



P1	P2	P3	P4	Nota

Tiempo: 120 minutos

Se puede usar calculadora.

No se puede usar celular.

Preguntas de enunciado en voz alta durante los primeros 90 minutos.

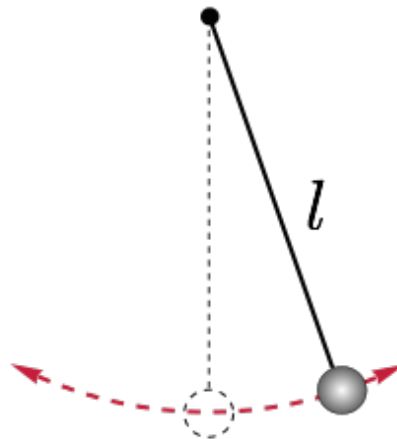
Si usa lápiz mina no podrá pedir corrección. No se puede prestar nada.

Interrogación Nro. 1

Nombre: _____

Problema 1

Se quiere usar el período de un péndulo simple como propiedad termométrica para definir una escala lineal de temperatura centígrada, es decir, que marque 0° a la temperatura de fusión del hielo y 100° a la temperatura de evaporación del agua (a presión atmosférica). El período está dado por $\tau = 2\pi(l/g)^{1/2}$, donde l es la longitud de la barra, en este caso de aluminio ($\alpha = 2,45 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), y $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de gravedad. Sabiendo que la longitud del péndulo a 0°C es de 1 m , determine la temperatura que marca el termómetro cuando el período es de $2,007 \text{ s}$. ¿A qué temperatura corresponde en $^\circ\text{C}$? Si el péndulo está suspendido a 1 cm del suelo, ¿cuál es la temperatura máxima que éste puede medir? ¿A qué temperatura corresponde en $^\circ\text{C}$? Trabaje con cinco cifras decimales; para cada número que calcule, siempre trunque antes de reemplazar.



Solución:

La escala de temperatura que estamos definiendo debe ser lineal en el período. Además debe marcar 0° cuando el largo del péndulo es $l_0 = 1 \text{ m}$ y 100° cuando el largo del péndulo es

$$\begin{aligned} l_{100} &= l_0 (1 + \alpha \cdot 100^\circ\text{C}) \\ &= 1,002450 \text{ m} . \quad (0.5 \text{ pts.}) \end{aligned}$$

Luego,

$$T(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_{100} - \tau_0} 100^\circ, \quad (0.5 \text{ pts.})$$

donde los períodos correspondientes son $(\tau = 2\pi (l/g)^{1/2})$

$$\tau_0 = 2,006067 \text{ s}, \quad (0.5 \text{ pts.})$$

$$\tau_{100} = 2,008522 \text{ s}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Evalutando para $\tau = 2,007 \text{ s}$ obtenemos

$$T(2,007) = 38,004073^\circ. \quad (1 \text{ pto.})$$

El péndulo toca el suelo cuando el largo es $l = 1,01 \text{ m}$. El período correspondiente es

$$\tau_{max} = 2,016072 \text{ s}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Entonces, la temperatura máxima que mide el péndulo es

$$\begin{aligned} T_{max} &= T(\tau_{max}) \\ &= 407,535642^\circ. \end{aligned} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Para calcular las temperaturas en grados Celcius, invertimos la relación

$$l(T_C) = l_0 (1 + \alpha (T_C - T_0)) , \quad \Rightarrow \quad T_C(l) = T_0 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right). \quad (0.5 \text{ pts.})$$

El largo del péndulo para $\tau = 2,007 \text{ s}$ es

$$\begin{aligned} l &= \frac{g\tau^2}{4\pi^2} \\ &= 1,000931 \text{ m}. \end{aligned} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Así,

$$T_C(1,000931) = 38^\circ C. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

La temperatura máxima en Celcius es

$$T_C(1,01) = 408,163265^\circ C. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

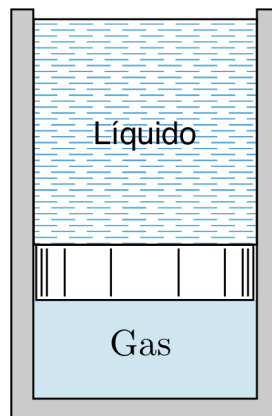
Nombre: _____

Problema 2

Un contenedor cilíndrico de altura h se llena con un gas ideal monoatómico y un líquido de densidad ρ , como muestra la figura. El gas y el líquido están separados por un pistón de masa y volumen despreciables que se mueve libremente. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio a temperatura ambiente, con el gas a volumen V_1 y presión P_1 . Se enciende un mechero que entrega calor al gas hasta que éste se expande a un volumen V_2 , derramando una cierta cantidad de líquido. Tras apagar el mechero se espera que el pistón encuentre su posición final de equilibrio. Asuma que el proceso es cuasiestático y que el pistón es aislante, de manera que las propiedades termodinámicas del líquido no varían. Ignore la presión atmosférica.

