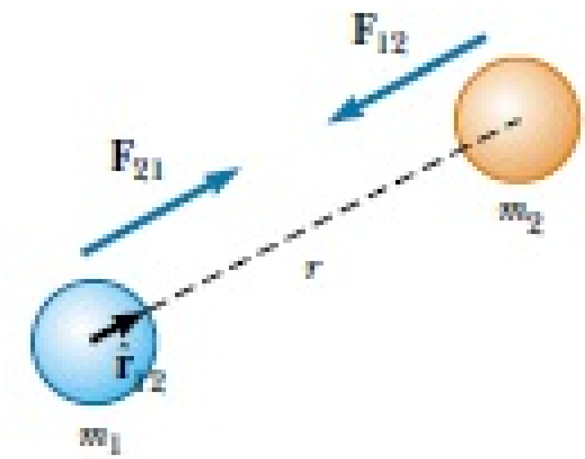
1 Ley de Gravitación de Newton

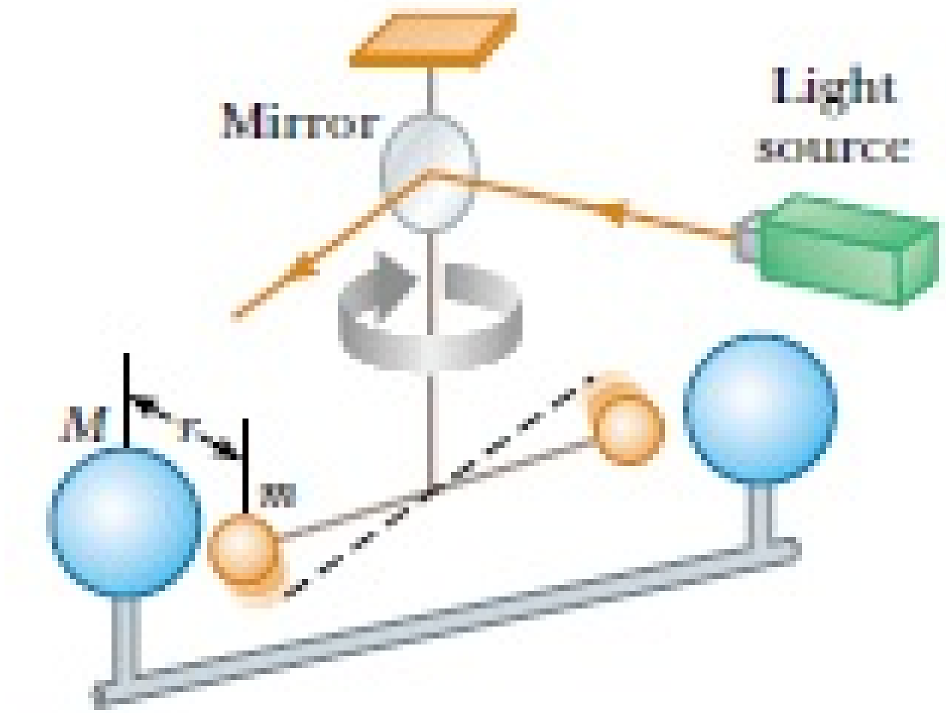
La fuerza gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r es

