Estática y Dinámica de Fluidos

1. Hidrostática. Principio de Pascal. Principio de Arquímedes.

Conceptos básicos de hidrodinámica:

• Una importante propiedad de una sustancia es la densidad, que la definiremos como el cociente de la masa y el volumen,

$$\rho = \frac{m}{V}\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$$

En la mayoría de los materiales, incluida el agua, las densidades varían con la temperatura. Una unidad de volumen muy utilizada es el litro (L):

$$1\mathrm{L} = 10^3\mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

• Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, éste ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada punto de la superficie. Definiremos presión del fluido como esta fuerza por unidad de área

$$P = \frac{F}{A}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

La unidad en el SI es el Newton por metro cuadrado, que recibe el nombre de Pascal:

$1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m}^2$

Una de la unidades también común cuando se habla de presión, es la atmósfera (atm), que es aproximadamente la presión del aire a nivel del mar.

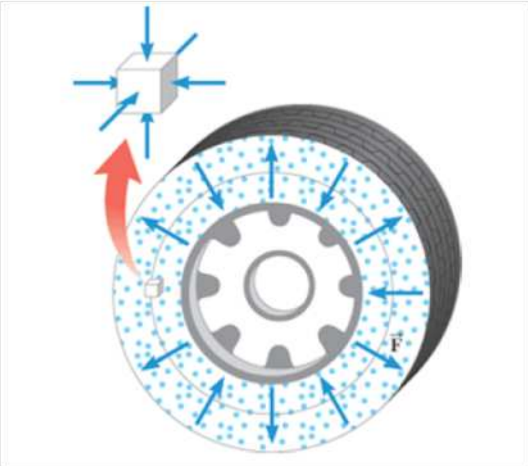
$1\,\mathrm{atm} = 101,325\,\mathrm{KPa} = 14,70\,\mathrm{Ib/pulg}^2 = 760\,\mathrm{mm\,Hg}$

Un fluido que presiona contra un cuerpo, tiende a comprimirlo. El cociente entre el cambio de presión y la disminución relativa al volumen $(\Delta V/V)$ se denomina módulo de compresibilidad

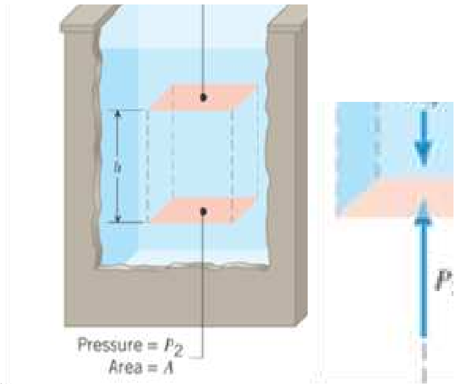
$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Algunos valores aproximados del módulo de compresibilidad B de varios materiales:

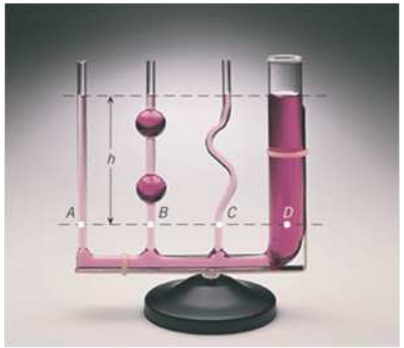
Diamante: 620 Acero: 160 cobre: 140 Aluminio: 70 Plomo: 7,7