- Encuentre la presión del gas en función de su volumen (en cada una de las etapas) y grafique el proceso en un diagrama $P - V$, marcando claramente los valores de V y P en cada punto.
- Calcule el trabajo realizado por el gas durante la expansión y el calor entregado por el mechero.
- Calcule el calor total que intercambié el gas en el proceso completo.

Escriba todos sus resultados en términos de los datos del problema: h , ρ , V_1 , P_1 y V_2 .



Solución:

Como el proceso es cuasiestático, la presión del gas debe ser igual a la presión al fondo del líquido, es decir,

$$P = \rho g h_l,$$

donde h_l es la altura que ocupa el líquido. Mientras el gas se expande el líquido siempre llega hasta el tope del contenedor (derramándose en el proceso), por lo que esta última variable se relaciona con el volumen V que ocupa el gas por

$$\begin{aligned} h_l &= h - h_g, \\ &= h - \frac{V}{A}. \end{aligned}$$

Luego,

$$P(V) = \rho g \left(h - \frac{V}{A} \right). \quad (1 \text{ pto.})$$

El área del cilindro se puede eliminar usando la condición inicial:

$$P(V_1) = P_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\rho g V_1}{\rho g h - P_1}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

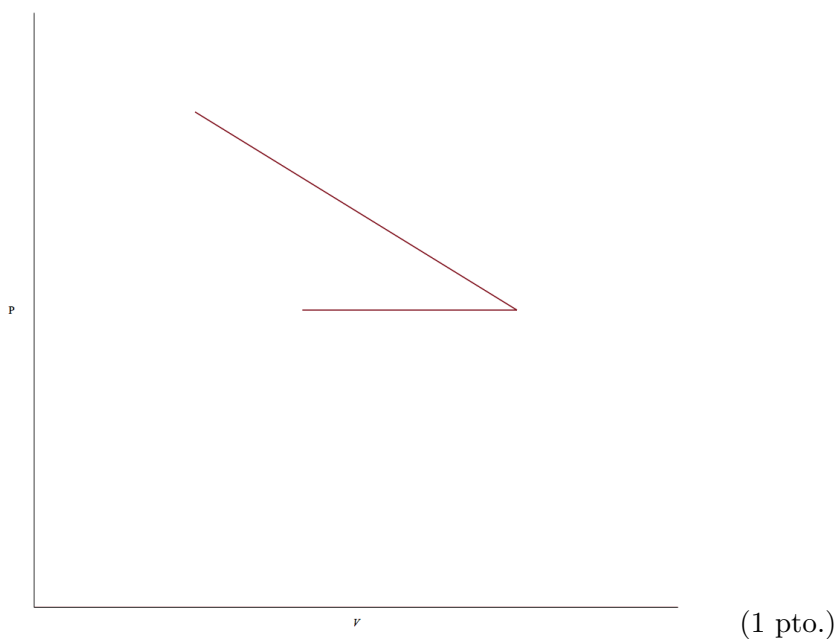
El gráfico en el diagrama $P - V$ es una recta con pendiente $-\rho g/A < 0$, que intersecta el eje P en $P = \rho g h$ y el eje V en $V = Ah$. Después de apagar el mechero, el gas se comprime a presión constante

$$P_2 = \rho g \left(h - \frac{V_2}{A} \right), \quad (0.5 \text{ pts.})$$

ya que la cantidad de líquido no cambia, hasta alcanzar la temperatura ambiente, que es la temperatura inicial. Así, el volumen final del gas es

$$\begin{aligned} P_3 V_3 &= P_1 V_1, & P_3 &= P_2, \\ V_3 &= \frac{P_1 V_1}{\rho g \left(h - \frac{V_2}{A} \right)}. \end{aligned} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

En el gráfico esta parte del proceso es una recta horizontal entre V_2 y V_3 .



El trabajo que realiza el gas al expandirse es

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV \\ &= \rho g \int_{V_1}^{V_2} \left(h - \frac{V}{A} \right) dV \\ &= \rho g \left(h (V_2 - V_1) - \frac{1}{2A} (V_2^2 - V_1^2) \right). \end{aligned} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Al comprimirse tenemos

$$\begin{aligned} W_{23} &= P_2 (V_2 - V_3), \\ &= P_2 V_2 - P_1 V_1 \\ &= \rho g \left(h (V_2 - V_1) - \frac{1}{A} (V_2^2 - V_1^2) \right). \end{aligned} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

De la primera ley deducimos que

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12},$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta U_{12} &= \frac{3}{2} n R \Delta T \\ &= \frac{3}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) \\ &= \frac{3}{2} \rho g \left(h (V_2 - V_1) - \frac{1}{A} (V_2^2 - V_1^2) \right) . \quad (0.5 \text{ pts.})\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$Q_{12} = \rho g \left(\frac{5}{2} h (V_2 - V_1) - \frac{2}{A} (V_2^2 - V_1^2) \right) . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Para el proceso completo la energía interna del gas no cambia, por lo tanto,

$$\begin{aligned}Q_{13} &= W_{13} \\ &= W_{12} - W_{23} \\ &= \frac{\rho g}{2A} (V_2^2 - V_1^2) . \quad (0.5 \text{ pts.})\end{aligned}$$

