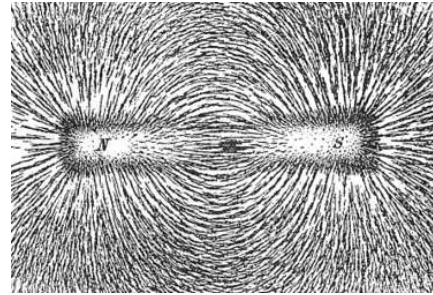


# Campo Magnético y Fuerzas Magnéticas



**Figura 1.** El magnetismo se da particularmente en los cables de electromatización. Líneas de fuerza magnéticas de un imán de barra, producidas por limaduras de hierro sobre papel.

Los fenómenos magnéticos fueron conocidos por los antiguos griegos. Se dice que por primera vez se observaron en la ciudad de [Magnesia del Meandro](#) en [Asia Menor](#), de ahí el término magnetismo. Sabían que ciertas piedras atraían el hierro, y que los trocitos de hierro atraídos atraían a su vez a otros. Estas se denominaron imanes naturales.

El conocimiento del magnetismo se mantuvo limitado a los imanes hasta que en [1820](#) [Hans Christian Ørsted](#), profesor de la [Universidad de Copenhague](#), descubrió que un hilo conductor sobre el que circulaba una corriente que ejercía una perturbación magnética a su alrededor, que llegaba a poder mover una aguja magnética situada en ese entorno. Muchos otros experimentos siguieron con [André-Marie Ampère](#), [Carl Friedrich Gauss](#), [Michael Faraday](#) y

otros que encontraron vínculos entre el magnetismo y la electricidad. James Clerk Maxwell sintetizó y explicó estas observaciones en sus ecuaciones de Maxwell. Unificó el magnetismo y la electricidad en un solo campo, el electromagnetismo. En 1905, Einstein usó estas leyes para comprobar su teoría de la relatividad especial, en el proceso mostró que la electricidad y el magnetismo estaban fundamentalmente vinculadas.

# 1 Clasificación de los materiales magnéticos

Tipo de material	Características
No magnético	No afecta el paso de las líneas de campo magnético. Ejemplo: el <b>vacío</b> .
Diamagnético	Material débilmente magnético. Si se sitúa una barra magnética cerca de él, ésta lo repele. Ejemplo: <b>bismuto (Bi)</b> , <b>plata (Ag)</b> , <b>plomo (Pb)</b> , <b>agua</b> .
Paramagnético	Presenta un magnetismo significativo. Atraído por la barra magnética. Ejemplo: <b>aire</b> , <b>aluminio (Al)</b> , <b>paladio (Pd)</b> , <b>magneto molecular</b> .
Ferromagnético	Magnético por excelencia o fuertemente magnético. Atraído por la barra magnética. Paramagnético por encima de la <b>temperatura de Curie</b> (La <b>temperatura</b> de Curie del hierro metálico es aproximadamente unos 770°C). Ejemplo: <b>hierro (Fe)</b> , <b>cobalto (Co)</b> , <b>níquel (Ni)</b> , <b>acero suave</b> .
Antiferromagnético	No magnético aún bajo acción de un campo magnético inducido. Ejemplo: <b>óxido de manganeso (MnO<sub>2</sub>)</b> .
Ferrimagnético	Menor grado magnético que los materiales ferromagnéticos. Ejemplo: <b>ferrita de hierro</b> .
Superparamagnético	Materiales ferromagnéticos suspendidos en una <b>matriz dieléctrica</b> . Ejemplo: materiales utilizados en cintas de audio y video.
Ferritas	Ferromagnético de baja <b>conductividad eléctrica</b> . Ejemplo: utilizado como núcleo inductores para aplicaciones de corriente alterna.

