

Problema 4:

Datos del problema:

Radio del cilindro $r = 5$ cm.

Presión inicial $P_i = 101$ kPa.

largo inicial de la porción del cilindro con gas $l_i = 20$ cm.

Es un gas ideal.

i)

El volumen de la región con gas es $V = \pi r^2 l$, donde l es el largo de la porción del cilindro que contiene el gas. En particular el volumen inicial esta dado por $V_i = \pi r^2 l_i$. En el estado inicial y final el gas se encuentra en equilibrio termodinámico. Luego, como es un gas ideal, las ecuaciones de estado son

$$P_i V_i = n R T_i \quad \text{y} \quad P_f V_f = n R T_f,$$

donde V_f, P_f, T_i, T_f y n son el volumen final, la presión final, temperatura inicial, temperatura final y número de moles, respectivamente. El numero de moles no varia por ser un contenedor cerrado, además por enunciado se tiene que $T_i = T_f$ y $V_f = 2V_i$. De lo anterior se encuentra que

$$P_f V_f = P_i V_i \rightarrow P_f = P_i \frac{V_i}{V_f} = P_i/2. \quad (1)$$

(0.8 pts)

Por otra parte se tiene que el resorte esta inicialmente en su largo natural, por lo tanto, la fuerza que realiza el resorte sobre el pistón para un largo l esta dado por

$$F_{\text{resorte}}(l) = k(l - l_i). \quad (2)$$

Dado que el volume final $V_f = 2V_i$ el largo final de la porción del cilindro con gas es

$$l_f = \frac{V_f}{\pi r^2} = 2 \frac{V_i}{\pi r^2} = 2l_i. \quad (3)$$

Para que el sistema se encuentre en equilibrio mecánico con un largo l_f , la fuerza que ejerce el gas sobre el pistón debe ser igual a la fuerza que ejerce el resorte sobre el pistón

$$F_{\text{resorte}}(l_f) \equiv k(l_f - l_i) = P_f \pi r^2.$$

(0.8 pts)

Despejando la constante elástica de la ecuación anterior se encuentra $k = \frac{\pi r^2 P_f}{(l_f - l_i)}$. Usando los resultado obtenidos en (3) y (1) se tiene

$$k = \frac{\pi r^2 P_i}{2l_i} = 1983,13 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

(0.4 pts)

ii)

El trabajo realizado por el gas

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV \equiv \int_{l_i}^{l_f} F_{\text{gas}} dl.$$

(0.6 pts)

La ecuación de movimiento para el pistón en términos de l esta dada por

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = F_{\text{gas}} - F_{\text{resorte}},$$

(0.6 pts)

donde m es la masa del pistón. Luego el trabajo realizado por el gas

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{l_i}^{l_f} (F_{\text{resorte}} + m \frac{d^2 l}{dt^2}) dl \\
 &= \int_{l_i}^{l_f} F_{\text{resorte}} dl + \int_{l_i}^{l_f} m \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{dl}{dt} \right)}_v dl \\
 &= \int_{l_i}^{l_f} k(l - l_i) dl + \int_{l_i}^{l_f} m \frac{dv}{dt} dl \\
 &= k(l^2/2 - l_i l) \Big|_{l_i}^{l_f} + m \underbrace{\frac{v^2}{2}}_0 \Big|_{l_i}^{l_f} \\
 &= \frac{k}{2}(l_f - l_i)^2 = \frac{k}{2}l_i^2 = 39,66J.
 \end{aligned} \tag{4}$$

(1.3 pts)

En las ecuaciones anteriores se utilizó que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} = v \frac{dv}{dl}$, luego como la velocidad inicial y final del pistón es cero la segunda integral no contribuye al trabajo. Como en el enunciado no se hace referencia a la masa del pistón m , también se podía suponer que era cero luego el cálculo anterior se simplifica y entrega el mismo resultado.

Manera alternativa:

Toda la energía entregada por el gas en forma de trabajo mecánico W es absorbido por el resorte, luego W es igual a la variación de energía potencial elástica

$$W = \Delta U_{\text{elástica}} = U_{\text{elástica final}} - \underbrace{U_{\text{elástica inicial}}}_0 = \frac{k}{2}(l_f - l_i)^2 = \frac{k}{2}l_i^2.$$

Evaluando $W = 39,66J$

iii)

Por primera ley se tiene que $\Delta U = Q - W$. Para un gas ideal la variación de energía interna es proporcional a ΔT , dado que $T_i = T_f$ se tiene que

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

(1 pts)

Evaluando $Q = 39,66J$.

(0.5 pts)