

Problemas I1

Alberto Faraggi

September 8, 2015

Problema 1 I1 2012-2

Se tiene una esfera sólida de volumen V_e , coeficiente de expansión lineal α_e y capacidad calorífica C_e que se encuentra inicialmente a una temperatura T_e . Por otra parte, se tiene un recipiente cilíndrico de base A que contiene líquido hasta una altura h . Líquido y recipiente están a una temperatura T_i y sus coeficientes de expansión lineal y capacidades caloríficas son conocidos (α_R , C_R , α_L , C_L). Se deposita la esfera dentro del líquido de manera que queda completamente sumergida en él y se espera a que el sistema alcance el equilibrio térmico.

- i) Obtenga la temperatura final T_f del sistema. (2 ptos.)
- ii) Calcule el volumen final de la esfera V'_e y el área final de la base del recipiente A' . (2 ptos.)
- iii) Encuentre la altura final h' hasta la que llega el líquido. (2 ptos.)

Solución: Al introducir la esfera ésta intercambia calor con el líquido y el recipiente. Por conservación de energía se tiene que

$$Q_E + Q_L + Q_R = 0$$

donde

$$Q_E = C_E(T_f - T_e), \quad Q_L = C_L(T_f - T_i), \quad Q_R = C_R(T_f - T_i).$$

De esta relación se desprende que

$$T_f = \frac{C_E T_E + (C_L + C_R) T_i}{C_E + C_L + C_R}.$$

El volumen final de la esfera se obtiene a partir de la fórmula para la expansión térmica volumétrica:

$$\begin{aligned} V'_E &= V_E + \Delta V_E \\ &= V_E (1 + 3\alpha_E(T_f - T_e)) . \end{aligned}$$

Similarmente, usando expansión superficial tenemos

$$A' = A (1 + 2\alpha_R(T_f - T_i)) .$$

Reemplazando la expresión para T_f esto es

$$\begin{aligned} V'_E &= V_E \left(1 + 3\alpha_E \frac{C_L + C_R}{C_E + C_L + C_R} (T_i - T_E) \right) , \\ A' &= V_E \left(1 + 2\alpha_R \frac{C_E}{C_E + C_L + C_R} (T_E - T_i) \right) . \end{aligned}$$

La altura final del líquido está determinada por

$$h' = \frac{V'_E + V'_L}{A'} .$$

Usando las relaciones anteriores llegamos a una expresión no muy elegante para h' .

Problema 1 I1 2013-2

Se quiere llenar un tanque con 10 galones ($1 \text{ galón} = 0.0038 \text{ m}^3$) de gasolina ($\beta = 9.6 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) y se tienen 2 horarios disponibles para hacerlo: a las 7 am, cuando la temperatura es $0 \text{ }^\circ\text{C}$ o después de almuerzo, cuando la temperatura es de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Calcule la masa extra de gasolina que se obtiene al llenar el tanque en la mañana, sabiendo que la densidad de la gasolina a esa hora es de 730 kg/m^3 .

Solución: Llamemos ρ_1 y ρ_2 a las densidades de la gasolina en la mañana y en la tarde, respectivamente. La diferencia de masa entre los dos procesos es

$$m_1 - m_2 = (\rho_1 - \rho_2)V . \tag{1}$$

Para calcular cómo varía la densidad con la temperatura, consideramos una cierta cantidad fija de masa. El volumen y la densidad deben cambiar de forma tal que la masa total no varíe. Es decir,

$$\rho V = m \quad \Rightarrow \quad \Delta \rho V + \rho \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \rho = -\rho \frac{\Delta V}{V} .$$

En el caso de expansión térmica

$$\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T.$$

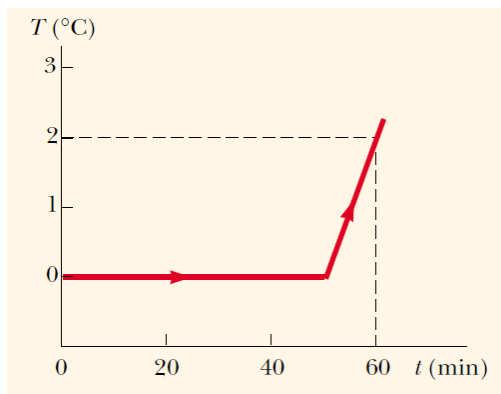
Luego,

$$m_1 - m_2 = \beta\rho_1\Delta T.$$

El signo menos se cancela porque $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = -(\rho_1 - \rho_2)$. Ahora sólo falta meter los numeritos.

