

### Problema 1

En el festival de nieve y hielo de Harbin, China, un escultor a creado una estatua de un esquiador de 200 kg de masa hecha completamente de hielo que se encuentra a una temperatura de  $-5^{\circ}\text{C}$ . Para demostrar la estabilidad de la estatua, el escultor le solicita a un asistente que deslize la estatua de hielo sobre una superficie inclinada  $30^{\circ}$  sobre la horizontal por distancia total de 8 m. Desafortunadamente, el escultor no consideró que la energía térmica que se produce por fricción prodría ocasionar estragos en su escultura. Si el coeficiente de fricción entre la estatua de hielo y el plano inclinado es 0.05. Determine la cantidad de masa de hielo de la estatua se derrite durante el deslizamiento. (Datos:  $c_{\text{hielo}}=2090 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ ;  $c_{\text{agua}}=4186 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ ;  $L_{f, \text{agua}}=3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}$ )

### Solución:

Según el problema planteado, el hielo de la estatua se debiese derretir debido al trabajo realizado por la fuerza de roce mientras la estatua se desliza. Entonces, el trabajo realizado por la fuerza de roce es:

$$\begin{aligned} W_{f_{\text{roce}}} &= f_r d \\ &= \mu N d \\ &= \mu m g \cos 30 d \\ &= 0,05 \cdot 200 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30 \cdot 8 \text{ m} \\ &\sim 674 \text{ J} \end{aligned}$$

(2 pto.)

Luego, para que se derrita el hielo, necesariamente se debe aumentar la temperatura de la estatua de  $-5^{\circ}\text{C}$  a  $0^{\circ}\text{C}$ . (1 pto.)

Para ello, analizemos la energía necesaria que debe ser transferida para que esto ocurra:

$$\begin{aligned} Q &= m_h c_h \Delta t \\ &= 200 \text{ kg} \cdot 2090 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 5 \text{ K} \\ &= 2090 \text{ kJ} \end{aligned}$$

(1pto)

Esta energía es mucho mayor que la producida por la fricción, por ende, la estatua no alcanza a elevar su temperatura hasta el punto de fusión, por lo tanto, la cantidad de masa de hielo que se derrite es nula. (2pto)



P1	P2	P3	P4	Nota

## Interrogación Nro. 1

### Nombre: Pauta Problema 2

Un sistema consistente en 1 kg de gas ideal a  $500 \text{ kPa}$  de presión y  $0,02 \text{ m}^3$  de volumen ejecuta un proceso cíclico que comprende las siguientes tres etapas: (i) expansión hasta  $0,08 \text{ m}^3$  de volumen y  $150 \text{ kPa}$  de presión, bajo la condición de que la presión varía linealmente con el volumen ( $P = aV + b$ ), (ii) enfriamiento a presión constante y (iii) compresión de acuerdo a la ley  $PV = \text{constante}$  que lleva al sistema de vuelta a las condiciones iniciales.

- 1) Determinar las constantes  $a$  y  $b$  de la relación  $P(V)$  durante la primera etapa del ciclo.
- 2) Determinar el valor de la presión a la cual se ejecuta la compresión del sistema.
- 3) Dibujar el ciclo termodinámico planteado en el diagrama  $P - V$ , indicando (sobre los ejes coordenados) los valores de las variables termodinámicas en puntos representativos del ciclo.
- 4) Calcular el trabajo realizado en cada una de las etapas e indicar si el trabajo es hecho por el sistema o por el entorno.
- 5) Calcular la energía neta transferida entre el sistema y su entorno en forma de calor e indicar el sentido en que se transfirió.

- 1) La relación  $P = aV + b$  debe verificar las siguientes ecuaciones:

$$500 = a \times 0,02 + b \qquad 150 = a \times 0,08 + b$$

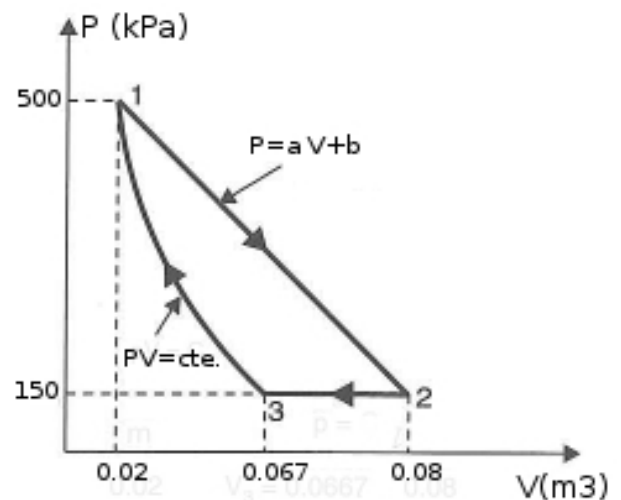
Las soluciones para este sistema de ecuaciones son:

$$a = -\frac{350}{0,06} \longrightarrow a = -5833,3 \text{ kPa/m}^3 \qquad b = 500 + 5833,3 \times 0,02 \longrightarrow b = 616,7 \text{ kPa}$$

- 2) La segunda etapa es un enfriamiento a presión constante y el estado 2 es el estado inicial de la etapa, por tanto la presión de la etapa es  $P_{2 \rightarrow 3} = 150 \text{ kPa}$ .

