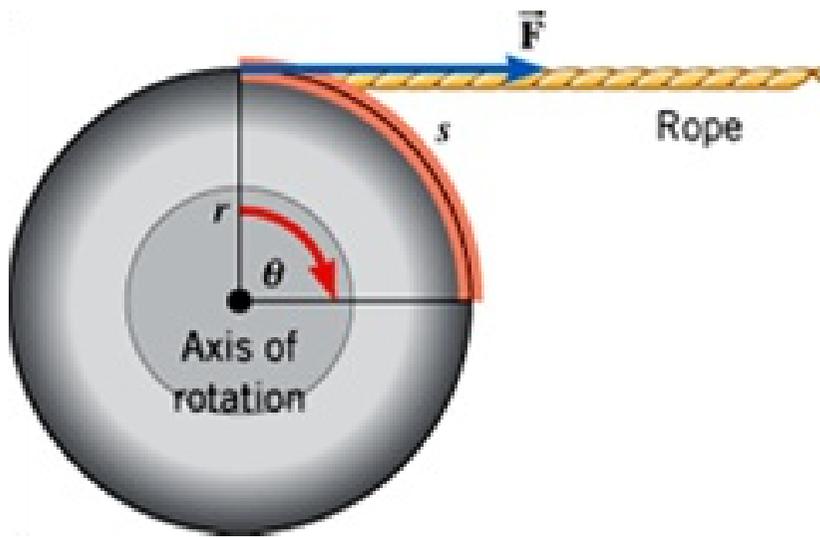
$$T_2 = \frac{T_1 R_1 - I \alpha}{R_2}$$

8 TRABAJO Y ENERGÍA ROTACIONAL

8.1 DEFINICIÓN DE TRABAJO



$$dW = F \sin \phi r d\theta = \tau d\theta$$



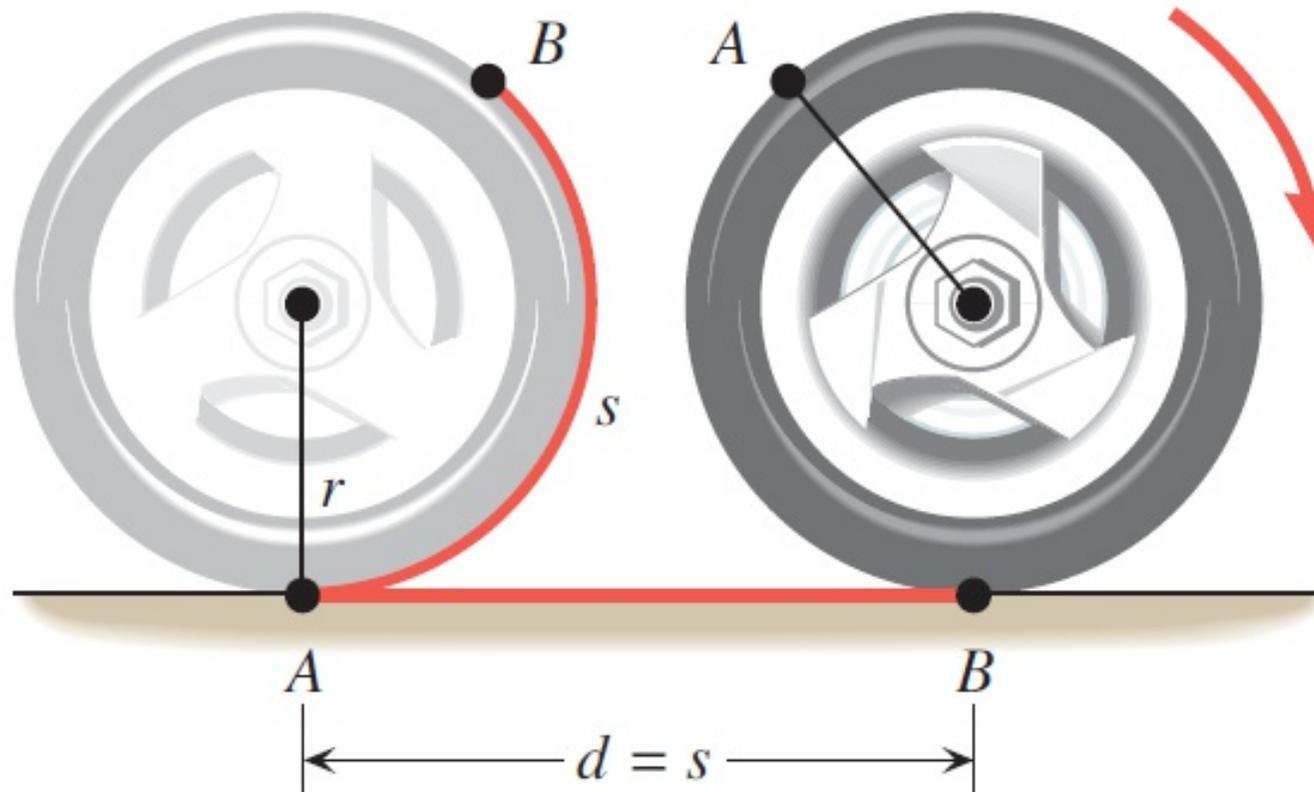
$$W_R = \tau\theta$$

9 ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN Y DE ROTACIÓN

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

9.1 Cuerpo Rodando

Cuando un cuerpo rueda existe una relación entre la velocidad angular de rotación y la velocidad de traslación del CM



$$v_{\text{CM}} = \frac{s}{t} = R\omega$$
$$a_{\text{CM}} = \frac{v_{\text{CM}}}{t} = R \frac{\omega}{t} = R\alpha$$