1 PRESIÓN HIDROSTÁTICA



2 VASOS COMUNICANTES



3 PRESIÓN ATMOSFÉRICA

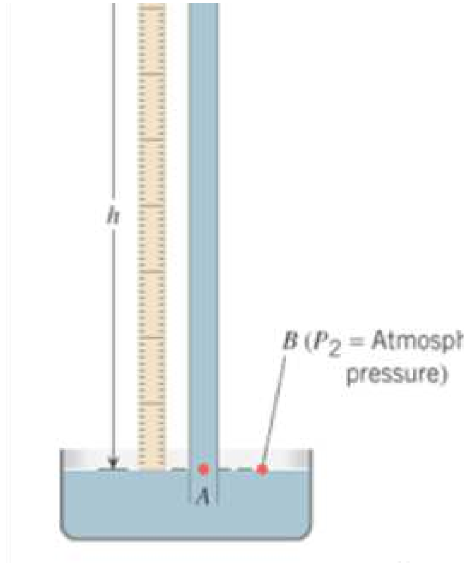


Figure 11-12 A mercury baror

$$h = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = 760mm$$

• **Ecuación fundamental de la hidrostática** Supongamos dos alturas H y z en un fluido; la ecuación fundamental de la hidrostática es

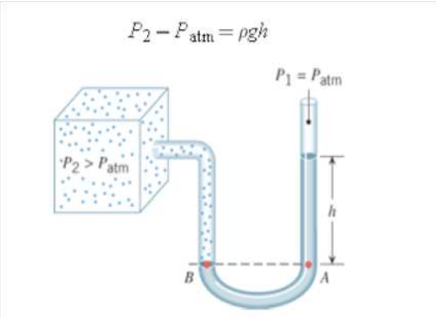
$$P(z) + \rho g\, z = P(H) + \rho g\, H$$

para ρ constante, y donde g es el valor de la gravedad, z y H las correspondientes alturas. Una expresión más general de esta ecuación es

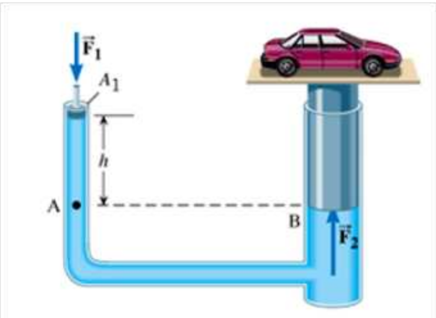
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

4 PRESIÓN MANOMÉTRICA

$$P_2 - P_{\mathrm{atm}} = \rho g h$$



5 PRINCIPIO DE PASCAL



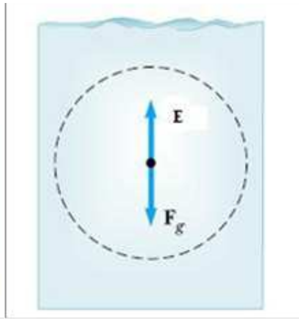
• Principio de Pascal: Toda presión aplicada en un punto del fluido se trasmite a todos los puntos del fluido.

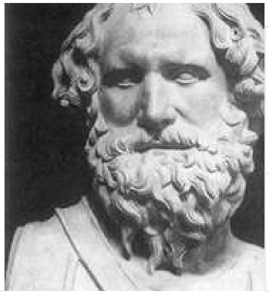
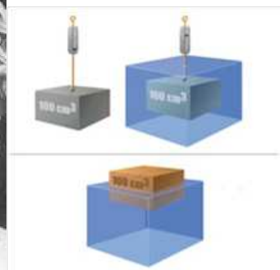
Ejemplo, prensa hidráulica o elevador hidráulico.

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Donde una fuerza F_1 ejercida sobre el émbolo o pistón pequeño produce una variación de presión F_1/A_1 que se trasmite por el líquido hasta el émbolo grande. Como las presiones en los pistones grande y pequeño son iguales, las fuerzas correspondientes cumplen la relación $F_1/A_1 = F_2/A_2$. Como el área del pistón grande es mucho mayor que el del pistón pequeño, la fuerza sobre el pistón grande $F_2 = (A_2/A_1)/F_1$ es mucho mayor que F_1.

6 PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Principio de Arquímedes (250 a.C.) Todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido, experimenta un empuje ascensional igual al peso del fluido desplazado.