Nombre: _____

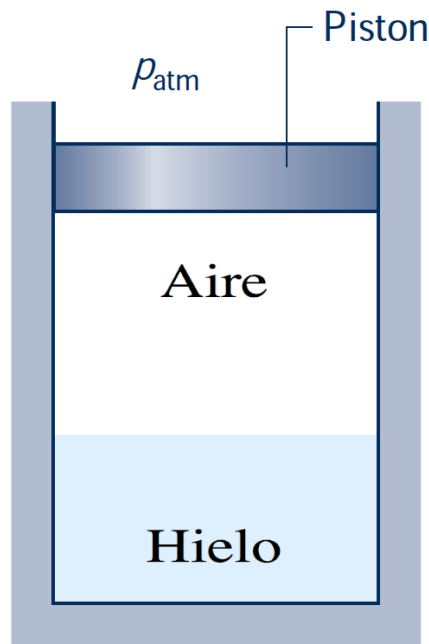
Problema 3

En un cilindro aislante se encierran 10 moles de aire junto con 10 g de hielo . La parte superior está cerrada por un pistón movable de masa despreciable como se muestra en la figura. Inicialmente el hielo se encuentra a una temperatura de 0°C y el aire a una temperatura 30°C . Considere que el flujo de calor entre el hielo y el aire es suficientemente lento de manera que el proceso es cuasiestático.

- Determine la temperatura de equilibrio.
- Calcule la variación de energía interna total del sistema y la variación de energía interna del agua .

El aire se puede aproximar por un gas ideal monoatómico. Trabaje con cinco cifras decimales.

Datos: calor latente de fusión del hielo $L_f = 3,33 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, densidad del hielo $\rho_h = 916 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, densidad del agua $\rho_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (considere que la densidad del agua líquida no varía con la temperatura), calor específico del agua $c_{\text{agua}} = 4,19 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, constante universal de los gases $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ y $p_{\text{atm}} = 100\text{kPa}$.



Solución:

- a) El sistema está aislado por lo que el calor total que entra o sale del sistema es cero y

$$Q_{H_2O} = -Q_{\text{aire}}, \quad (0.5 \text{ pts.}) \quad (1)$$

donde Q_{H_2O} es el calor que entra al hielo y Q_{aire} el calor que entra al aire. La cantidad de calor necesaria para derretir todo el hielo que se encuentra a 0°C y aumentar la temperatura del agua a T está dado por

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O}(L_f + c_{\text{agua}}T), \quad (1 \text{ pts.})$$

donde la masa del agua $m_{H_2O} = 10\text{g}$. Como el proceso ocurre a presión constante

$$Q_{\text{aire}} = c_p n(T - T_{\text{inicial}}) = \frac{5}{2}nR(T - T_{\text{inicial}}), \quad (1 \text{ pts.})$$

donde $T_{\text{inicial}} = 30^\circ\text{C}$ y $n = 10$. Reemplazando en (1) se obtiene

$$T = \frac{\frac{5}{2}nRT_{\text{inicial}} - m_{H_2O}L_f}{m_{H_2O}c_{\text{agua}} + \frac{5}{2}nR} \Rightarrow T = 11,64^\circ\text{C}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Dado que la temperatura final es mayor a cero grados Celsius corrobora que todo el hielo se derritió.

b)

Como la presión sobre el pistón es constante e igual a p_{atm} el trabajo total realizado por el sistema corresponde a

$$W = p_{\text{atm}}\Delta V. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

La variación del volumen total corresponde al cambio de volumen del hielo al derretirse (distintas densidades entre el hielo y el agua líquida) y al cambio de volumen del gas, es decir

$$\Delta V = V_{\text{agua}} - V_{\text{hielo}} + \Delta V_{\text{aire}}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$

A presión constante la variación de volumen de un gas ideal está dada por

$$\Delta V_{\text{aire}} = \frac{nR}{P}(T - T_{\text{inicial}}) = -0,015\text{m}^3. \quad (0.3 \text{ pts.})$$

Mientras que

$$V_{\text{hielo}} = M_{\text{hielo}}\rho_{\text{hielo}} = 1,091 \times 10^{-5}\text{m}^3 \quad \text{y} \quad V_{\text{agua}} = M_{\text{agua}}\rho_{\text{agua}} = 1 \times 10^{-5}\text{m}^3. \quad (0.4 \text{ pts.})$$

Ya que el sistema es aislado de la primera ley se tiene que

$$\Delta U = -W = 1526,54\text{J} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

La variación de energía interna del aire corresponde a

$$\Delta U_{\text{aire}} = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) = -2289,68\text{J} \quad (0.3 \text{ pts.})$$

luego la variación de energía interna del agua corresponde a

$$\Delta U_{\text{agua}} = \Delta U - \Delta U_{\text{aire}} = 3816,22\text{J}. \quad (0.5 \text{ pts.})$$