Al rodar, sin deslizar, el cuerpo está instantáneamente girando con velocidad angular ω en torno al punto de contacto con la superficie sobre la cual rueda (A). Su energía cinética respecto al punto A es sólo rotacional, con momento de inercia $I + MR^2$, donde I es momento de inercia respecto al CM y R es la distancia entre A y el CM. Tenemos:

$$K = \frac{1}{2}(I + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Esto corresponde a un movimiento de rotación en torno al CM con la misma velocidad angular ω combinado con un movimiento de traslación del CM con velocidad $v_{\text{CM}} = R\omega$, el mismo resultado obtenido más arriba.

Como esto es instantáneo, lo mismo vale para las aceleraciones. En particular, cualquier punto P del sólido rígido que rueda tiene una velocidad y aceleración tangenciales que combina estos dos movimientos:

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}) &= \vec{v}_{\text{CM}} + \omega r \hat{t} \\ \vec{a}(\vec{r}) &= \vec{a}_{\text{CM}} + \alpha r \hat{t}\end{aligned}$$

\vec{r} es la posición del punto P tomando como origen el CM.

$$r = |\vec{r}|$$

\hat{t} es un vector unitario, perpendicular a \vec{r} y que apunta en la dirección de giro.
 Ver, en particular, el ejemplo 9.

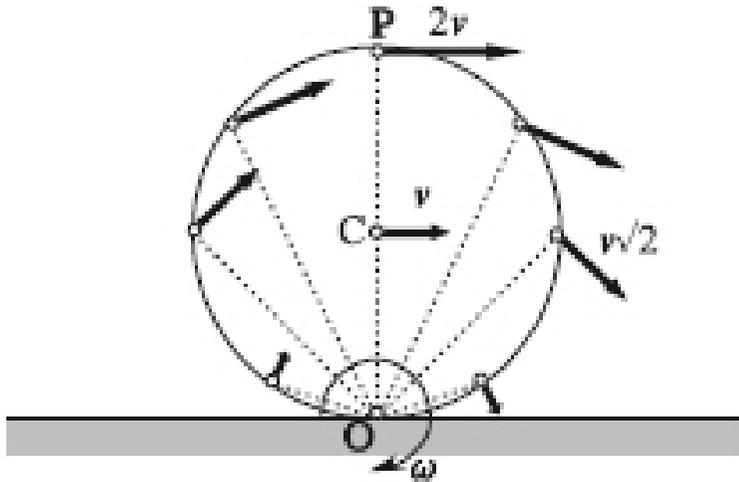


Figura 1.

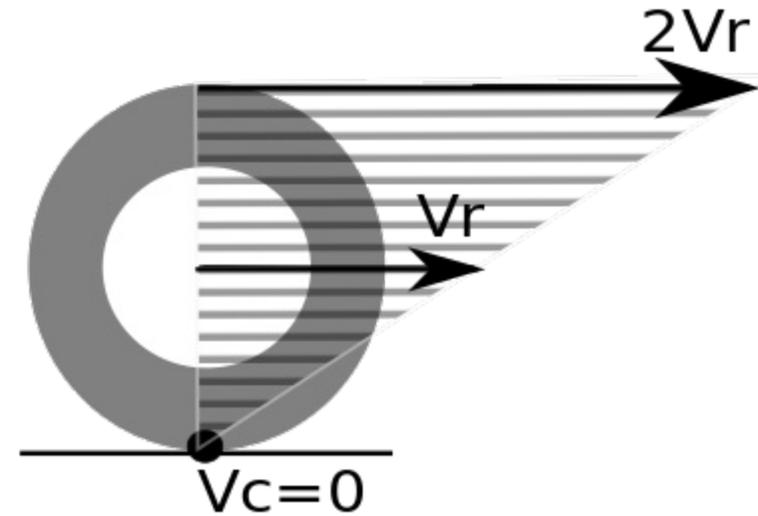
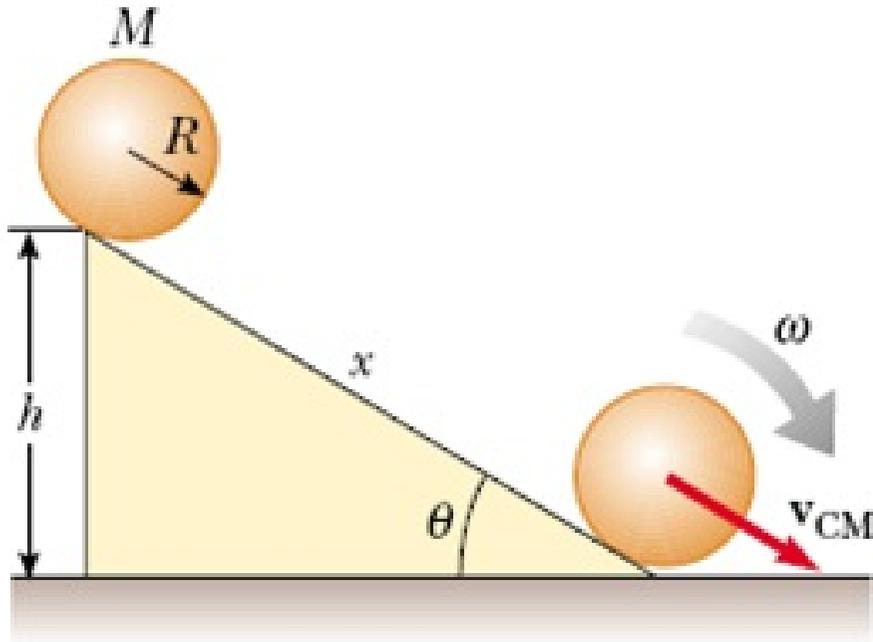