Consecuencia del principio fundamental de la hidrostática.

Este principio también explica por qué un objeto sumergido en el agua, su peso aparente es menor que si lo pesamos en el aire.

En la deducción de este principio, la fuerza neta de la presión solo depende de la posición (geometría del objeto y de la profundidad). En el caso del fluido dentro del fluido (equilibrio), la fuerza neta de la presión tiene que ser igual al peso del fluido contenido en el volumen considerado.

7 FLUIDOS EN MOVIMIENTO

Hidrodinámica. Ecuación de continuidad. Fluido perfecto. Ecuación de Bernoulli.

Para el movimiento de fluidos supondremos fluidos incompresibles, consideraremos dos variables: velocidad y presión, y conoceremos la geometría del conducto.

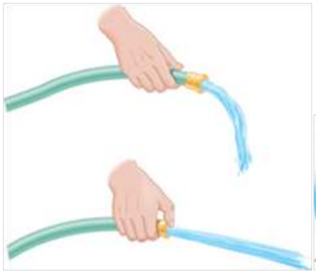
Necesitaremos dos ecuaciones para describir el movimiento de los fluidos bajo las condiciones comentadas anteriormente $\diamond$ Ecuación de continuidad (conservación de la masa). $\diamond$ Ecuación de Bernoulli (conservación de la energía).

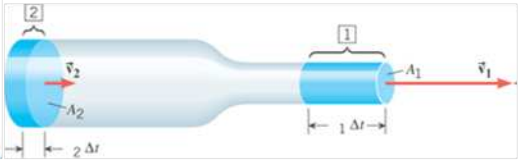
(a)

(b)

8 Flujo TURBULENTO

9 Ecuación de Continuidad





• Ecuación de continuidad y conservación de la masa.

$$\frac{\text{masa}\, que\, entra}{tiempo} = \frac{\text{masa}\, que\, sale}{tiempo}$$

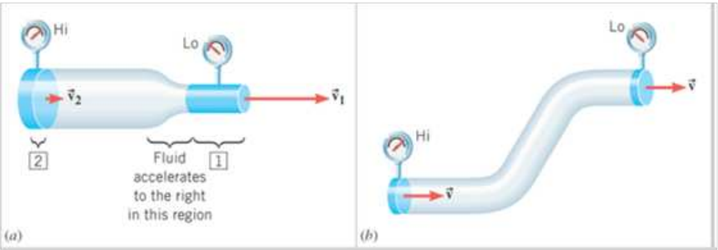
Masa que entra o sale en un intervalo de tiempo dt

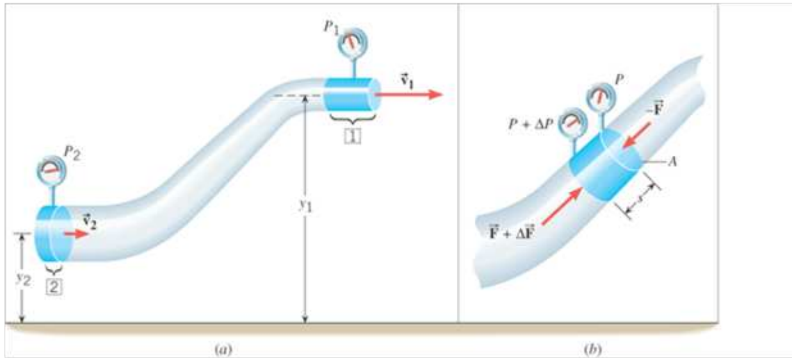
$dM_{\text{entra}} = \rho_1 v_1 dt\, A_1, \qquad dM_{\text{sale}} = \rho_2 v_2 dt\, A_2,$
Para líquidos, se tiene que: $\rho_1 = \rho_2$.

$$\frac{dV}{dt} = A_1 v_1 = A_2 v_2 \equiv Q(c\,a\,u\,d\,a\,l).$$

Podemos observar que si A aumenta $\Rightarrow v$ disminuye.