$$F_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{r_{12}}$$

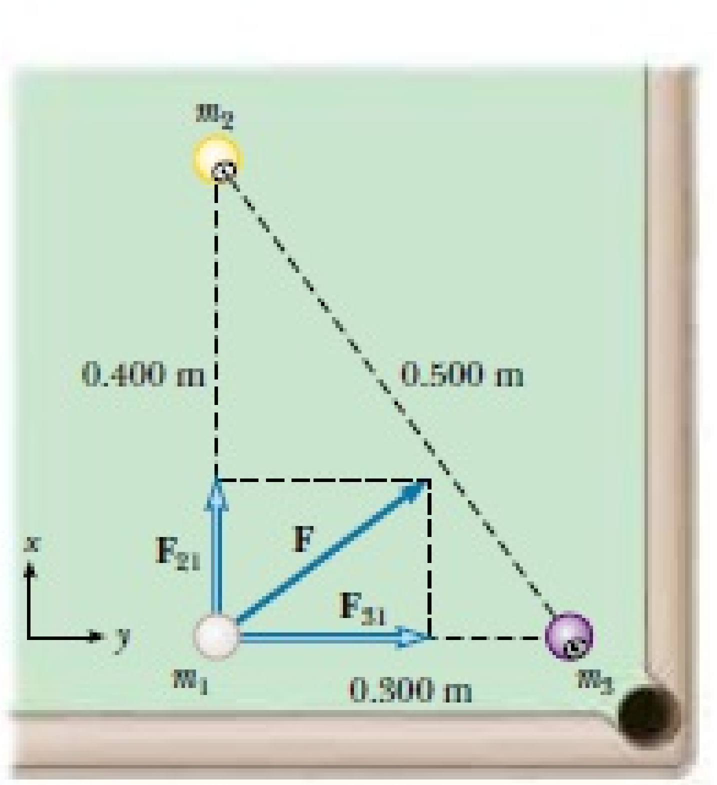
$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 / \mathrm{kg}^2$ es la constante de gravitación de Newton, $\widehat{r_{12}}$ es el vector unitario con origen en la partícula 1 y que apunta a la partícula 2.



2 Balanza de Cavendish



Ejemplo 1. 3 bolas de billar de 0.300-kg se ponen sobre una mesa en las posiciones que muestra la figura. Calcule la fuerza gravitacional sobre m_1 debida a las otras bolas.



$$F_x = 6.67 \times 10^{-11} \times 0.09 / 0.09 = 6.67 \times 10^{-11}$$

$$F_y = 6.67 \times 10^{-11} \times 0.09/0.16 = 3.75 \times 10^{-11}$$

3 Variación de la aceleración de gravedad con la altura

$$mg = \frac{GMm}{(R_T + h)^2}$$

$$g(h) = \frac{GM}{(R_T + h)^2}$$

Ejemplo 2. Densidad de la Tierra.

Sabiendo que $g = 9.8m/s^2$, encuentre la densidad de la Tierra

$$g = \frac{GM}{R_T^2}, \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3g}{4\pi G R_T} \quad , R_T = 6.4 \times 10^6 m$$

$$\rho = \frac{3x9.8}{4x3.14x6.67x10^{-11}x6,4x10^6} = \frac{29.4}{5.35}x10^3 = 5.5x10^3 \mathrm{kg}/m^3$$

4 La ley de gravitación y el movimiento de los planetas

aceleración de la Luna comparada con la aceleración g

$$\frac{a_L}{g} = \frac{(1/R_L)^2}{(1/R_E)^2} = \left(\frac{6.37 \times 10^6}{3.84 \times 10^8}\right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}$$

aceleración centrípeta de la Luna:

$$a_L = 2.7 \times 10^{-3} m/s^2$$

Cálculo directo:

$$a_L = \frac{v^2}{R_L} = \omega^2 R_L = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_L = 2.72 \times 10^{-3} m/s^2$$

Muy parecidas!

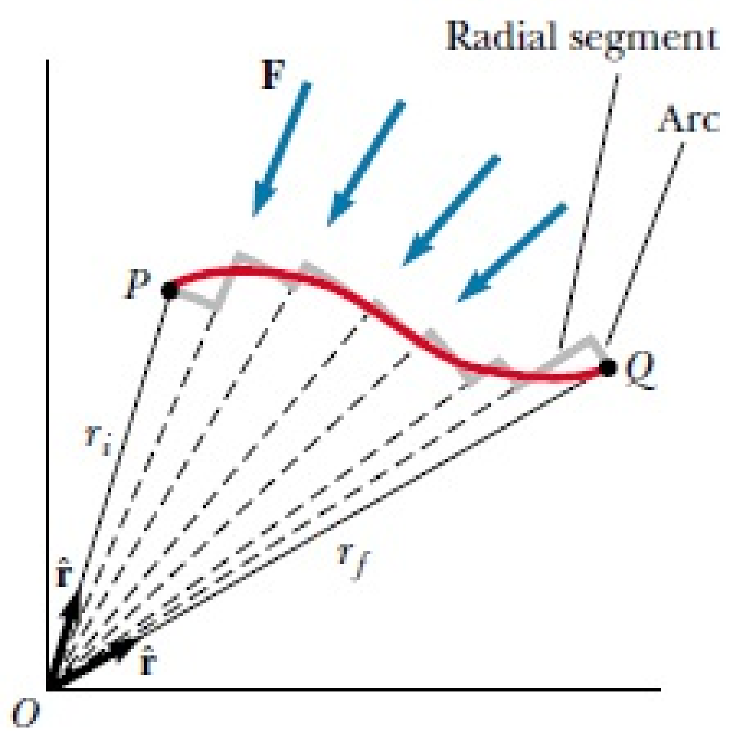
Ejemplo 3. Encuentre la masa del Sol, usando $T_T = 3.156 \times 10^7 s$,$D_T = 1.496 \times 10^{11} m$