Consideremos una carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ . Diremos que en la posición  $\vec{x}$  de la partícula existe un campo magnético  $\vec{B}(\vec{x})$  si la carga experimenta una fuerza dada por

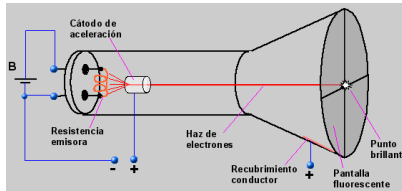
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x})$$

$$1 \text{ Tesla}(T) = 1 \frac{Ns}{Cm}$$

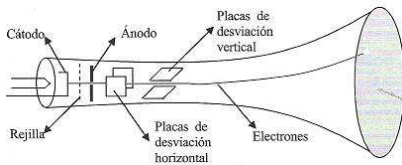
Si, además, hay un campo eléctrico, la fuerza que experimenta la carga  $q$  es:

Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E}(x) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x})$$



**Figura 2.** Tubo de rayos catódicos



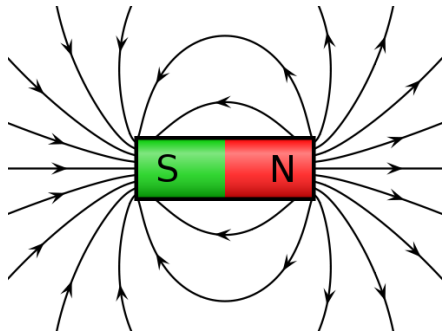
**Figura 3.**

Mediante **emisión termoiónica** una placa metálica caliente o cátodo emite electrones, que son acelerados por el campo eléctrico existente entre esa placa o cátodo (de carga negativa) y otra placa o ánodo (de carga positiva). El conjunto conforma un cañón de electrones y se obtiene un haz fino después de que éstos pasan por una ranura del ánodo. A partir de ahí los electrones entran en el tubo propiamente dicho y se les aplica, mediante sendos condensadores, un campo eléctrico vertical y otro campo eléctrico horizontal. Finalmente, el haz de electrones incide sobre una pantalla fluorescente, donde produce un destello de una intensidad que depende de la del propio haz.

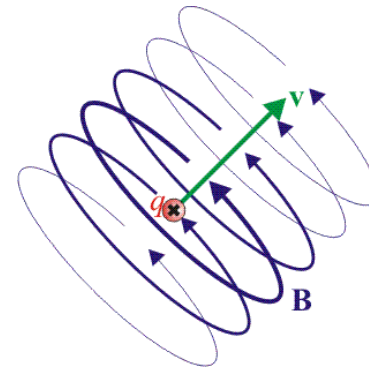
Se emplea principalmente en **monitores**, **televisores** y **osciloscopios**, aunque en la actualidad se está sustituyendo paulatinamente por tecnologías como **plasma**, **LCD**, **LED** o **DLP**.

Dibujamos las líneas de campo magnético de tal manera que:

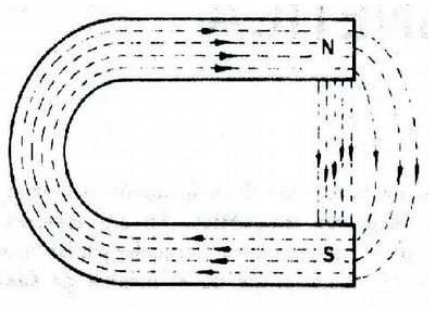
- El campo magnético es tangente a las líneas de campo en cada punto.
- La densidad de líneas es proporcional a la intensidad de campo magnético en el punto.
- Dado que la dirección de  $\vec{B}$  es única en cada punto, las líneas de campo no se intersectan.
- Las líneas de campo no son líneas de fuerza sobre cargas. Una brújula(dipolo) se alinea en la dirección del campo.



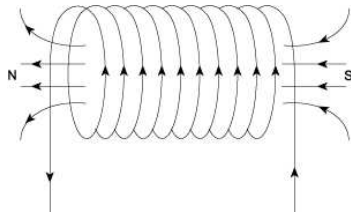
**Figura 4.** Imán



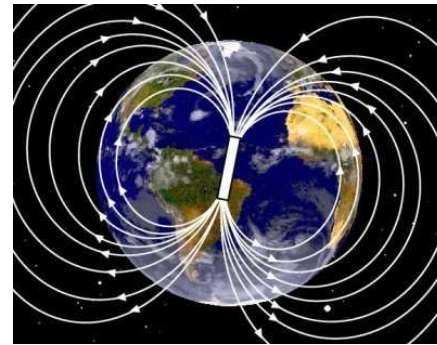
**Figura 5.** Campo de una carga



**Figura 6.** Campo magnético de un imán



**Figura 7.** Campo magnético de un solenoide



**Figura 8.** Campo magnético de la Tierra

El flujo del campo magnético es una magnitud escalar que se define mediante el producto escalar:

$$\Phi_B = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

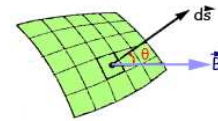


Figura 9.

El flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada  $S$  es nulo (No hay monopolos magnéticos):

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0$$

Usando el teorema de Gauss se obtiene la forma infinitesimal de la ley de Gauss del magnetismo:

$$0 = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad \text{para todo } V$$

Se sigue que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . En MKS se tiene  $[\Phi_B] = Tm^2 = W$  (Weber):  $1W = 1Tm^2$ .



Un campo magnético no cambia la energía cinética de una partícula:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0 \quad K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = C$$

Campo magnético Uniforme:  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Se tiene:

$$\vec{F} = q(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \times B_0 \hat{z} = qB_0(-v_x \hat{y} + v_y \hat{x})$$

$$m \dot{v}_x = qB_0 v_y \quad m \dot{v}_y = -qB_0 v_x \quad m \dot{v}_z = 0$$

Esto es:  $v_z = v_{0z}$ , una constante.

$$\dot{v}_x = \omega v_y \quad \dot{v}_y = -\omega v_x \quad \omega = \frac{qB_0}{m}$$

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \quad v_x = A \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad v_y = \frac{\dot{v}_x}{\omega} = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Notar que en cada plano perpendicular al eje  $z$  la partícula realiza un movimiento circular uniforme. Por esto se tiene que el radio de la órbita  $R$  es:

$$m \frac{v_T^2}{R} = q v_T B_0 \quad R = \frac{m v_T}{q B_0} = \frac{v_T}{\omega} \quad v_T^2 = v_x^2 + v_y^2 = A^2$$

Para determinar la trayectoria, integramos las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
 v_x = \dot{x} &= A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) & x &= -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + x_0 \\
 v_y = \dot{y} &= A \cos(\omega t + \alpha) & y &= \frac{A}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + y_0 \\
 (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 = R^2 \\
 v_z = \dot{z} &= v_{0z} & z &= v_{0z}t + z_0
 \end{aligned}$$

La trayectoria es una hélice.

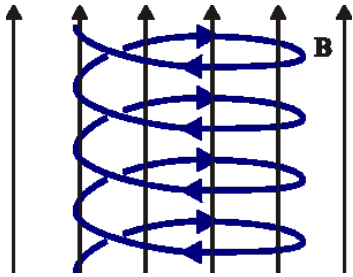
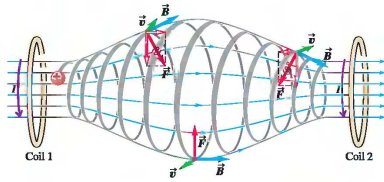


Figura 10.

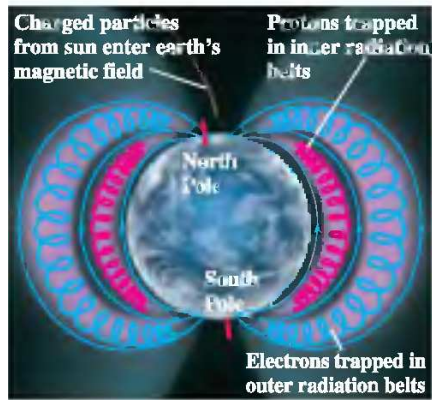


**Figura 11.**

Una botella magnética

El movimiento de una partícula cargada

en un campo magnético no uniforme es más complejo. En la figura se muestra el campo magnético creado por dos espiras circulares separadas. Las partículas cargadas experimentan una fuerza que las envía hacia el centro de la región. De esta manera se pueden confinar plasmas con  $T = 10^6 K$ .



**Figura 12.** Cinturones de Van Allen



**Figura 13.** Aurora Boreal en Noruega

El campo magnético no uniforme de la Tierra nos protege del flujo de partículas cargadas proveniente del Sol. Las partículas quedan atrapadas en regiones toroidales alrededor de la Tierra, sin llegar a la superficie, excepto en los polos, donde se producen la aurora boreal y la aurora austral.

Los protones se mueven en los cinturones internos: 1000-5000 Km.

Los electrones se mueven en los cinturones externos: 15000-20000Km.