Figura 2.

Ejemplo 0



POR CONSERVACION DE LA ENERGIA

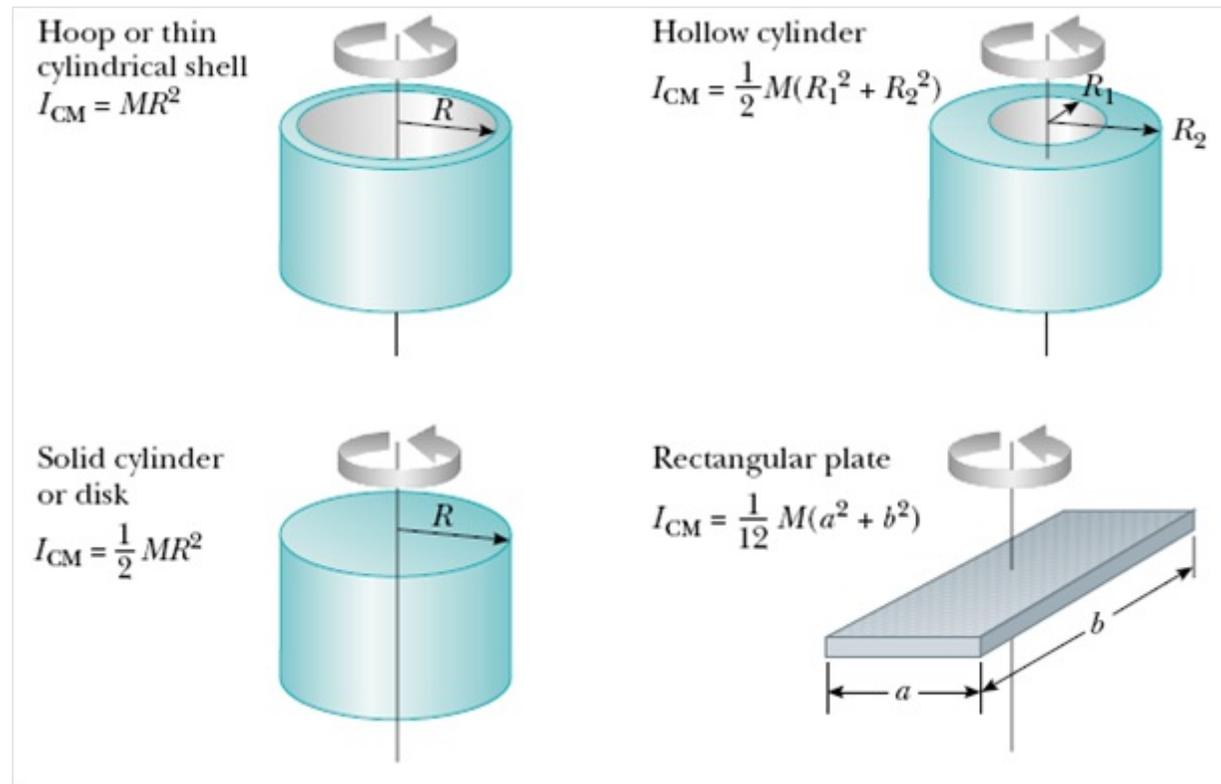
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}}$$

Desarrollo:

$$E_i = Mgh = E_f = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2, \omega = v_{CM}/R$$

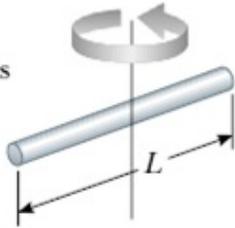
$$Mv_{CM}^2 + \frac{I_{CM}}{R^2}v_{CM}^2 = 2Mgh$$

9.2 MOMENTOS DE INERCIA



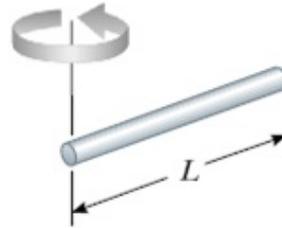
Long thin rod
with rotation axis
through center

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} ML^2$$



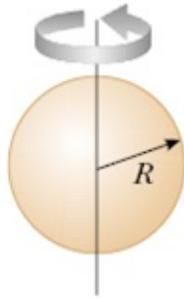
Long thin
rod with
rotation axis
through end

