

# Capacidad y Dieléctricos

La **botella de Leyden** es un dispositivo eléctrico realizado con una botella de vidrio que permite almacenar **cargas eléctricas**. Históricamente la **botella de Leyden** fue el primer tipo de condensador eléctrico.

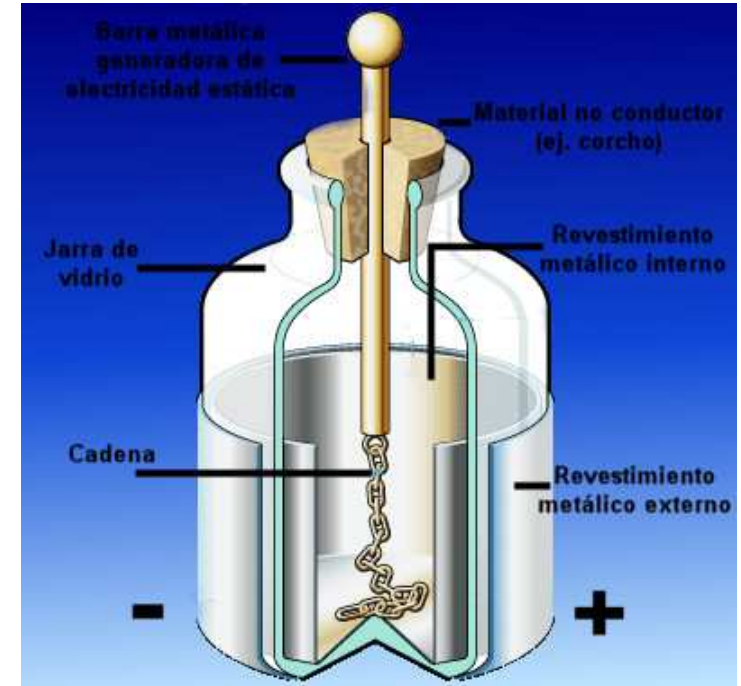
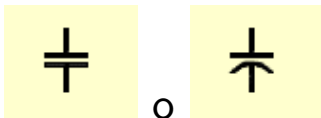


Figura 1. Botella de Leyden

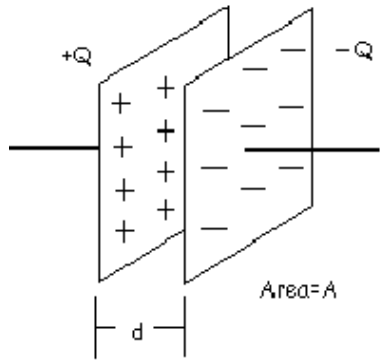
En los circuitos eléctricos los condensadores son representados por



Sean dos superficies conductoras,  $S_1$  y  $S_2$ , inicialmente descargadas. Usando una fuente de poder, transferimos una carga  $Q$  de  $S_1$  a  $S_2$ .  $S_1$  queda con una carga  $-Q$ . Como las dos superficies son conductoras, las dos son equipotenciales. Sea  $V_i$  el potencial de  $S_i$ . Definimos la capacidad del sistema de conductores por:

$$C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|} \quad (1)$$

Las unidades de capacidad son 1 faradio(F)=1  $\frac{C}{V}$



**Figura 2.**

Suponemos que los efectos de borde son

despreciables, por lo tanto podemos usar la aproximación de área grande para las placas. Para encontrar el campo eléctrico en la placa con carga  $Q$  y área  $A$ , con densidad superficial de carga  $\sigma = \frac{Q}{A}$ , usamos la ley de Gauss, aplicada a un caja de lados paralelos a la placa, de superficie  $S$ , con los otros lados perpendiculares a ella.

Por simetría el campo sale de la placa en ambos lados de ella:

$$ES + (-E)(-S) = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z}$$

Por superposición podemos calcular la contribución al campo debido a los dos conductores:

1. Fuera de las placas, el campo se anula
2. Al interior de las placas, el campo apunta de la placa cargada con  $Q$  a la placa cargada con  $-Q$  y vale  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
3. La diferencia de potencial entre las placas es  $V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d$ , donde  $d$  es la separación entre las placas.
4. La capacidad es  $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

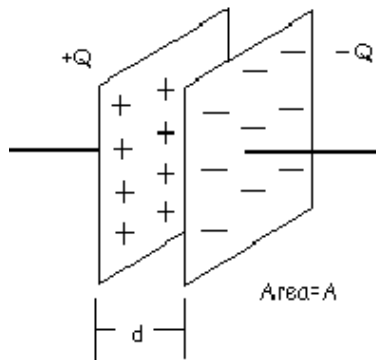


Figura 3.