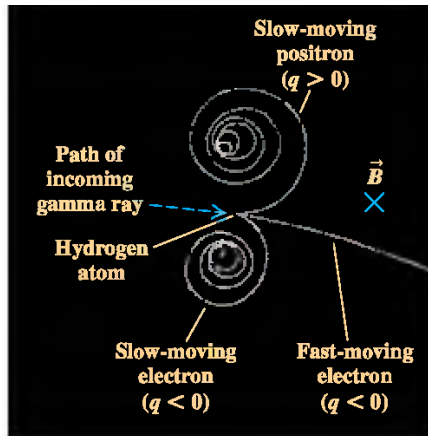
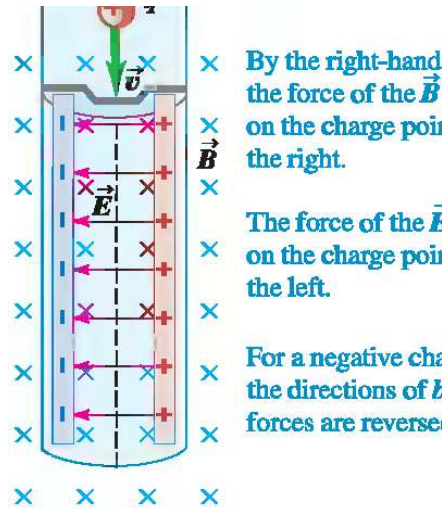


Figura 14.

Cámara de burbujas

Un rayo  $\gamma$  ha arrancado un electrón de un átomo, el cual sale a gran velocidad. Un campo magnético perpendicular al plano de la figura permite distinguir la trayectoria de un electrón y de un positrón (antipartícula del electrón con carga positiva), que también se creó en la colisión.



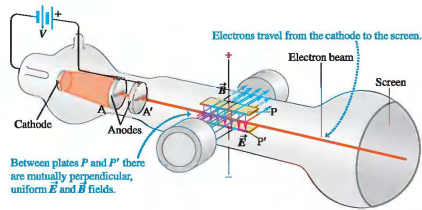
**Figura 15.**

Selector de velocidad

El campo eléctrico apunta hacia la izquierda. La fuerza total actuando sobre la partícula de carga  $q$  y velocidad  $v \hat{y}$  donde  $\hat{y}$  apunta hacia abajo es:

$$\vec{F} = qE \hat{x} + qv \hat{y} \times (-B \hat{z}) = q(E - Bv) \hat{x}$$

La partícula no se deflejará si  $v = \frac{E}{B}$ . Variando  $E$ ,  $B$  podemos seleccionar partículas de velocidad bien definida.



**Figura 16.**

Aparato de Thomson para medir  $\frac{e}{m}$

Los electrones producidos en el cátodo son acelerados por la diferencia de potencial  $V$  entre los dos ánodos  $A, A'$ , luego pasan por un selector de velocidades entre las placas  $P, P'$ . Finalmente crean un punto en la pantalla fluorescente. Los electrones pasan entre las placas si se satisface  $v = \frac{E}{B}$ . Se

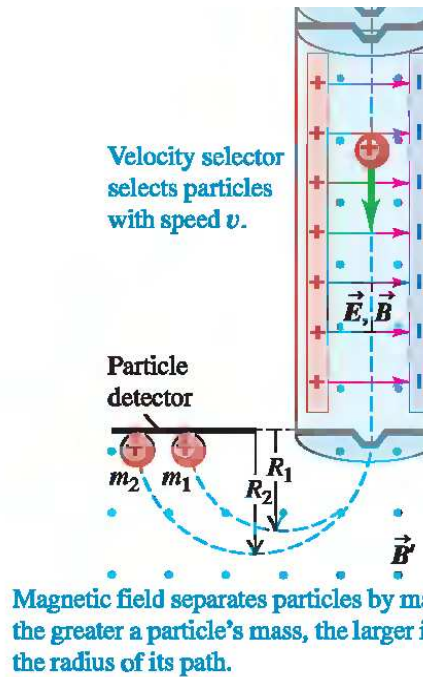
tiene que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV, \quad \frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{E^2}{2B^2V}$$

Midiendo  $E, B, V$  se puede determinar  $\frac{e}{m}$ . Lo importante del experimento de Thomson es que este cociente es el mismo independiente de los materiales que conforman el cátodo. Por esto a él se atribuye el descubrimiento del electrón.