3)

$$P_1 V_1 = P_3 V_3 \longrightarrow V_3 = \frac{P_1}{P_3} V_1 = 0,067 \text{ m}^3$$



4)

$$\mathbf{W}_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 P(V) dV = \int_1^2 (-5833,2 V + 616,7) dV = \left( -\frac{5833,3}{2} v^2 + 616,7 V \right)_{0,02}^{0,08} = \mathbf{19,5 \text{ kJ}}$$

$W_{1 \rightarrow 2}$  es hecho por el sistema.

$$\mathbf{W}_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 P_2 dV = P_2 (V_3 - V_2) = \mathbf{-1,95 \text{ kJ}}$$

$W_{2 \rightarrow 3}$  es hecho por el entorno.

$$\mathbf{W}_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P(V) dV = \int_1^2 \frac{P_1 V_1}{V} dV = P_1 V_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right) = \mathbf{-12,05 \text{ kJ}}$$

$W_{3 \rightarrow 1}$  es hecho por el entorno

5) Según la 1ra. Ley, para un ciclo  $\Delta U = 0$  y, en consecuencia,  $Q_{neto} = W_{neto}$ . Así,

$$\mathbf{Q_{neto} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = 5.50 \text{ kJ}}$$

Durante el ciclo entra energía al sistema en forma de calor.

Asignación de puntaje:

- 1) 0.5 pto.
- 2) 0.5 pto.
- 3) 1.5 ptos.
- 4) 2.0 ptos.
- 5) 1.5 ptos.

## Pauta Problema 3

A  $0^\circ\text{C}$  el mercurio llena el depósito completamente, por lo que se tiene que

$$V_{Hg,0} = V_{D,0} = \frac{4\pi R_0^3}{3} \equiv V_0.$$

Similarmente, el área inicial de la base del tubo es

$$\begin{aligned} A_0 &= \pi \left( \frac{d_0}{2} \right)^2 \\ &= 1.96 \times 10^{-7} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Al aumentar la temperatura en  $\Delta T$ , el mercurio y el depósito se expanden volumétricamente, mientras que para la base del tubo consideramos la expansión superficial. Las cantidades correspondientes cambian según

$$\begin{aligned} V_{Hg} &= V_0 (1 + \beta_{Hg} \Delta T), \\ V_D &= V_0 (1 + \beta_V \Delta T), \\ A_T &= A_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \beta_V \Delta T \right), \quad (2.5 \text{ ptos.}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que, para una expansión isotrópica, el coeficiente de expansión superficial es

$$\gamma = \frac{2}{3} \beta.$$

Ahora, el volumen final del mercurio es igual al volumen final del depósito más el volumen que ocupa dentro del tubo, es decir,

$$V_{Hg} = V_D + A_T h, \quad (2.5 \text{ ptos.})$$

donde  $h$  es la altura final de la columna de mercurio. De aquí despejamos

$$\begin{aligned} V_0 (1 + \beta_{Hg} \Delta T) &= V_0 (1 + \beta_V \Delta T) + A_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \beta_V \Delta T \right) h, \\ V_0 &= \frac{A_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \beta_V \Delta T \right) h}{(\beta_{Hg} - \beta_V) \Delta T} \\ &= \frac{5\pi d_0^2 \left( 1 + \frac{2}{15} \beta_{Hg} \Delta T \right) h}{16\beta_{Hg} \Delta T} \\ &= 6.74 \times 10^{-6} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

En la penúltima línea usamos que  $\beta_V = \beta_{Hg}/5$  además de la expresión anterior para el área inicial del tubo. Finalmente, el radio es

$$\begin{aligned} R_0 &= \left( \frac{3V_0}{4\pi} \right)^{1/3} \\ &= \left( \frac{15d_0^2 \left( 1 + \frac{2}{15}\beta_{Hg}\Delta T \right) h}{64\beta_{Hg}\Delta T} \right)^{1/3} \\ &= 1.17 \times 10^{-2} \text{ m.} \quad (1 \text{ ptos.}) \end{aligned}$$

Hay que considerar un posible error de arrastre si los valores de  $A_0$  y  $V_0$  calculados en los pasos intermedios son incorrectos.