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



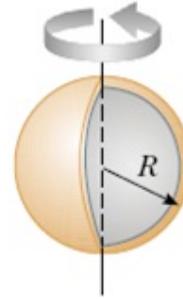
Solid sphere

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$$



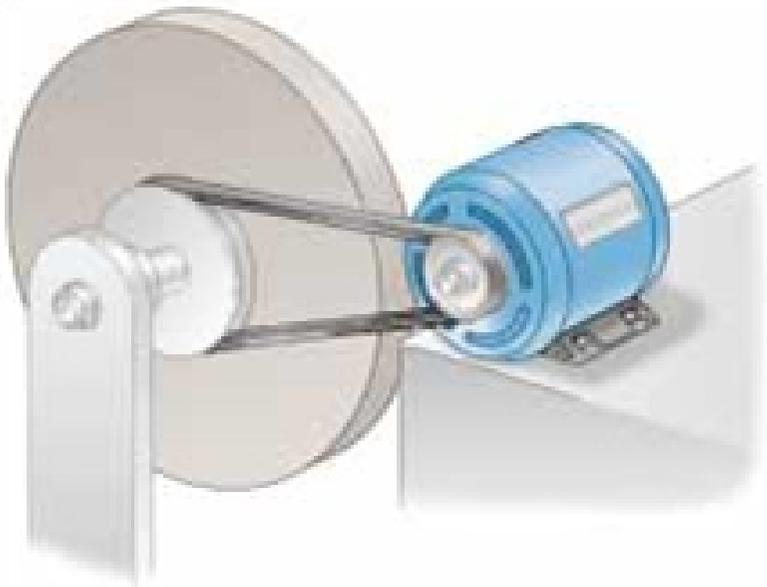
Thin spherical
shell

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{3} MR^2$$



Ejemplo 1

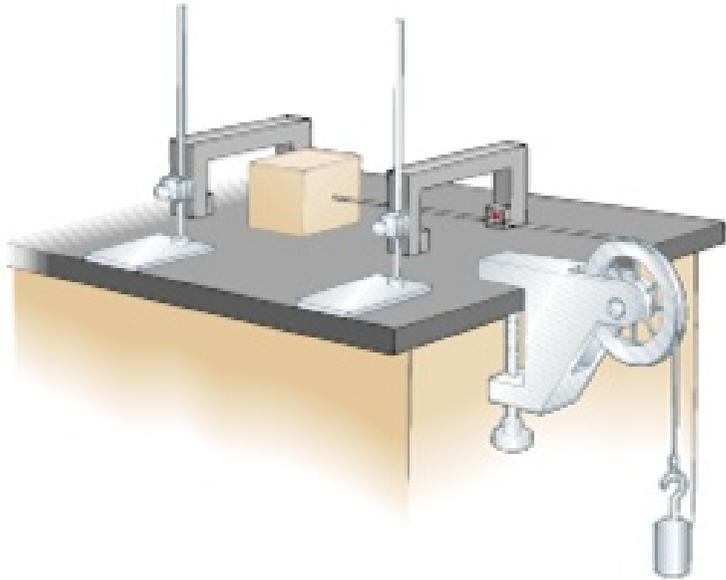
Un motor eléctrico gira un volante con una cinta que se une a una polea. El volante es un disco sólido con una masa de 80 kg y un diámetro de 1,25 m. Gira en un eje sin fricción. La polea es mucho más pequeña en masa y tiene un radio de 0.23 m. Si la tensión en la parte superior del segmento de la cinta es de 135 N y el volante tiene una aceleración angular de $1,67 \text{ rad/s}^2$, encuentre la tensión en la parte inferior del segmento de la correa.



21.5 N

Ejemplo 2

El bloque móvil tiene una masa de 0.85 kg, el contrapeso tiene una masa de 0.42 kg, y la polea es un cilindro hueco con una masa de 0.350 kg, un radio interior de 0.02 m, y un radio exterior de 0.03 m. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es 0.25. La polea gira sin fricción sobre su eje. El cable es liviano y no se estira ni se resbala sobre la polea. El bloque tiene una velocidad de 0.82 m/s hacia la polea cuando pasa a través de una foto-celda. (a) Use métodos de energía para predecir la velocidad después de que se ha desplazado a una segunda foto-celda a 0.7 metros. (b) Encontrar la velocidad angular de la polea en el mismo momento.



1.59 m/s 53.1 rad/s

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \quad , v = R\omega \quad I = \frac{1}{2}m_p(R^2 + r^2)$$

$$E = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + mgh$$

$$\Delta E = -F_r d$$

$$\frac{1}{2}\left(M + m + \frac{I}{R^2}\right)(v_f^2 - v_i^2) + mg(h_f - h_i) = -Mg\mu d$$