Mediciones modernas dan:

$\frac{e}{m} = 1.75882012(15) \times 10^{11} C/kg$ . La carga del electrón es:  $e = 1.602176565(35) \times 10^{-19} C$ . Por lo tanto  $m = 9, 1093 \times 10^{-31} kg$



**Figura 17.** Espectrómetro de masas. Consta de un selector de velocidades en el tubo vertical. Luego las partículas(iones) cruzan

un campo magnético perpendicular al plano de la figura, hacia afuera. El radio de la trayectoria es  $R = \frac{mv}{qB_0}$ , proporcional a  $m$ . Así podemos seleccionar partículas de acuerdo a su masa. Se supone que los átomos han perdido sólo un electrón:  $q = +e$ .

El primer logro de este aparato fue el descubrimiento que el átomo de Neón consta de dos isótopos con 20 y 22 g/mol cada uno. Esto se debe a que tienen distinto número de neutrones en el núcleo. Posteriormente se encontró un gran número de isótopos de muchos elementos, con diversas aplicaciones a la medicina, entre otros.



Consideremos un conductor lineal definido por una curva  $C$ . A lo largo del conductor circula una corriente  $I$ . La carga que pasa por un elemento  $dl$  del conductor en un tiempo  $dt = \frac{dl}{v}$  es:  $dq = I dt = I \frac{dl}{v}$   $v$  es la velocidad de los portadores de carga en el conductor.

Por lo tanto la fuerza que actúa sobre el trozo infinitesimal de conductor es:

$$d\vec{F} = I \frac{dl}{v} \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad d\vec{l} = dl \hat{v}$$

Resumiendo:  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ , donde  $d\vec{l}$  apunta en la dirección de la corriente.

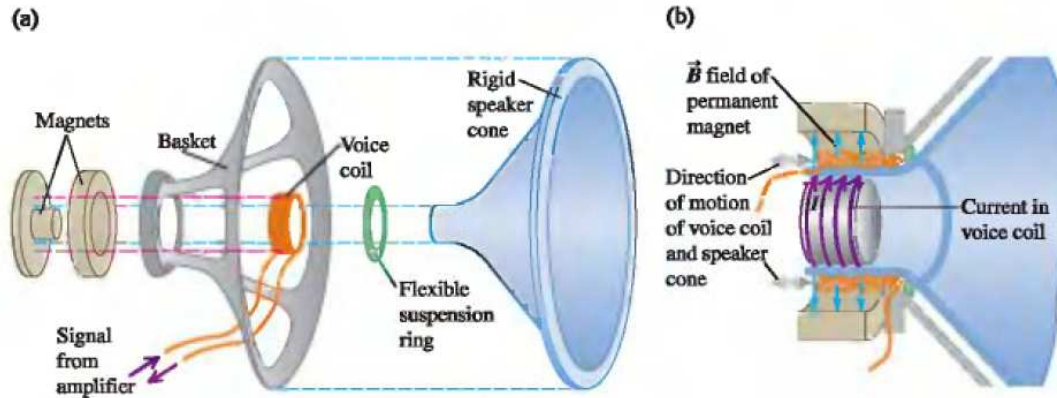


Figura 18.

(a) Componentes de un altoparlante.

(b) El campo magnético del imán permanente ejerce una fuerza sobre la corriente en la bobina de voz. Si la corriente en la bobina de voz es variable el cono del altavoz, atado a la bobina, vibrará con la misma frecuencia.

Sea un lazo conductor correspondiente a una curva cerrada  $C$ , en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Se quiere encontrar la fuerza y torque sobre  $C$  debido al campo magnético.

- Fuerza:  $\vec{F}_C = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{0}$
- **Torque:**  $\vec{\tau}_C = I \vec{A} \times \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_C &= \oint_C \vec{x} \times d\vec{F} = I \oint_C \vec{x} \times (d\vec{x} \times \vec{B}) = I \oint_C (x \cdot B d\vec{x} - x \cdot dx B) = I \oint_C x \cdot B d\vec{x} \\ &\quad I \oint_C (\vec{x} \times d\vec{x}) \times \vec{B} = I \oint_C (\vec{x} \cdot \vec{B} d\vec{x} - \vec{B} \cdot d\vec{x} \vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} I \oint_C (\vec{x} \times d\vec{x}) \times \vec{B} - I \oint_C \vec{x} \cdot \vec{B} d\vec{x} = \frac{1}{2} I \oint_C (-\vec{B} \cdot d\vec{x} \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{B} d\vec{x}) = \\ &= -\frac{1}{2} I \oint_C B_j (dx_j x_i + x_j dx_i) = -\frac{1}{2} I \oint_C B_j d(x_i x_j) = 0 \end{aligned}$$