Problema 2 I1 2013-2

Un recipiente para cocinar sobre un quemador lento contiene 10 kg de agua líquida y una masa desconocida de hielo, ambos en equilibrio a 0°C en $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios instantes y el resultado se grafica como se muestra. Durante los primeros 50 min., la mezcla permanece a 0°C . Desde los 50 min. a los 60 min. la temperatura aumenta linealmente hasta 2°C . Sin hacer caso de la capacidad calorífica del recipiente, calcule la masa de hielo inicial.



Solución: Durante los primeros 50 minutos (Δt_1) todo el calor se usa para derretir el hielo. Por lo tanto,

$$Q_1 = m_H L_H,$$

A partir de los 50 minutos sólo hay agua y el calor se utiliza para aumentar la temperatura. Entonces el calor entregado en ese intervalo (Δt_2) es

$$Q_2 = (m_H + m_A)c\Delta T.$$

La observación crucial para resolver el problema es que la potencia, i.e. la energía por unidad de tiempo, que entrega el quemador es constante. Luego,

$$\frac{Q_1}{\Delta t_1} = \frac{Q_2}{\Delta t_2}.$$

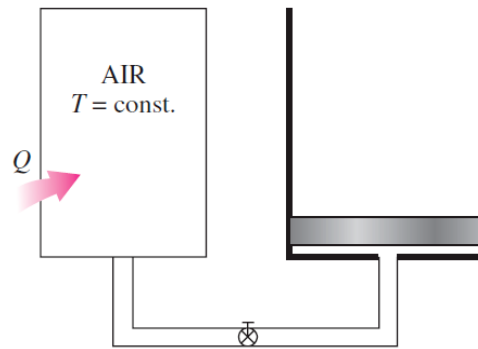
Usando las relaciones anteriores llegamos a

$$m_H = \frac{m_A c \Delta T \Delta t_1}{L_H \Delta t_2 - c \Delta T \Delta t_1}.$$

Le dejamos a ud. el placer de reemplazar los valores numéricos (¿No se acuerda del calor específico del agua? Recuerde la definición de caloría).

Problema 3 I1 2013-2

Un tanque rígido contiene $0.4 m^3$ de aire (gas ideal) a $400 kPa$ y $30^\circ C$ y está conectado por una válvula a un sistema pistón cilindro sin espacio, es decir, el pistón está en el fondo del cilindro. La masa del pistón es tal que se requiere $200 kPa$ para levantarlo. La válvula se abre lentamente y se deja pasar aire hasta que su presión baja a $200 kPa$. Durante este proceso se intercambia calor con el entorno de modo que el aire permanece a $30^\circ C$. Calcule el calor transferido al tanque.



Solución: Sabemos que en un proceso isoterma $\Delta U = 0$ para un gas ideal (si el número de partículas no cambia). Por lo tanto, de la primera ley obtenemos que

$$Q = -W.$$

Para calcular el trabajo realizado por el gas notamos que debido a la presencia de la válvula la presión sobre el pistón se mantiene constante e igual a $P_f = 200 \text{ kPa}$, independiente de cual sea la presión en el tanque. Por lo tanto

$$W = -P_f(V_f - V_i).$$

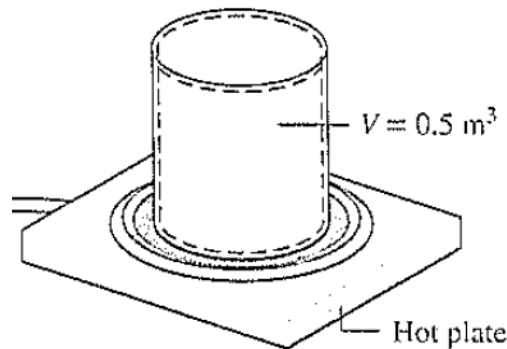
Pero los estados inicial y final del gas se relacionan por $P_f V_f = P_i V_i$, con lo que llegamos a

$$W = -V_i(P_i - P_f).$$

Problema 4 I1 2013-2

Un contenedor rígido y cerrado de 0.5 m^3 se pone sobre un calentador. Inicialmente el contenedor tiene una mezcla saturada de agua líquida y vapor a $P_1 = 1 \text{ bar}$ con una calidad de 0.5. Luego de calentar, la presión en el contenedor es $P_2 = 1.5 \text{ bar}$. Calcule

- La temperatura en $^{\circ}\text{C}$ en los estados 1 y 2.
- La masa de vapor presente en los estados 1 y 2.
- Si se sigue calentando, calcule la presión, en bar, cuando el contenedor tiene sólo vapor saturado (estado 3). Ayuda: es posible que necesite interpolar los datos.