10 ECUACION DE BERNOUILLI





Ecuación de Bernoulli La ecuación de Bernoulli solo vale para fluidos perfectos, es decir, fluidos sin viscosidad.

Ejemplo de la ecuación de Bernoulli en un conducto horizontal y de sección constante.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g\, h_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, h_2 + P_2$$

Nótese que cuando la velocidad es 0, recuperamos la ecuación fundamental de la hidrostática.

Un buen ejemplo de esto es observar el vuelo de los aviones. En los cuales, si nos fijamos en el ala del avión, veremos que el aire que fluye por encima del ala y el que fluye por debajo del ala tarda el mismo tiempo aunque el espacio recorrido no es el mismo; asi pues, $v_1 < v_2 \Rightarrow p_1 > p_2$, por eso se genera una fuerza de sustentación que hace que el ala planee.

Efecto Venturi: Cuando aumenta la velocidad de un fluido, desciende su presión.

Conservación de la energía:

$$W = (P_1 - P_2)V = \Delta(K + U) = (\frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 + m g y_2 - m g y_1)$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g\, y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, y_2 = \text{constante}$$

EJEMPLOS

Se quiere levantar una moneda de masa $m = 2.24\,g$ y área $A = 2.5 \times 10^{-4}m^2$, soplando sobre ella.

Con qué velocidad v se debe soplar el aire para levantar la moneda? $\rho = 1.29\,\mathrm{kg}/m^3$

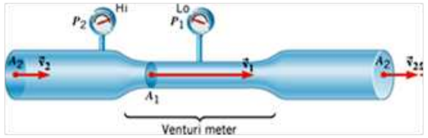
Sol:

$$F_B = PA = m\,g,\; P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2,$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2m\,g}{\rho A}} = 11.7 m/s$$

Una cañería con un radio de interior de 6.5 mm está conectado a una cabeza de ducha que cuenta con 12 hoyos. La velocidad del agua en la cañería es de 1.2 m / s. (a) Calcule el caudal en la cañería (b) Calcule con qué velocidad sale el agua de uno de los agujeros (radio efectivo de 0.4 mm) de la ducha. R: (a) 1.6 x 10-4 m3/s. (b) 20 m/s.

Supongamos que un viento está soplando a 15-m / s, a través del techo de su casa. La densidad del aire es 1,29 kg / m3. (a) Determinar la reducción de la presión (por debajo de la presión atmosférica del aire estacionario) que acompaña este viento. (b) Explique por qué algunos techos son "soplados hacia fuera" durante fuertes vientos. R: 150 Pa.

Un medidor de Venturi es un dispositivo que se utiliza para medir la velocidad de un fluido dentro de una tubería, si se conoce la diferencia de presión $\Delta P = P_2 - P_1$ El dibujo muestra un gas que circula a una velocidad v2 a través de una sección horizontal de la tubería cuya sección transversal es de A2. El gas tiene una densidad ρ. El medidor de Venturi tiene una sección de área A1 y se ha introducido en la cañería como se muestra en la figura. Encuentre (a) v2, la velocidad del gas en la tubería mayor original y (b) el caudal Q del gas.



Un venturi es un dispositivo que clasicamente incorpora una simple convergencia y divergencia a travez de una sección y usa los principios de Bernoulli para relacionar la velocidad con la presión del fluido. Este principio se basa en que cuando el gas o liquido en movimiento, baja su presión y aumenta su velocidad.

Un tubo de venturi es usado para medir la velocidad del flujo de un fluido. En la garganta, el area es reducida de A2 a A1 y su velocidad se incrementa de V2 a V1. En el punto 1, donde la velocidad es máxima, la presión es mínima. Esto lo sabemos de la ecuación de Bernoulli.