**Micrófono de condensador.** Está hecho de dos placas conductoras. Una fija y otra móvil, mantenidas a diferencia de potencial constante. Cuando el sonido mueve la placa móvil, cambia  $C$ , lo que produce un movimiento de cargas que salen y entran al condensador. Esta corriente puede ser amplificada posteriormente.



Figura 4.

Consiste en dos cilindros conductores concéntricos de largo  $L$ . El radio del cilindro interior es  $a$  y tiene carga uniformemente distribuida  $Q$ . El radio del cilindro exterior es  $b > a$  y tiene carga  $-Q$

1. Entre los cilindros el campo es radialmente hacia afuera y depende sólo de la distancia al eje del cilindro  $r$ . Aplicando la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $r$ , concéntrica con los dos conductores obtenemos:  $E 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ,  $E = \frac{Q}{2\pi L r \epsilon_0}$
2. La diferencia de potencial es  $V = \int_a^b dr \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
3. La capacidad es  $C = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Consiste en dos esferas conductoras concéntricas. La interior de radio  $a$  y carga  $Q$ ;

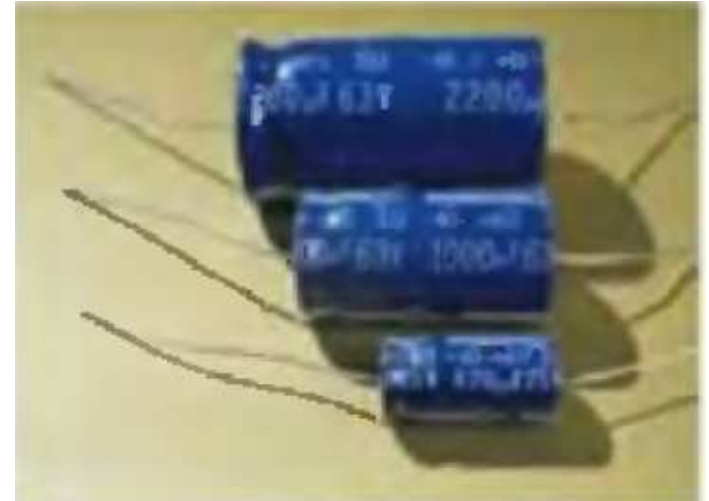
la exterior de radio  $b > a$  y carga  $-Q$ .

1. El campo eléctrico entre las esferas se dirige radialmente hacia afuera y depende sólo de la distancia  $r$  al centro de las esferas. Rodeamos la esfera interior con una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ .  $E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ,  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

2. La diferencia de potencial entre las dos esferas conductoras es:  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} =$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

3. La capacidad es  $C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$



**Figura 5.**

Condensadores Comerciales

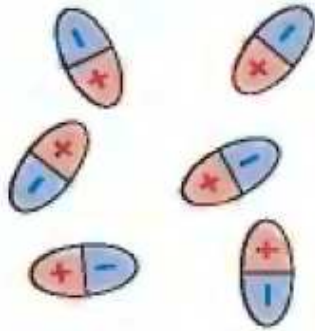
Recordemos que:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x})$$

Dado que las placas del condensador son conductoras, son equipotenciales. La placa  $A$  ( $B$ ) está a un potencial  $\Phi_A$  ( $\Phi_B$ ).

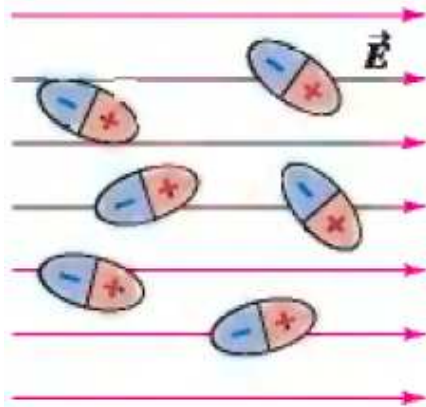
$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) (\Phi_A - \Phi_B) = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Energía almacenada en un condensador:  $U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$



**Figura 6.**

Moléculas polares distribuidas al azar.



**Figura 7.**

Moléculas polares en presencia de un campo eléctrico externo

Fig. 6: Debido a la agitación térmica las moléculas polares (con un momento dipolar eléctrico intrínseco), están orientadas al azar, por lo que el momento dipolar medio se anula.

