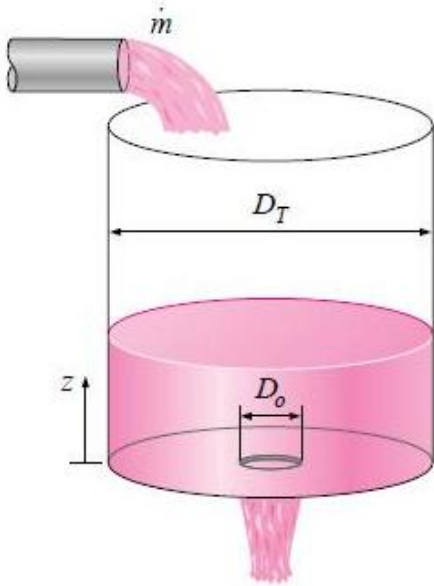


Problema:

Considere un estanque de diámetro $D_T = 2$ m y altura $H = 1$ m, que posee un orificio de diámetro D_0 en su parte inferior como se muestra en la figura. Una llave de agua entrega un flujo de masa constante $\dot{m} = \pi$ kg/s al estanque. La velocidad V_s de salida del agua por el orificio inferior es proporcional a la altura del agua z , es decir $V_s = az$ donde $a = 10 \text{ s}^{-1}$ es una constante. La densidad del agua es $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ y D_0 se considera un dato del problema.

- Calcule la altura del agua en el estanque una vez que se alcanza el régimen estacionario.
- Suponga que inicialmente el estanque está vacío, determine la evolución de la altura $z(t)$ con el tiempo. cuánto tiempo tarda el sistema en llegar al régimen estacionario?
- Determine el valor crítico de D_0 tal que el estanque nunca se llena.
- Calcule el tiempo de llenado para $D_0 = 0,01$ m.



Hint: La solución de la ecuación diferencial $\frac{dz(t)}{dt} = A - Bz(t)$ es $z(t) = \frac{A}{B} + e^{-Bt}C$, donde C es la constante de integración.

Solución

a) conservación de la masa:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s.$$

Se tiene que $\dot{m}_e = \dot{m} = \pi$ kg/s y $\dot{m}_s = \rho\pi(\frac{D_0}{2})^2 V_s = \rho\pi(\frac{D_0}{2})^2 az$. el régimen estacionario se alcanza cuando $\frac{dm_{vc}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{m}_e = \dot{m}_s$ reemplazando se obtiene que la altura estacionaria está dada por $z_{\text{est}} = \frac{4}{\rho a D_0^2} = \frac{4}{10^4 D_0^2}$.

b) Para encontrar la evolución debemos resolver la ecuación de conservación

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \pi - \pi\rho a \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 z.$$

La masa del volumen de control $m_{vc} = \rho\pi(\frac{D_T}{2})^2 z = \rho\pi z$, luego obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\rho} - a \frac{D_0^2}{4} z.$$

cuya solución está dada por

$$z(t) = \frac{4}{\rho a D_0^2} (1 - e^{-\frac{a D_0^2}{4} t}) = \frac{4}{10^4 D_0^2} (1 - e^{-\frac{10 D_0^2}{4} t})$$

El sistema se aproxima exponencialmente al punto estacionario por lo que le toma un tiempo infinito llegar a este.

c) El máximo valor que puede alcanzar $z(t)$ está dado por $\frac{4}{\rho a D_0^2} = z_{\text{est}}$ luego para que el estanque nunca se llene $\frac{4}{\rho a D_0^2} < H = 1 \Rightarrow D_0 > \sqrt{\frac{4}{\rho a}} = \sqrt{\frac{4}{10^4}} = 0,02$ m.

d) Tomando $D_0 = 0,01$ m el tiempo de llenado esta dado por $z(t) = H = 1$ m, luego

$$t = -\frac{4}{aD_0^2} \log\left(1 - \frac{\rho a D_0^2}{4}\right) \approx 1150 \text{ s.}$$