Sol:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \text{, de la ec. de Bernoulli con } y_2 = y_1$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \text{ de la ec. de continuidad}$$

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho((\frac{A_2}{A_1})^2 - 1)v_2^2,$$

$$(a)\ \ v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho((\frac{A_2}{A_1})^2 - 1)}}$$

$$(b)\ \ Q = v_2 A_2$$

EJERCICIOS

Un trozo de una aleación de oro y aluminio tiene una masa de 5 kg. Al sumergirlo en agua, suspendido de una balanza de resorte, ésta indica 4 kg. La densidad del oro es 19.3 gr/cm^3 y la del aluminio 2.3 gr/cm^3. ¿Cuál es la masa del oro y la del aluminio contenido en la aleación?

Respuestas aproximadas: 3.05 kg. De Au y 1.94 kg de Al.

Sol:

$$E = \text{empuje} = 1\,g = \rho_a V g$$

$$V = \frac{1}{\rho_a} m^3$$

Sea x la proporción de oro y $1 - x$ la proporción de aluminio en la aleación.

$$\text{Se tiene que: } M = (\rho_{\text{oro}} x + \rho_{\text{al}}(1 - x))V$$

$$x = (\frac{M}{V} - \rho_{\text{al}}) \frac{1}{\rho_{\text{oro}} - \rho_{\text{al}}}$$

$$x = (5 \times 10^3 - 2.3 \times 10^3)/(19.3 \times 10^3 - 2.3 \times 10^3) = \frac{2.7}{17} = .16$$

$$M_{\text{oro}} = .16 \times 19.3\,\text{kg} = 3.07\,\text{kg}$$

$$M_{\text{al}} = 5 - 3.07 \quad = 1.93\,\text{kg}$$

2. Un trozo de fundición de hierro pesa 300 [N] en el aire y 200 [N] en el agua. ¿Cuál es el vo-lumen de las cavidades en el trozo de hierro? Densidad del hierro: 7.8 gr/cm^3.

3. Una esfera que está flotando en mercurio tiene sumergida la cuarta parte de su volumen. Se agrega agua suficiente para cubrir la esfera. ¿Qué fracción de su volumen quedará sumergida en el mercurio?**Respuesta: 0.19**

4. Una boya cilíndrica de 10 000 kg. flota en posición vertical en el agua de un lago. El diámetro de la boya es de 1m.

   a. ¿En cuánto más se hundirá la boya al subirse en ella un nadador de masa 70 kg.?

   b. Calcular el período del movimiento armónico simple vertical que se produce cuando el nadador vuelve a lanzarse al agua.

5. Está cayendo agua desde una altura de 20 m. a razón de 0.4 m^3/s e impulsa una turbina. ¿Cuál es la máxima potencia que se puede obtener con esta turbina?

6. El agua en un embalse se encuentra a una altura H. ¿Cuál debe ser la altura por encima de O a la cual debiera actuar una fuerza F igual a la fuerza total sobre el dique para que produzca, con respecto a O, un torque igual al torque total que el agua ejerce sobre el dique?
Respuesta: H/3.

7. El borde superior de una compuerta vertical de un embalse enrasa con la superficie del agua. La compuerta tiene 1.8 m. de ancho y puede girar sobre goznes situados a lo largo del borde inferior, el cual se encuentra a 3 m. por debajo de la superficie del agua. ¿Cuál es el torque con respecto a los goznes?
Respuesta: 8100 Kp m.

8. Un estanque está lleno de agua hasta una altura H. Tiene un orificio en una de sus paredes a una profundidad h bajo la superficie del agua. Encontrar la distancia x a partir del pie de la pared a la cual llega el agua al piso.

Respuesta: 2h(H-h)

9. Un depósito cilíndrico de altura h = 1 m. está lleno de agua hasta los bordes. ¿Cuánto tiempo tardará en salir toda el agua a través de un orificio situado en el fondo del depósito? El área del orificio es 400 veces menor que la sección transversal del depósito.
Respuesta: 3 min.