$$\frac{4\pi^2}{GM} r^3 = T^2, M_S = \frac{4\pi^2}{GT_T^2} D_T^3$$

$$\frac{4x3.14^2x1.5^3x10^{33}}{6.7x10^{-11}3.2^2 10^{14}} = \frac{133.1}{68.6} x10^{30} = 1.9x10^{30}$$

R:1.99×10^{30}kg.

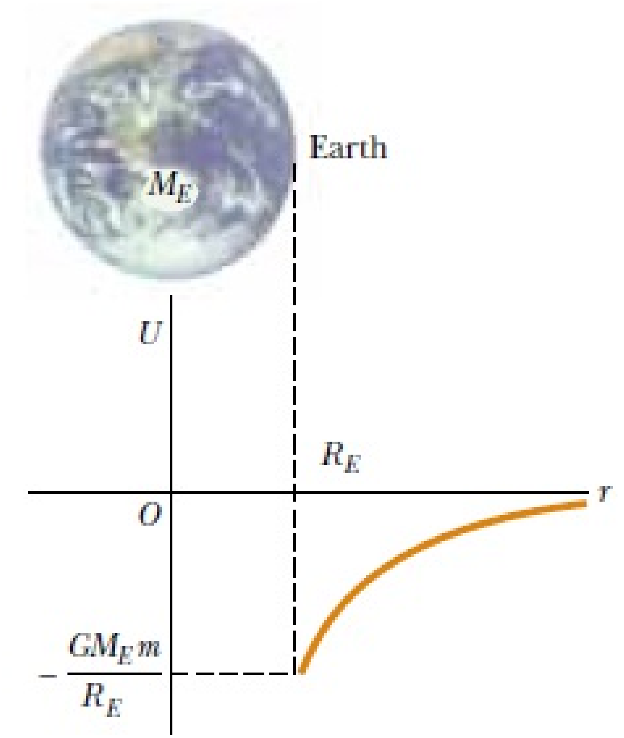
5 Energía potencial Gravitacional



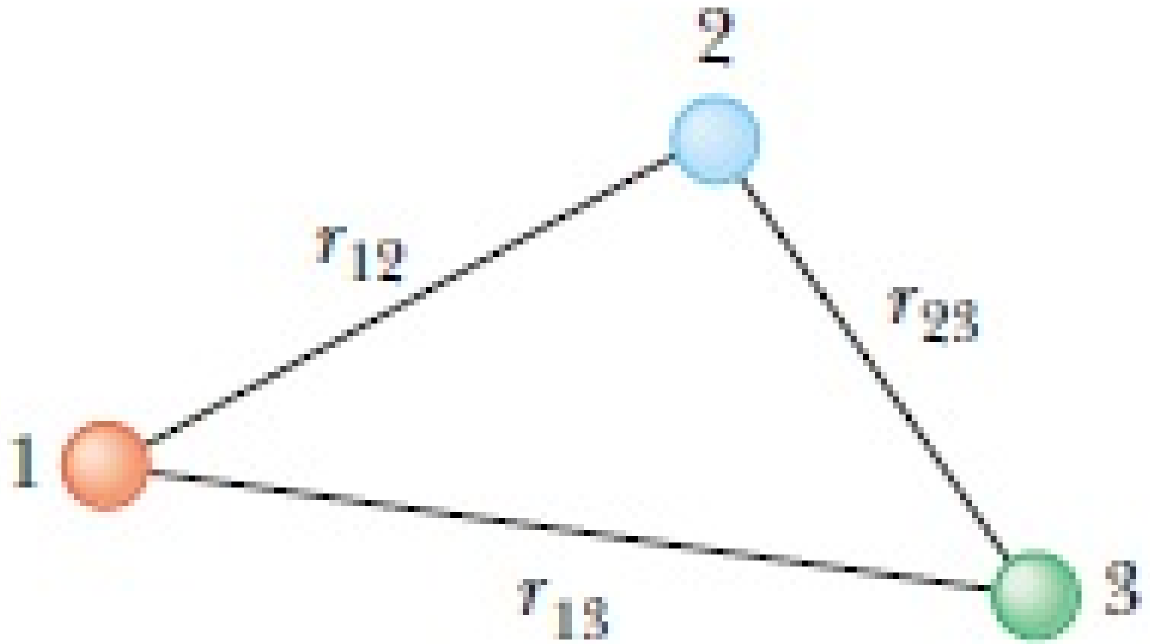
$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} dr\, F(r),\, F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

La energía potencial gravitacional está dada por:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}, U(\infty) = 0$$



Consideremos 3 partículas:



$$U_{\text{total}} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_{23}}{r_{23}}\right)$$

En general:

$$U = -G\iint d^3x_1 d^3x_2 \frac{\rho(\vec{x}_1)\rho(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Ejemplo 4. Encuentre la energía potencial gravitacional para una partícula de masa m a una distancia y sobre la superficie de la Tierra.

6 Energía en el movimiento de planetas y satélites

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Para un sistema acotado $E < 0$.

Ejemplo 5. Movimiento circular

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$
$$E = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r} = -K$$

Ejemplo 6. El space shuttle libera un satélite de comunicaciones de 470 kg. en una órbita 280 km. sobre la superficie de la Tierra. Un cohete del satélite pone a éste en una órbita geosincrónica, tal que el satélite está siempre sobre el mismo punto de la Tierra. Cuánta energía tuvo que proveer el cohete?

$$E_i = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_i}$$