$$h_f - h_i = -d$$

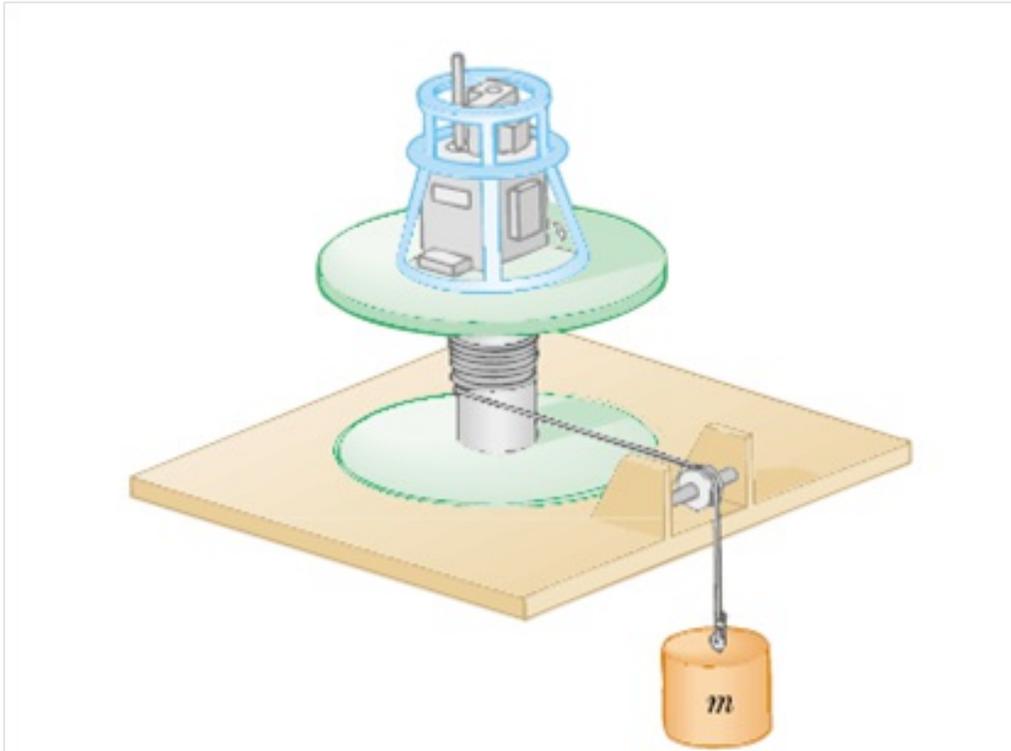
$$(v_f^2 - v_i^2) = -\frac{(M\mu - m)gd}{\frac{1}{2}\left(M + m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{(M\mu - m)gd}{\frac{1}{2}\left(M + m + \frac{I}{R^2}\right)}} = 1.59 \text{ m/s}$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = 53.14 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 3

El contrapeso se suelta desde el reposo, calcule I usando energía, si desciende una altura h y adquiere una rapidez v .



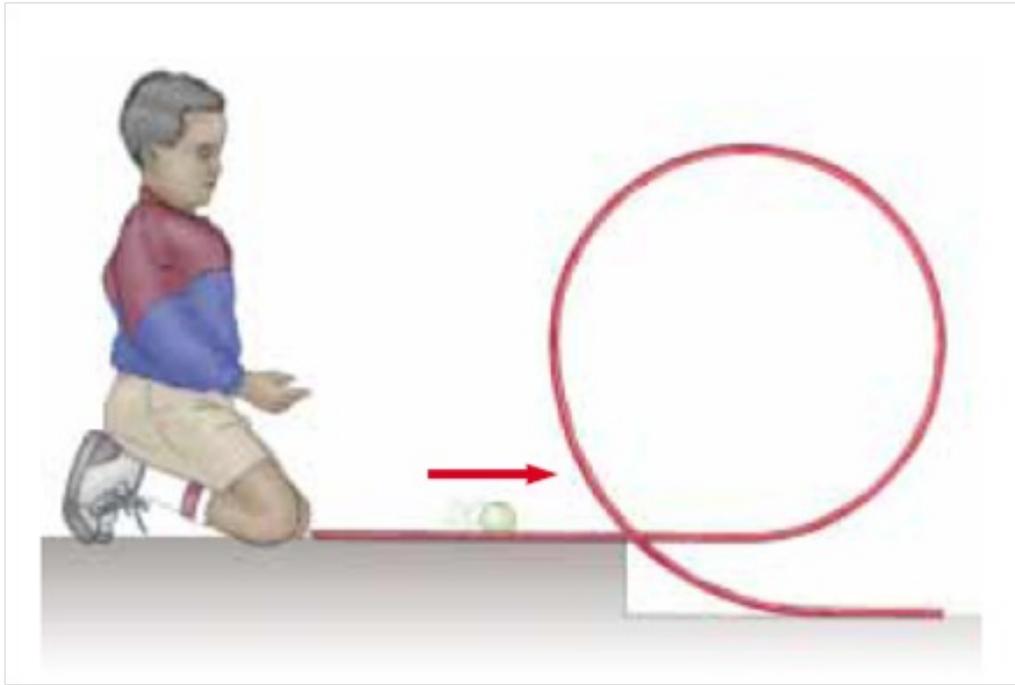
$$I = Mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right)$$

Ejemplo 4

Una pelota de tenis es una esfera hueca con paredes delgadas. Se pone a rodar sin deslizar a 4.03 m/s sobre una sección horizontal de una vía. Rueda al interior de un aro circular vertical de 90 cm de diámetro y finalmente sale de la vía en un punto a 20 cm debajo de la sección horizontal (a) Calcule la rapidez en lo alto del aro y demuestre que no caerá de la vía

(b) Calcule la velocidad con que sale la pelota

(c) Suponga que la fricción estática entre la pelota y la vía, de modo que resbala sin rodar. Esta rapidez sería más alta, mas baja o igual, en lo alto del aro?