Solución: Inicialmente tenemos una mezcla saturada a $P = 100 \text{ kPa}$. De la tabla A-5 vemos que

$$T_{100 \text{ kPa}} = 99.61^{\circ}\text{C}.$$

Al final del proceso tenemos una presión de $P = 150\text{kPa}$, por lo que la temperatura es

$$T_{150\text{kPa}} = 111.35^\circ\text{C}.$$

En el estado 1 conocemos el volumen del sistema, $V = 0.5\text{ m}^3$, y la calidad, $x_1 = 0.5$. De la tabla podemos calcular el volumen específico del sistema y con éste la masa total:

$$\begin{aligned}\nu &= (1 - x)\nu_f + x\nu_g \\ &= \frac{1}{2}(\nu_f + \nu_g) \\ &= \frac{1}{2}(0.001043 + 1.6941) \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \\ &= 0.84757 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \\ m &= \frac{V}{\nu} \\ &= 0.59\text{ kg}.\end{aligned}$$

Luego, la masa de vapor en el estado 1 es

$$\begin{aligned}m_g &= xm \\ &= 0.295\text{ kg}.\end{aligned}$$

Para obtener la masa de vapor en el estado 2 notamos que el contenedor es rígido, por lo que el volumen no cambia, y cerrado, por lo que la masa total es la misma. Esto implica que el volumen específico en los dos estados es el mismo.

$$\begin{aligned}\nu' &= \nu \\ (1 - x')\nu'_f + x'\nu'_g &= \nu\end{aligned}$$

De la tabla A-5 obtenemos los valores de los volúmenes específicos en el estado 2. Así, podemos calcular la calidad,

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\nu - \nu'_f}{\nu'_g - \nu'_f} \\ &= 0.728.\end{aligned}$$

La masa de vapor es entonces

$$\begin{aligned}m'_g &= x'm \\ &= 0.43\text{ kg}.\end{aligned}$$

En el estado 3, cuando hay sólo vapor, la calidad es $x'' = 1$. Como el volumen específico total sigue siendo el mismo, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu'' &= \nu \\ (1 - x'')\nu_f'' + x''\nu_g'' &= \nu \\ \nu_g'' &= 0.84757 \left[\frac{m^3}{kg} \right] .\end{aligned}$$

Mirando la tabla vemos que este valor se encuentra entre $P_1 = 200\text{kPa}$ y $P_2 = 225\text{kPa}$. Usamos interpolación lineal:

$$\frac{P_2 - P_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{P - P_1}{\nu - \nu_1}$$

Lo mismo es cierto si intercambiamos 1 con 2. Despejando ν tenemos

$$P = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{\nu_2 - \nu_1}(\nu - \nu_1) .$$