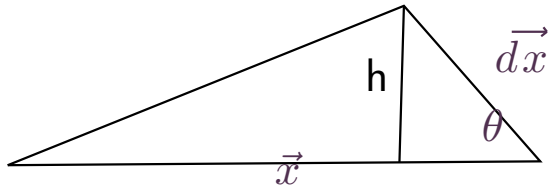
**Observación 1.**  $A \times (B \times C) = A \cdot CB - A \cdot BC$ ;  $(A \times B) \times C = A \cdot CB - B \cdot CA$

Pero  $(\vec{x} \times d\vec{x}) = 2d\vec{A}$  donde  $d\vec{A}$  es el elemento infinitesimal de área.

$$\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}B_lC_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m = A_mB_iC_m - A.BC_i = A.CB_i - A.BC_i$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}A_lB_mC_k = -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})A_lB_mC_k = -B.CA_i + A.CB_i$$

# Elemento de área



$$dA = \frac{1}{2} |\vec{x}| h = \frac{1}{2} |\vec{x}| |d\vec{x}| \text{sen} \theta$$

El momento dipolar magnético del lazo  $C$  es:

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$

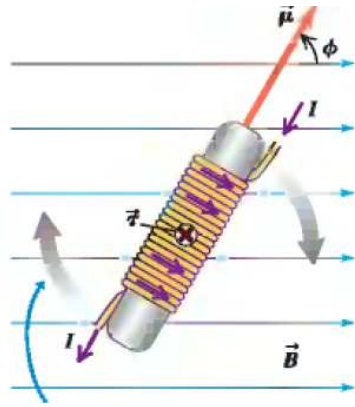
Esto es:  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ .

- Dipolo eléctrico:  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ ;  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$
- Dipolo magnético:  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ ;  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

La energía potencial magnética es mínima cuando  $\vec{\mu}$  es paralelo a  $\vec{B}$ .

**Observación 2.** La aguja de una brújula tiene un momento magnético. Por esto se alinea en la dirección de las líneas de campo magnético.

# Torque sobre un solenoide

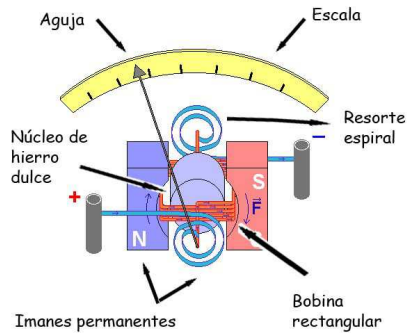


$$\vec{\mu} = NI\vec{A}$$

$$\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}$$

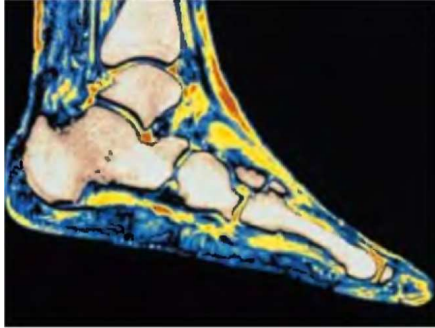
Figura 19. Torque sobre un solenoide de  $N$  vueltas





**Figura 20.** Galvanómetro

El imán permanente crea un campo magnético. La aguja del galvanómetro está atada al eje del solenoide enrollado alrededor del núcleo de hierro dulce que puede girar en torno al eje. Al pasar una corriente por el solenoide se genera un torque proporcional a la corriente, que hace girar el solenoide junto con la aguja. Un torque de restoración es provisto po el resorte espiral.



**Figura 21.** Imagen creada con RMN

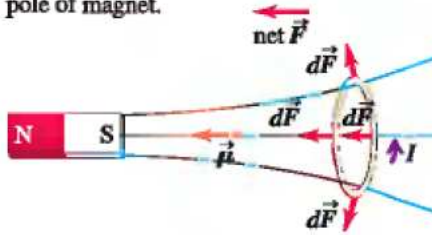
Una aplicación importante del dipolo magnético es Resonancia Magnética Nuclear:

Un paciente se expone a un intenso campo magnético de 1.5 T, más de  $10^4$  veces más fuerte que el campo magnético terrestre.