(a) 2.38 m/s (b) 4.31 m/s

Ejemplo 5

(a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Compare esta aceleración con la de un aro uniforme.

(b) Calcule el coeficiente de roce mínimo para mantener el movimiento de rotación puro del disco.

(a) Disco $\frac{2}{3}g \text{ sen } \theta$ Aro $\frac{1}{2}g \text{ sen } \theta$

(b) $\frac{1}{3} \text{tg } \theta$

Ejemplo 6

Una estrella gira con un período de 30 días alrededor de una eje que pasa por su centro. Después que la estrella experimenta una explosión de supernova, el núcleo estelar, que tenía un radio de 10000 km, colapsa en una estrella de neutrones de 3 km de radio. Calcule el período de rotación de la estrella de neutrones. R: 0.23 s.

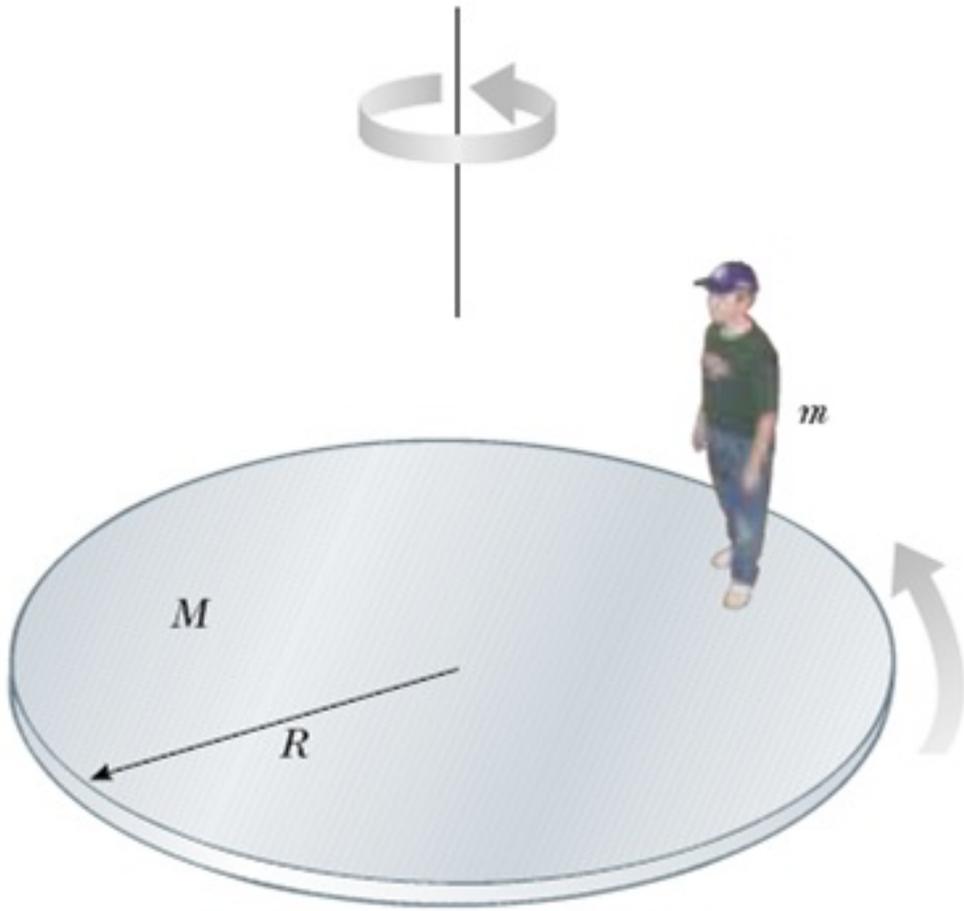
Desarrollo:

$$L_i = I_i \omega_i = L_f = I_f \omega_f$$
$$\omega_f = \frac{I_i \omega_i}{I_f} = \frac{MR_i^2 \omega_i}{MR_f^2} = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \omega_i$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i = \left(\frac{3}{10000}\right)^2 T_i = 9 \times 10^{-8} \times 30 \times 24 \times 3600 \text{ s} = 0.23 \text{ s}$$