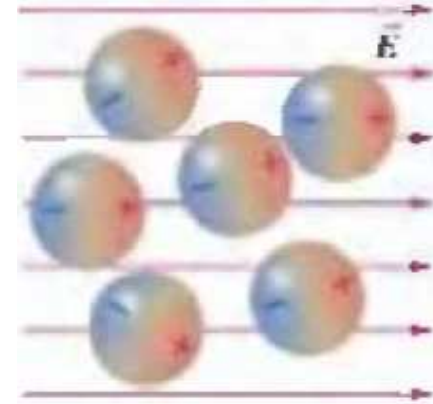
Fig. 7 Cuando se agrega un campo eléctrico externo, los momentos dipolares de las moléculas se orientan en la dirección del campo eléctrico. Debido a la agitación térmica la orientación de los dipolos elementales no es perfecta. El momento dipolar medio es distinto de cero.





**Figura 8.**

Moléculas no polares sin campo eléctrico externo

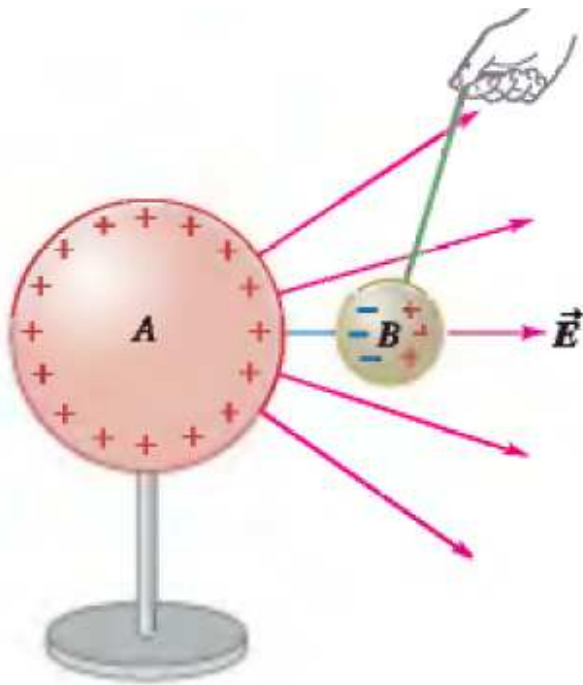


**Figura 9.**

Moléculas no polares en presencia de un campo eléctrico externo.

Fig. 8 Las moléculas no polares no poseen un momento dipolar intrínseco.

Fig. 9 Cuando se agrega un campo eléctrico externo, en las moléculas no polares se induce un momento dipolar, porque el campo eléctrico separa las cargas positivas de las cargas negativas en la molécula.



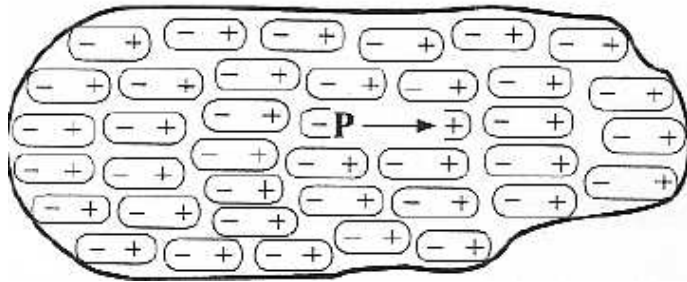
**Figura 10.**

La esfera B sin carga eléctrica es atraída por la esfera A debido a la polarización.

Consideremos un pequeño volumen  $\Delta v$  al interior de un dieléctrico, cuya carga total es cero. Si el medio está polarizado, se ha producido una separación entre las cargas eléctricas positivas y negativas dando lugar a un momento dipolar.

Definimos la polarización en el punto  $\vec{x}$  del dieléctrico por  $\vec{P}(\vec{x}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v}$ , donde  $\Delta \vec{p}$  es el momento dipolar eléctrico contenido en  $\Delta v$ .

Las unidades de  $\vec{P}$  son cargas por unidad de área:  $C/m^2$ .



**Figura 11.**

Pedazo de dieléctrico polarizado.