El núcleo de cada átomo de Hidrógeno del tejido del paciente tiene un momento magnético que se alinea en la dirección del campo. Luego se aplican ondas de radio de justo la frecuencia necesaria para desalinear los núcleos de  $H$ . Estas ondas son absorbidas por el tejido proporcionalmente a la cantidad de  $H$  que haya en él. De esta manera la imagen presenta una diferenciación muy precisa entre los tejidos blandos, ricos en  $H$ , y los tejidos duros, pobres en  $H$ . La precisión es mucho mayor que la imagen obtenida con rayos  $X$  y es menos invasiva.



(b) Net force on same coil is toward south pole of magnet.



En (a)  $\vec{\mu}$  and  $\vec{B}$  tienen direcciones opuestas. La fuerza tiene una componente radial nula. La fuerza neta es a la derecha en la dirección

de menor campo.

En (b)  $\vec{\mu}$  and  $\vec{B}$  tienen la misma dirección. La fuerza tiene una componente radial nula. La fuerza neta es a la izquierda en la dirección de mayor campo.

En efecto, tenemos que:  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , donde  $U$  es la energía potencial del dipolo magnético. Con lo cual:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

&&&&

$$dF_i = I \varepsilon_{ijk} dx_j B_{k,m} x_m$$

$$F_i = I \varepsilon_{ijk} B_{k,m} \oint_C dx_j x_m$$

$$\oint_C dx_j x_m = - \oint_C x_j dx_m + \oint_C d(x_j x_m)$$

$$F_i = \frac{1}{2} I \varepsilon_{ijk} B_{k,m} \oint_C (dx_j x_m - dx_m x_j) =$$

$$\frac{1}{2} I \varepsilon_{ijk} B_{k,m} \varepsilon_{jml} \oint_C (dx \times x)_l =$$

$$-I \varepsilon_{ijk} B_{k,m} \varepsilon_{jml} A_l = \mu_l B_{k,m} (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) = (\mu \cdot B)_i - \mu_i \nabla \cdot B = (\mu \cdot B)_i$$

Sea una carga eléctrica  $q$ , de masa  $m$ , moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  en una órbita  $C$  alrededor de un centro  $O$ . Como la fuerza es central, se conserva el momentum angular de la carga. Desde fuera, la órbita es un lazo de corriente con  $I = \frac{q}{T}$ , donde  $T$  es el período de la órbita.

El momento magnético es:

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{x} \times d\vec{x} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \frac{I}{2m} \vec{L} T = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Esta relación entre el momento magnético y el momentum angular es cierta aún en mecánica cuántica, que es la descripción correcta de los fenómenos atómicos.

Al interior de los átomos hay electrones orbitando. Por esto tienen un momento magnético asociado al momentum angular de dichos electrones.

Las partículas elementales poseen un momentum angular intrínseco llamado espín y por consiguiente tienen un momento magnético asociado al espín.



Figura 22.

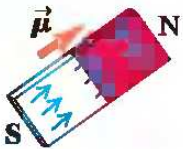


Figura 23.

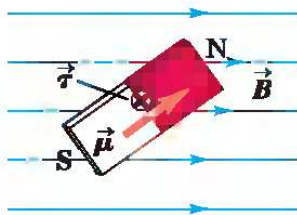


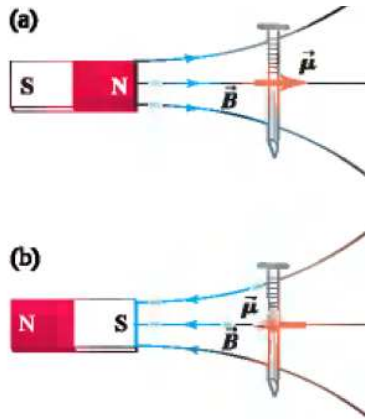
Figura 24.

(22) Debido a las fluctuaciones de temperatura, los dipolos elementales están orientados al azar, por lo que el momento magnético neto es nulo.

(23) En un imán, los dipolos magnéticos elementales están orientados en la misma dirección, del polo sur al polo norte. Existe un momento magnético neto no nulo.

(24) Un campo magnético ejerce un torque sobre el imán, alineando su momento magnético en la dirección de  $\vec{B}$ . El imán rota hasta alinearse con  $\vec{B}$ .

