1 Interferencia

Como adelantamos al discutir la diferencia entre partí culas y ondas, el principio de superposición da a lugar al fenómeno de interferencia.

Sean dos ondas idénticas que difieren en la fase $y_1(x,t) = A\,s\,e\,n(k\,x - \omega t)$, $y_2(x,t) = A\,s\,e\,n(k\,x - \omega t + \phi)$. Por superposición se tiene que:

$$y(x,t) = A\,s\,e\,n(k\,x - \omega t) + A\,s\,e\,n(k\,x - \omega t + \phi)$$

Usando:

$$s\,e\,n(a) + s\,e\,n(b) = 2c\,o\,s(\frac{a-b}{2})s\,e\,n(\frac{a+b}{2})$$

se tiene:

$$y(x,t) = 2A\,c\,o\,s(\frac{\phi}{2})s\,e\,n(k\,x - \omega t + \frac{\phi}{2})$$

Esta función representa una onda viajera, cuya amplitud depende de ϕ.

Interferencia destructiva: $\phi = (2n+1)\pi$, n entero.

Interferencia Constructiva: $\phi = 2\pi n$, **n entero.**

1.1 Ejemplo de interferencia de ondas sonoras

Dos altavoces separados por una distancia 2D se excitan por el mismo oscilador. A una distancia R medida sobre la perpendicular al punto medio entre los altavoces se encuentra una lí nea de escucha. Encontrar la intensidad del sonido a una distancia x sobre esta lí nea.

R:Necesitamos calcular la diferencia de camino entre las dos ondas de sonido debidas a los dos parlantes. Se tiene:

$$r_1 = \sqrt{(D-x)^2 + R^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(D+x)^2 + R^2}$$

La diferencia de fase está dada por:

$$\phi = k|r_1 - r_2|$$

Si $R >> D$, podemos simplificar la diferencia de fase. Se tiene:

$$\phi = 4k D\theta$$

donde θ está indicado en la figura.

2 Ondas Estacionarias

En esta clase, veremos como el principio de superposición permite entender el funcionamiento de variados instrumentos musicales y acústicos.

Para comenzar consideremos la onda que se establece por superposición entre una onda viajera hacia la derecha y una onda resultante de la reflexión de ésta con un obstáculo, que viaja hacia la izquierda. La resultante es:

$$y(x,t) = A\,sen(kx - \omega t) + A\,sen(kx + \omega t)$$

Usando

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$

se obtiene

$$y(x,t) = 2A\,sen(kx)cos(\omega t)$$

Esta ya no es una onda viajera (que es funci'on de (x-vt)). Es una onda estacionaria.

Nodos: Puntos de la onda que permanecen fijos para todo t.

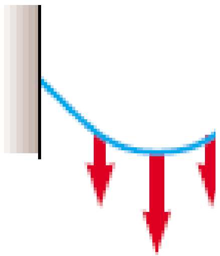
Están dados por:

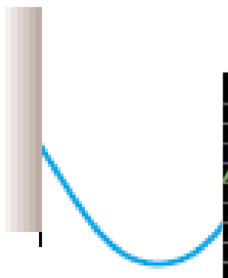
$$sen(kx) = 0, kx = n\pi, n\, entero$$

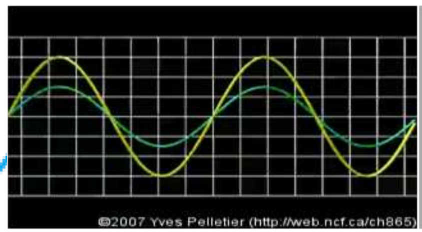
Antinodos: Puntos de la onda que corresponden a la máxima amplitud para un t dado.

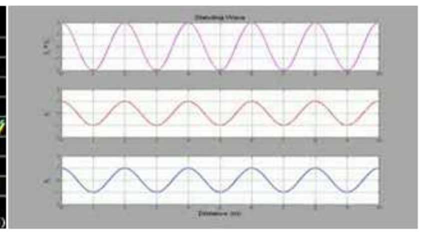
Se determinan por:

$$sen(kx) = \pm 1, kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\, entero$$









2.1 Energía en una onda estacionaria

Recordemos que la energí a en una cuerda oscilante se debe a dos razones: la velocidad instantánea de un punto de la cuerda (Energí a cinética) y a la energí a potencila debido a la deformación de la cuerda respecto a su punto de equilibrio. En los nodos de una onda estacionaria, ambos factores tienen un valor 0 y por lo tanto no se transmite energí a a través de un nodo. Por esto se habla de una onda estacionaria. Una onda viajera es capaz de transportar energí a lejos de la fuente.