$$m\omega_T^2 r_f = \frac{GmM}{r_f^2} \qquad r_f = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_T^2}} = 4.2 \times 10^7 m$$

$$E_f = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_f} = -\frac{1}{2}m\omega_T\sqrt{GM}$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r_i} - \omega_T\sqrt{GM}\right) \qquad r_i = 6.65\times 10^6 m$$

$$E_f - E_i = 1.19\times 10^{10} J$$

1 Velocidad de escape

Consideremos un cuerpo celeste esférico de masa M y radio R. Si disparamos una partícula radialmente hacia afuera con velocidad v_0, se tiene la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Si se impone que la partícula escape a $r=\infty$, debemos pedir que v sea cero en infinito. Por lo tanto $E=0$. Esto es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

v_0 es la velocidad de escape. Para la Tierra vale: $v_0 = 11.3\,\text{km}/s$.

La velocidad de escape revistirá vital importancia cuando discutamos la posibilidad de atmósfera en un cuerpo celeste. Como veremos más adelante (distribución de velocidades de Maxwell), a una temperatura T dada, siempre existe una proporción de moléculas que supera la velocidad de escape y se va del cuerpo celeste. Esta fuga de moléculas se acentúa al aumentar la temperatura o al disminuir M y es particularmente relevante para moléculas de masa pequeña.

Escape Velocity for Planets

	Velocity m/s	Velocity Km/s
Sun	618033.60	618.03
Mercury	4247.56	4.25
Venus	10360.79	10.36
Earth	11174.36	11.17
Mars	5021.09	5.02
Jupiter	59542.35	59.54
Saturn	35457.55	35.46
Uranus	21284.62	21.28
Neptune	23439.59	23.44
Moon	2375.18	2.38