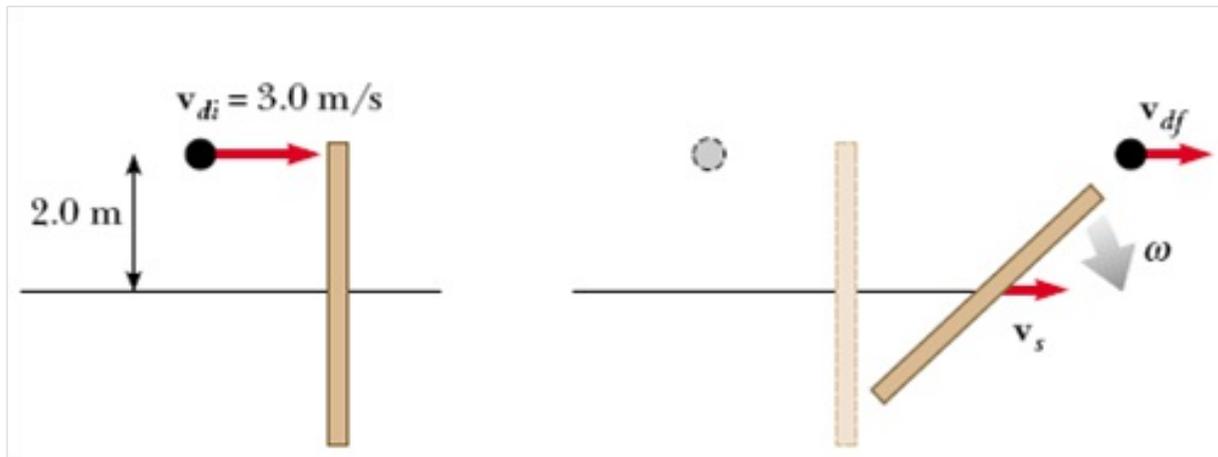
Ejemplo 7

Una plataforma en forma de disco circular gira libremente en un plano horizontal, alrededor de un eje vertical sin roce. La plataforma tiene una masa $M=100$ kg y un radio $R=2$ m. Un estudiante, cuya masa es $m=60$ kg, camina lentamente del borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2 rad/seg, cuando el estudiante está en el borde, calcule la rapidez angular cuando llega a un punto $r=0.5$ m del centro. R: 4.1 rad/s. Calcule las energías cinéticas antes y después. R: 880 J, 1810 J



Ejemplo 8(S11.11)

Un disco de 2 kg que se desplaza a 3 m/s golpea una barra de 1 kg. que está sobre hielo, de roce despreciable. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea original de movimiento. Calcular la rapidez de traslación del disco, la rapidez de traslación de la barra y la rapidez angular de la barra luego de la colisión. $I=1.33 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.



Desarrollo:

$$P_i = m v_{di} = P_f = m v_{df} + M v_s$$

$$K_i = \frac{1}{2} m v_{di}^2 = K_f = \frac{1}{2} m v_{df}^2 + \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$L_i = -m v_{di} d = L_f = -m v_{df} d + I \omega$$

$$v_{di} - v_{df} = -\frac{I\omega}{md}$$

$$Mv_s = -\frac{I\omega}{d}, v_s = -\frac{I\omega}{Md}$$

$$v_{di} + v_{df} = \frac{Mv_s^2 + I\omega^2}{Mv_s} = v_s - \omega d$$

$$2v_{di} = -\frac{I\omega}{md} + v_s - \omega d = -\frac{I\omega}{md} - \frac{I\omega}{Md} - \omega d$$

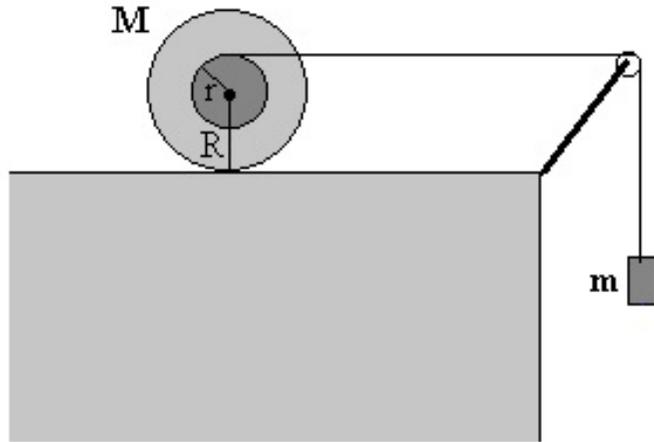
$$\omega = -\frac{2v_{di}}{\frac{I}{md} + \frac{I}{Md} + d} = -2 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$v_s = \frac{2Imv_{di}}{Im + IM + d^2mM} = 1.3 \text{ m/s}$$

$$v_{df} = \frac{Imv_{di} - IMv_{di} + d^2mMv_{di}}{Im + IM + d^2mM} = 2.3 \text{ m/s}$$

Ejemplo 9

Problema 1. Un cilindro de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en una hendidura de radio $r < R$, y de masa despreciable que la hace rodar sin deslizar a lo largo de un plano horizontal. La cuerda pasa por una polea y de su extremo cuelga un bloque de masa m . Determinar la aceleración del bloque y su velocidad cuando haya descendido h metros partiendo del reposo.



Solución:

$$\begin{aligned}T - F_r &= M a_c \\mg - T &= m a \\T r + R F_r &= I \alpha = I \frac{a_c}{R} \\T \frac{r}{R} + T &= I \frac{a_c}{R^2} + M a_c\end{aligned}$$

$$T = \frac{I \frac{a_c}{R^2} + Ma_c}{\frac{r}{R} + 1} ,$$

$$mg - \frac{I \frac{a_c}{R^2} + Ma_c}{\frac{r}{R} + 1} = ma \quad , a = a_c + \alpha r = a_c + \frac{a_c}{R} r$$

$$a_c = \frac{a}{1 + \frac{r}{R}}$$

$$a = \frac{gm r^2 - R^2 gm}{Rmr - R^2 m - M R^2 + I}$$

$$F_r = T - Ma_c = \frac{I \frac{a_c}{R^2} + Ma_c}{\frac{r}{R} + 1} - Ma_c =$$

$$\frac{I \frac{a_c}{R^2} - Ma_c \frac{r}{R}}{\frac{r}{R} + 1} = \frac{I}{R^2} - M \frac{r}{R} \frac{gm (r^2 - R^2)}{\left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 Rmr - R^2 m - M R^2 + I}$$

$$v = at, \quad h = \frac{1}{2} at^2 \quad , t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$v = \sqrt{2ah}$$