Así funciona la brújula. Esta se alinea en la dirección del campo magnético de la Tierra, que apunta hacia el polo norte magnético

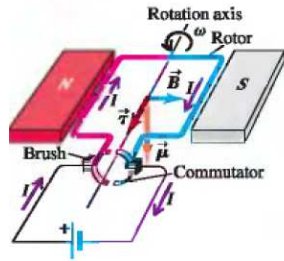


Un imán atrae un objeto no magnetizado en

dos pasos:

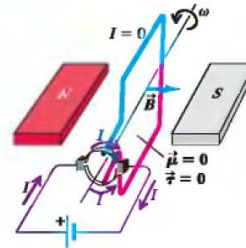
(1) El campo magnético del imán alinea los dipolos magnéticos microscópicos de los átomos de hierro, induciendo en el clavo un momento magnético  $\vec{\mu}$  paralelo a  $\vec{B}$ .

(2) El momento magnético inducido interactúa con el campo magnético. La fuerza apunta en la dirección de  $\vec{B}$  creciente (atractiva).



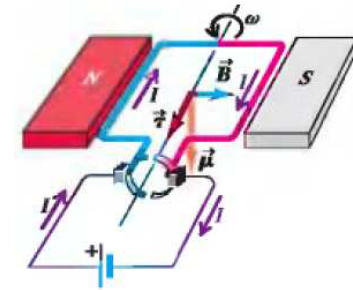
**Figura 25.** Las brochas están alineadas con los segmentos del conmutador

La corriente entra(sale) en el lado rojo(azul) del rotor. El torque tiende a alinear  $\vec{\mu}$  del rotor con el campo magnético. El rotor gira en dirección contraria a las manecillas del reloj.



**Figura 26.** El rotor ha girado en  $90^\circ$ .

Cada brocha está en contacto con los dos segmentos del conmutador. No pasa corriente por el rotor. No hay torque. El rotor sigue girando por inercia.



**Figura 27.** El rotor ha girado en  $180^\circ$

La corriente entra(sale) en el lado azul(rojo) del rotor. El rotor gira en dirección contraria a las manecillas del reloj.



$$V_{ab} = \varepsilon + Ir$$

$V_{ab}$ : Diferencia de potencial entre los terminales del motor.

$\varepsilon$ : fem inducida. La estudiaremos después.

$r$ : resistencia interna del motor.

La potencia es  $P = IV_{ab}$ .

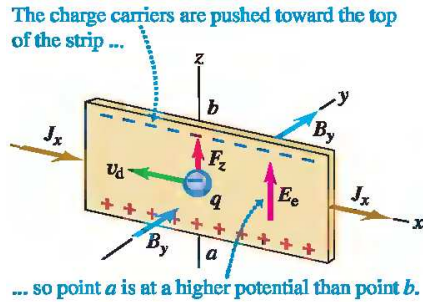


Figura 28.

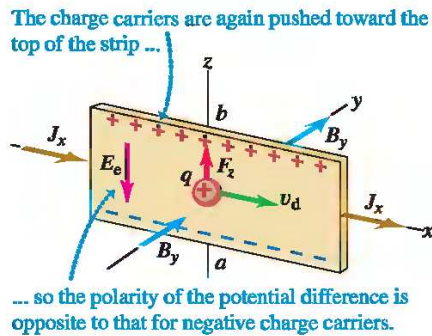


Figura 29.

Una corriente  $J_x$  atraviesa la zona rectangular donde hay un campo magnético en la dirección  $y$ .

(28) La carga de los portadores es negativa y se mueven hacia  $-x$ . La fuerza es en la dirección  $z$ . Hay más electrones en la parte superior del rectángulo. Se genera un campo eléctrico que apunta de la parte inferior a la superior del rectángulo.

(29) La carga de los portadores es positiva y se mueven hacia  $x$ . La fuerza es en la dirección  $z$ . Hay más cargas positivas en la parte superior del rectángulo. Se genera un campo eléctrico que apunta de la parte superior a la inferior del rectángulo.  $qE_z = -qv_dB_y$ ,  $E_z = -v_dB_y$

Este campo induce una diferencia de potencial entre  $b$  y  $a$  (fem de Hall o potencial de Hall). Si el portador tiene carga negativa,  $V_a > V_b$  (metales). Si el portador tiene carga positiva,  $V_a < V_b$  (semiconductores).