3 Modos normales

Consideremos ondas estacionarias en una cuerda(o en un tubo acústico).
Distinguiremos tres situaciones:
1) Los dos extremos están fijos. Por lo tanto corresponden a nodos de la onda estacionaria.
Sea L el largo de la cuerda(o del tubo acústico). Se tiene que:

$$k L = n\pi , n\, e\, n\, t\, e\, r\, o$$

Esto es:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, n = 1, 2...$$

Sólo estas longitudes de onda se mantendrán en la cuerda con dos extremos fijos (modos normales).
Las frecuencias naturales asociados con estos modos son:

$$f_n = n\frac{v}{2L}, n = 1, 2..$$

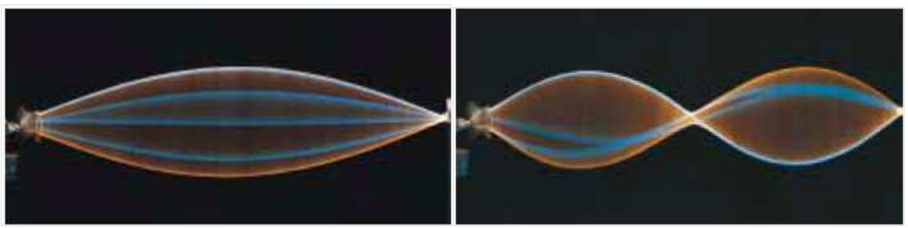
n=1 se llama la frecuencia fundamental y los otros el n-ésimo armónico.
Ej: Los tonos de una guitarra. Para una guitarra de densidada lineal de masa μ y tensión T se tiene:

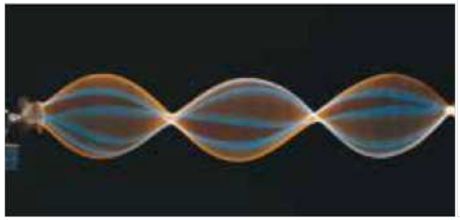
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

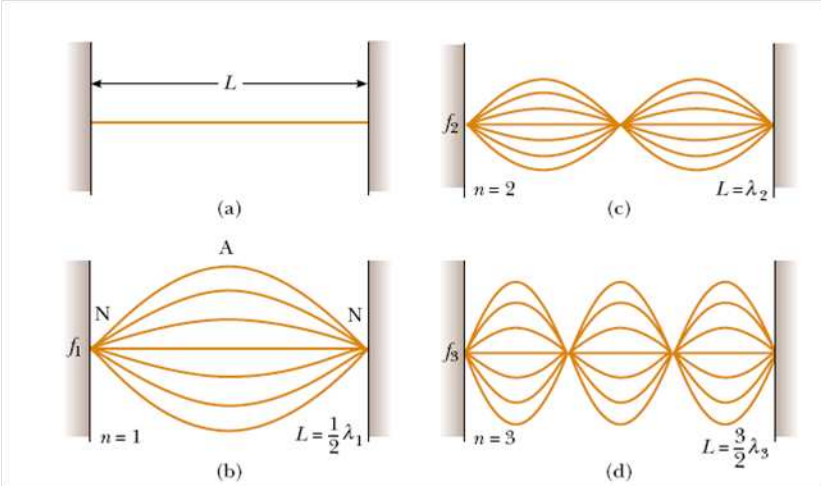
la frecuencia de los armónicos es:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En general, en un momento dado, la cuerda vibra con la frecuencia de varios armónicos, dependiendo de las condiciones iniciales.







2) Un extremo fijo y el otro libre. En este caso el extremo fijo debe ser un nodo y el libre un antinodo de la onda estacionaria. Calculando la distancia entre un nodo y un antinodo se encuentra que:

$$k\,L = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\,entero$$

Esto es:

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1}, n = 0, 1, 2...$$

3) Los dos extremos libres. Los dos extremos son antinodos. Se tiene que:

$$k\,L = n\pi, n\,entero$$

Esto es:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, n = 1, 2...$$

3.1 Resonancia

Es sabido que si una fuerza dependiente del tiempo de frecuencia ω se aplica sobre un sistema mecánico, la amplitud de oscilación será máxima cuando ω coincida con una de las frecuencias naturales del sistema.
Este mismo fenómeno se da en el caso de ondas estacionarias. Podemos excitar un determinado modo normal aplicando una fuerza exterior con la correspondiente frecuencia de oscilación.

4 Pulsaciones

Consideremos dos ondas que difieren levemente en frecuencia. Por simplicidad consideramos el punto x=0. Se tiene que $y_1(t) = A\ c\ o\ s(2\pi\nu_1 t)$, $y_2(t) = A\,c\,o\,s(2\pi\nu_2 t)$. Por superposición se tiene:

$$y(t) = A\,c\,o\,s(2\pi\nu_1 t) + A\,c\,o\,s(2\pi\nu_2 t)$$

Usando:

$$c\,o\,s(a) + c\,o\,s(b) = 2c\,o\,s(\frac{a+b}{2})c\,o\,s(\frac{a-b}{2})$$

se tiene;

$$y(t) = 2A\,c\,o\,s(\pi t(\nu_1 - \nu_2))c\,o\,s(\pi t(n\,u_1 + n\,u_2))$$

Vemos que ésta es una oscilación de frecuencia $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ cuya amplitud varí a en el tiempo con una frecuencia $\Delta\nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ .Estas se llaman pulsaciones. Los máximos de amplitud ocurren cuando

$$c\,o\,s(\pi t(\nu_1 - \nu_2)) = \pm 1$$

Es decir la frecuencia de pulsación es:

$$\nu_p = |\nu_1 - \nu_2|$$

5 Series de Fourier

Es posible mostrar que un movimiento periódico arbitrario que satisface determinadas condiciones de borde se puede escribir como una combinación lineal de senos y cosenos, llamada serie de Fourier.
En detalle, toda función periódica de perí odo T se puede desarrollar como:

$$f(t) = \sum_n \left(A_n s\,e\,n(2\pi n\frac{t}{T}) + B_n c\,o\,s(2\pi n\frac{t}{T})\right.$$