EJERCICIOS

Un barra rígida de largo L y masa M está cayendo en el plano vertical con velocidad V , cuando el extremo A hace contacto con un pivote fijo, como muestra la figura. ¿Cuál es la velocidad angular con que la barra empieza a rotar en torno al pivote? Sol.: $= 3V/2L$.

61.- Un cilindro sólido y un aro delgado, ambos de igual masa M y radio R bajan rodando por un plano inclinado, que hace ángulo con la horizontal, conectados por una barra rígida y de masa despreciable, como muestra la figura. Suponiendo que no hay deslizamiento y el roce de la barra con las uniones al cilindro y el aro es despreciable, encuentre: a) Aceleración con que bajan los objetos, b) fuerza sobre la barra. Sol.: a) $a = (4/7)g\sin$, b) $F = (1/7)Mg\sin$, compresión.

62.- Un cilindro homogéneo, de radio R y masa M , es remolcado hacia arriba en un plano inclinado, que hace ángulo de 30° con la horizontal, mediante una fuerza constante $F = Mg/2$, aplicada al extremo de una cuerda enrollada alrededor del cilindro, como muestra la figura. Suponiendo que el cilindro rueda sin deslizar, encuentre la aceleración del centro de masa del cilindro. Sol.: $a = g/3$.

63.- Una barra rígida, de largo L y masa M gira sobre una superficie horizontal sin roce con velocidad angular en torno a una clavija fijo en su extremo A . En cierto momento se inserta una segunda clavija en la superficie, de modo que al llegar el extremo B de la barra a ésta, la barra se engancha con la clavija en B , al mismo tiempo que se suelta de la clavija en A . ¿Cuál es la velocidad angular ' con que gira ahora la barra en torno al punto B ? Sol.:

64.- Una barra sólida de largo L unida a una cuerda ideal de largo $L/2$ gira sobre una superficie plana horizontal sin roce, con velocidad angular constante, alrededor de un eje vertical ubicado en el punto O , como muestra la figura. ¿A qué distancia R del eje debe insertarse en el plano un clavo, de modo que al impactar la barra contra el clavo, esta quede en reposo? Sol.: $R = (13/12)L$.

65.- Considere un cilindro macizo de radio r y masa m que rueda sin resbalar sobre una cavidad cilíndrica de radio R . Encuentre la ecuación de movimiento.
Sol.: .

66.- Considere un cilindro hueco de radio R y masa M , que se encuentra en equilibrio sobre la punta de una cuña. Se le da al cilindro un pequeño desplazamiento lateral, de modo que empieza a caer. Calcule el ángulo, medido con respecto a la vertical, para el cual el cilindro se despega de la cuña. Sol.: 60° .

67. Una escalera se encuentra apoyada contra una pared sin roce, de tal modo que forma un ángulo con la vertical. Suponiendo que tampoco hay roce entre la escalera y el suelo, encuentre el ángulo para el cual la escalera se despega de la pared.

68. Un cilindro sólido de radio R y masa M descansa sobre un par de rieles inclinados con ángulo respecto de la horizontal. Sobre el cilindro está enrollada una cuerda ideal, a la cual está unida una masa m , que cuelga como muestra la figura. Encuentre la aceleración con la que el cilindro sube por los rieles, suponiendo que rueda sin deslizar.

69.- Encuentre la aceleración con que la masa M se mueve por el plano inclinado de la figura, suponiendo que las poleas son discos macizos de radio R y masa m_p y no hay roce entre M y el plano inclinado y las poleas ruedan sin deslizar con respecto a la cuerda y no hay roce en sus ejes.

70.- Un bloque de 2 000 kg se eleva mediante una cuerda ideal que pasa por una polea y se enrolla en un cilindro de 15 cm de radio, accionado por un motor. El momento de inercia de la polea es despreciable. a) ¿Qué fuerza debe ejercer la cuerda para elevar el bloque con velocidad constante 8 cm/s? b) ¿Cuál es el torque que ejerce el cable sobre el cilindro? C) ¿Cuál es la velocidad angular del tambor?

71.- Se cuelga una barra rígida, de largo L y masa M , por uno de sus extremos, de modo que puede girar libremente y sin roce en torno al punto de sujeción. Se golpea la barra mediante una fuerza horizontal que desarrolla un impulso $J_0 = F_m t$, a una distancia x por debajo del punto de suspensión. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa de la barra luego de plicado el impulso? Sol.: $V_{cm} = 3J_0 x / 2LM$.

72.- Un cilindro circular de radio a está en contacto en las partes superior e inferior con dos correas transportadoras, como muestra la figura. Si las correas se mueven a velocidades v_1 y v_2 , encuentre: a) la velocidad lineal del centro del cilindro, b) la velocidad angular del cilindro.