**Problema 4:**

Datos del problema:

Radio del cilindro  $r = 5$  cm.

Presión inicial  $P_i = 101$  kPa.

largo inicial de la porción del cilindro con gas  $l_i = 20$  cm.

Es un gas ideal.

i)

El volumen de la región con gas es  $V = \pi r^2 l$ , donde  $l$  es el largo de la porción del cilindro que contiene el gas. En particular el volumen inicial esta dado por  $V_i = \pi r^2 l_i$ . En el estado inicial y final el gas se encuentra en equilibrio termodinámico. Luego, como es un gas ideal, las ecuaciones de estado son

$$P_i V_i = n R T_i \quad \text{y} \quad P_f V_f = n R T_f,$$

donde  $V_f, P_f, T_i, T_f$  y  $n$  son el volumen final, la presión final, temperatura inicial, temperatura final y número de moles, respectivamente. El numero de moles no varia por ser un contenedor cerrado, además por enunciado se tiene que  $T_i = T_f$  y  $V_f = 2V_i$ . De lo anterior se encuentra que

$$P_f V_f = P_i V_i \rightarrow P_f = P_i \frac{V_i}{V_f} = P_i/2. \quad (1)$$

(0.8 pts)

Por otra parte se tiene que el resorte esta inicialmente en su largo natural, por lo tanto, la fuerza que realiza el resorte sobre el pistón para un largo  $l$  esta dado por

$$F_{\text{resorte}}(l) = k(l - l_i). \quad (2)$$

Dado que el volume final  $V_f = 2V_i$  el largo final de la porción del cilindro con gas es

$$l_f = \frac{V_f}{\pi r^2} = 2 \frac{V_i}{\pi r^2} = 2l_i. \quad (3)$$

Para que el sistema se encuentre en equilibrio mecánico con un largo  $l_f$ , la fuerza que ejerce el gas sobre el pistón debe ser igual a la fuerza que ejerce el resorte sobre el pistón

$$F_{\text{resorte}}(l_f) \equiv k(l_f - l_i) = P_f \pi r^2.$$

(0.8 pts)

Despejando la constante elástica de la ecuación anterior se encuentra  $k = \frac{\pi r^2 P_f}{(l_f - l_i)}$ . Usando los resultado obtenidos en (3) y (1) se tiene

$$k = \frac{\pi r^2 P_i}{2l_i} = 1983,13 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

(0.4 pts)

ii)

El trabajo realizado por el gas

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \equiv \int_{l_i}^{l_f} F_{\text{gas}} dl.$$

(0.6 pts)

La ecuación de movimiento para el pistón en términos de  $l$  esta dada por

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = F_{\text{gas}} - F_{\text{resorte}},$$

(0.6 pts)

donde  $m$  es la masa del pistón. Luego el trabajo realizado por el gas

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{l_i}^{l_f} (F_{\text{resorte}} + m \frac{d^2 l}{dt^2}) dl \\
 &= \int_{l_i}^{l_f} F_{\text{resorte}} dl + \int_{l_i}^{l_f} m \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{dt} \right)}_v dl \\
 &= \int_{l_i}^{l_f} k(l - l_i) dl + \int_{l_i}^{l_f} m \frac{dv}{dt} dl \\
 &= k(l^2/2 - l_i l) \Big|_{l_i}^{l_f} + m \underbrace{\frac{v^2}{2}}_0 \Big|_{l_i}^{l_f} \\
 &= \frac{k}{2}(l_f - l_i)^2 = \frac{k}{2}l_i^2 = 39,66J.
 \end{aligned} \tag{4}$$

(1.3 pts)

En las ecuaciones anteriores se utilizó que  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} = v \frac{dv}{dl}$ , luego como la velocidad inicial y final del pistón es cero la segunda integral no contribuye al trabajo. Como en el enunciado no se hace referencia a la masa del pistón  $m$ , también se podía suponer que era cero luego el cálculo anterior se simplifica y entrega el mismo resultado.

#### Manera alternativa:

Toda la energía entregada por el gas en forma de trabajo mecánico  $W$  es absorbido por el resorte, luego  $W$  es igual a la variación de energía potencial elástica

$$W = \Delta U_{\text{elástica}} = U_{\text{elástica final}} - \underbrace{U_{\text{elástica inicial}}}_0 = \frac{k}{2}(l_f - l_i)^2 = \frac{k}{2}l_i^2.$$

Evaluando  $W = 39,66J$

iii)

Por primera ley se tiene que  $\Delta U = Q - W$ . Para un gas ideal la variación de energía interna es proporcional a  $\Delta T$ , dado que  $T_i = T_f$  se tiene que

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

(1 pts)

Evaluando  $Q = 39,66J$ .

(0.5 pts)