6 Ejercicios

Una de las cuerdas de una guitarra tiene un largo de 63.5cm y se afina para producir una nota de 110 Hz, cuando vibra en su modo fundamental. a) Calcule la velocidad v para las ondas en la cuerda. b) Si la tensión crece en 1%, ¿Cuál será la nueva frecuencia fundamental?

Resp.: a) 139.7 m/s, b) 110.54 Hz

14.- Un afinador de pianos estira una cuerda de un piano con una tensión de 600 N. Si la cuerda tiene un largo de 40 cmy una masa de 5 g, ¿Cuál es la frecuencia y órden del máximo armónico que puede oir una persona, cuyo límite auditivo superior es 10 kHz?

Resp.: a) 219m/s, b) 9855 Hz, n = 36.

15.- La porción de una cuerda de cello entre el puente y el extremo superior del diapasón es de 60 cm y tiene una masa de 2.0 g. La cuerda produce un "La" (440 Hz). a) ¿A qué distancia del puente debe poner el dedo el cellista para tocar una nota "Si" (494 Hz)? b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? c) ¿A qué tensión se debe reafinar la cuerda para poder tocar con la misma una nota "Re" (294 Hz)?

Resp.: a) 6.6 cm, b) 929.28 N, c) 414.9 N

16.- Un alambre de 2 m de largo, fijo en ambos extremos, vibra en su modo fundamental. La tensión es de 40 N y la masa es 0.1 Kg. El punto medio vibra con amplitud máxima 2 cm. a) ¿Cuál es la máxima energía cinética en el alambre? b) ¿En qué posición del alambre la energía cinética por unidad de largo es máxima? c) ¿En qué posición del alambre la energía potencial por unidad de largo es máxima?

Resp.:

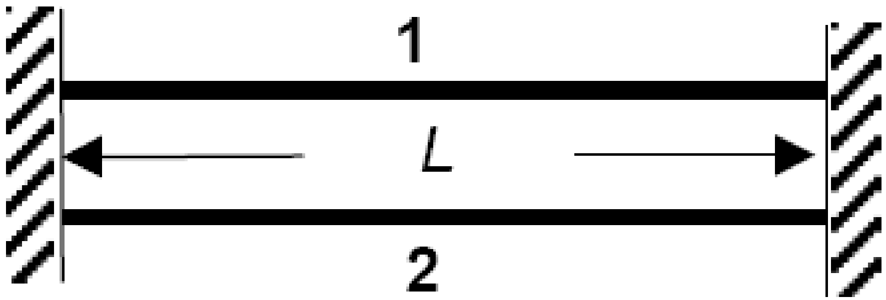
17.- Un hilo de 1.6 m de longitud se mantiene fijo en ambos extremos, con una onda estacionaria que posee dos antinodos. El hilo vibra con una frecuencia de 7.2 Hz. a) Escriba una expresión para la función de onda correspondiente. b) ¿En qué punto del hilo está el orígen de coordenadas x e y? c) El instante$t = 0$ corresponde a: ¿I) hilo recto, II) máximo desplazamiento de alguno de sus elementos, III) otra configuración?

Resp.:

18.- Una cuerda de longitud L y masa M se suspende libremente desde el techo. Demostrar que el tiempo t para que una onda transversal recorra la longitud de la cuerda es $t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$.

19.- La función de onda de una forma arbitraria que viaja en la dirección $+x$ es y = f(x - vt). Demostrar que la densidad de energía cinética de dicha onda es igual a su densidad de energía potencial, es decir: $\frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\frac{\Delta K}{\Delta x} = 2\frac{\Delta U}{\Delta x} = \mu(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = F(\frac{\partial y}{\partial x})^2$, donde μ es la densidad de masa y F es la tensión.

23.- (Control #3, Sem. 1-2000) Considere dos cuerdas de idéntico largo L, del mismo material y espesor, que se encuentran tensas entre dos paredes rígidas, como muestra la figura. La cuerda 1 se encuentra sometida a una tensión T. Al vibrar la cuerda 1 en un modo normal correspondiente a la segunda armónica (n = 3), se observa que la cuerda 2 entra en resonancia en su modo fundamental (n = 1).



Para estas condiciones encuentre:

a) Longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda 1.

b) Longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda 2.

c) Tensión de la cuerda 2.

NOTA: en a) y b) exprese su resultado en términos de L, y en c) en términos de T.
Resp: a) 2/3L, b) 2L, c) 9T.