Evaluando para $\nu = \nu_g''$ y usando los valores de la tabla obtenemos

$$P'' = 210.33 \text{ kPa} .$$

TABLE A-5

Saturated water—Pressure table

Press., <i>P</i> kPa	Sat. temp., <i>T</i> _{sat} °C	Specific volume, m ³ /kg		Internal energy, kJ/kg			Enthalpy, kJ/kg			Entropy, kJ/kg · K		
		Sat. liquid, <i>v</i> _f	Sat. vapor, <i>v</i> _g	Sat. liquid, <i>u</i> _f	Evap., <i>u</i> _{fg}	Sat. vapor, <i>u</i> _g	Sat. liquid, <i>h</i> _f	Evap., <i>h</i> _{fg}	Sat. vapor, <i>h</i> _g	Sat. liquid, <i>s</i> _f	Evap., <i>s</i> _{fg}	Sat. vapor, <i>s</i> _g
1.0	6.97	0.001000	129.19	29.302	2355.2	2384.5	29.303	2484.4	2513.7	0.1059	8.8690	8.9749
1.5	13.02	0.001001	87.964	54.686	2338.1	2392.8	54.688	2470.1	2524.7	0.1956	8.6314	8.8270
2.0	17.50	0.001001	66.990	73.431	2325.5	2398.9	73.433	2459.5	2532.9	0.2606	8.4621	8.7227
2.5	21.08	0.001002	54.242	88.422	2315.4	2403.8	88.424	2451.0	2539.4	0.3118	8.3302	8.6421
3.0	24.08	0.001003	45.654	100.98	2306.9	2407.9	100.98	2443.9	2544.8	0.3543	8.2222	8.5765
4.0	28.96	0.001004	34.791	121.39	2293.1	2414.5	121.39	2432.3	2553.7	0.4224	8.0510	8.4734
5.0	32.87	0.001005	28.185	137.75	2282.1	2419.8	137.75	2423.0	2560.7	0.4762	7.9176	8.3938
7.5	40.29	0.001008	19.233	168.74	2261.1	2429.8	168.75	2405.3	2574.0	0.5763	7.6738	8.2501
10	45.81	0.001010	14.670	191.79	2245.4	2437.2	191.81	2392.1	2583.9	0.6492	7.4996	8.1488
15	53.97	0.001014	10.020	225.93	2222.1	2448.0	225.94	2372.3	2598.3	0.7549	7.2522	8.0071
20	60.06	0.001017	7.6481	251.40	2204.6	2456.0	251.42	2357.5	2608.9	0.8320	7.0752	7.9073
25	64.96	0.001020	6.2034	271.93	2190.4	2462.4	271.96	2345.5	2617.5	0.8932	6.9370	7.8302
30	69.09	0.001022	5.2287	289.24	2178.5	2467.7	289.27	2335.3	2624.6	0.9441	6.8234	7.7675
40	75.86	0.001026	3.9933	317.58	2158.8	2476.3	317.62	2318.4	2636.1	1.0261	6.6430	7.6691
50	81.32	0.001030	3.2403	340.49	2142.7	2483.2	340.54	2304.7	2645.2	1.0912	6.5019	7.5931
75	91.76	0.001037	2.2172	384.36	2111.8	2496.1	384.44	2278.0	2662.4	1.2132	6.2426	7.4558
100	99.61	0.001043	1.6941	417.40	2088.2	2505.6	417.51	2257.5	2675.0	1.3028	6.0562	7.3589
101.325	99.97	0.001043	1.6734	418.95	2087.0	2506.0	419.06	2256.5	2675.6	1.3069	6.0476	7.3545
125	105.97	0.001048	1.3750	444.23	2068.8	2513.0	444.36	2240.6	2684.9	1.3741	5.9100	7.2841
150	111.35	0.001053	1.1594	466.97	2052.3	2519.2	467.13	2226.0	2693.1	1.4337	5.7894	7.2231
175	116.04	0.001057	1.0037	486.82	2037.7	2524.5	487.01	2213.1	2700.2	1.4850	5.6865	7.1716
200	120.21	0.001061	0.88578	504.50	2024.6	2529.1	504.71	2201.6	2706.3	1.5302	5.5968	7.1270
225	123.97	0.001064	0.79329	520.47	2012.7	2533.2	520.71	2191.0	2711.7	1.5706	5.5171	7.0877
250	127.41	0.001067	0.71873	535.08	2001.8	2536.8	535.35	2181.2	2716.5	1.6072	5.4453	7.0525
275	130.58	0.001070	0.65732	548.57	1991.6	2540.1	548.86	2172.0	2720.9	1.6408	5.3800	7.0207
300	133.52	0.001073	0.60582	561.11	1982.1	2543.2	561.43	2163.5	2724.9	1.6717	5.3200	6.9917
325	136.27	0.001076	0.56199	572.84	1973.1	2545.9	573.19	2155.4	2728.6	1.7005	5.2645	6.9650
350	138.86	0.001079	0.52422	583.89	1964.6	2548.5	584.26	2147.7	2732.0	1.7274	5.2128	6.9402
375	141.30	0.001081	0.49133	594.32	1956.6	2550.9	594.73	2140.4	2735.1	1.7526	5.1645	6.9171
400	143.61	0.001084	0.46242	604.22	1948.9	2553.1	604.66	2133.4	2738.1	1.7765	5.1191	6.8955
450	147.90	0.001088	0.41392	622.65	1934.5	2557.1	623.14	2120.3	2743.4	1.8205	5.0356	6.8561
500	151.83	0.001093	0.37483	639.54	1921.2	2560.7	640.09	2108.0	2748.1	1.8604	4.9603	6.8207
550	155.46	0.001097	0.34261	655.16	1908.8	2563.9	655.77	2096.6	2752.4	1.8970	4.8916	6.7886
600	158.83	0.001101	0.31560	669.72	1897.1	2566.8	670.38	2085.8	2756.2	1.9308	4.8285	6.7593
650	161.98	0.001104	0.29260	683.37	1886.1	2569.4	684.08	2075.5	2759.6	1.9623	4.7699	6.7322
700	164.95	0.001108	0.27278	696.23	1875.6	2571.8	697.00	2065.8	2762.8	1.9918	4.7153	6.7071
750	167.75	0.001111	0.25552	708.40	1865.6	2574.0	709.24	2056.4	2765.7	2.0195	4.6642	6.6837