Como la polarización es momento dipolar eléctrico por unidad de volumen podemos calcular el potencial eléctrico lejos del dieléctrico sumando la contribución de los dipolos elementales:

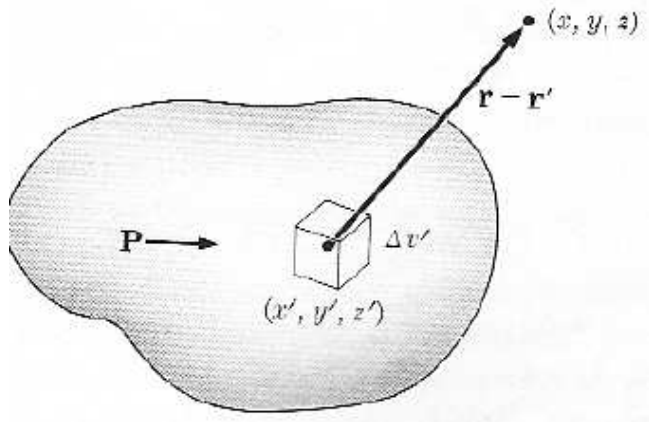


Figura 12.

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d^3x' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\text{Pero: } \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

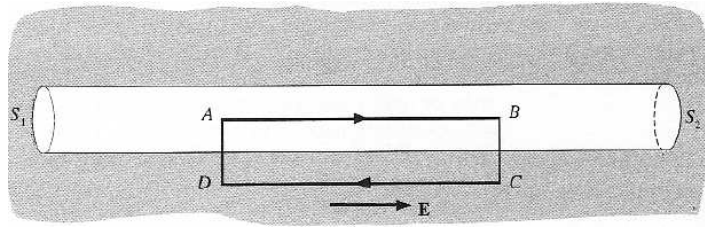
$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V d^3x' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \int_V d^3x' \nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_V d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Usando el teorema de la divergencia en el penúltimo término se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \oint_S dS \frac{\hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \\ &= \int_V d^3x' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

El potencial electrostático debido a la polarización es debido a:

- Una densidad de carga superficial de polarización  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$
- Una densidad volumétrica de carga de polarización  $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$



**Figura 13.**

Cavidad en forma de aguja fuera del dieléctrico.

La trayectoria ABCD está contenida parcialmente dentro de la cavidad y dentro del dieléctrico.

Dado que  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$  tenemos que:

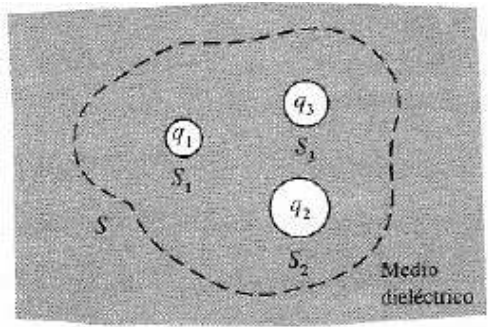
$$E_c d_{AB} + E_1 d_{BC} - E_d d_{AB} + E_2 d_{BC} = 0$$

Pero  $d_{BC}$  se puede considerar arbitrariamente chico. Entonces:

$$E_c = E_d$$

Como la orientación de la cavidad con forma de aguja es arbitraria, encontramos que el campo eléctrico al interior del dieléctrico coincide con el campo al interior de la cavidad, por lo que está dado por (se ha considerado una cavidad arbitrariamente pequeña).

$$\Phi(\vec{r}) = \oint_S dS \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



**Figura 14.**

Superficie gaussiana  $S$  que rodea un volumen  $V$  en un medio dieléctrico

Consideremos tres conductores con cargas  $q_1, q_2, q_3$  con superficies  $S_1, S_2, S_3$ . La ley de Gauss da:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}(Q + Q_P), \quad Q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$Q_P = \oint_{S_1+S_2+S_3} dS \vec{P} \cdot \hat{n} + \int_V d^3x (-\nabla \cdot P)$$

Usar el teorema de la divergencia para transformar el último término en una integral de superficie sobre  $S_1, S_2, S_3, S$ . La contribución de  $S_1, S_2, S_3$  cancela el primer término de  $Q_P$ , por lo cual  $Q_P = \oint_S dS (-\vec{P} \cdot \hat{n})$

La ley de Gauss es, ahora:  $\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q$ . Introduciendo el desplazamiento eléctrico

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , tenemos finalmente:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (2)$$

$Q$  representa sólo las cargas libres al interior del dieléctrico.

Para la mayoría de los materiales  $\vec{P}$  se anula cuando  $\vec{E} = \vec{0}$ . En este curso sólo consideramos materiales isotrópicos. Por lo tanto:

$$\vec{P} = \chi(E)\vec{E}$$

$\chi(E)$  se llama la susceptibilidad eléctrica del material.

Se tiene  $\vec{D} = \varepsilon(E)\vec{E}$

- $\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \chi(E)$  es la permitividad del material.
- La constante dieléctrica o permitividad relativa es  $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
- $\varepsilon, \varepsilon_0, \chi$  tienen las mismas dimensiones.

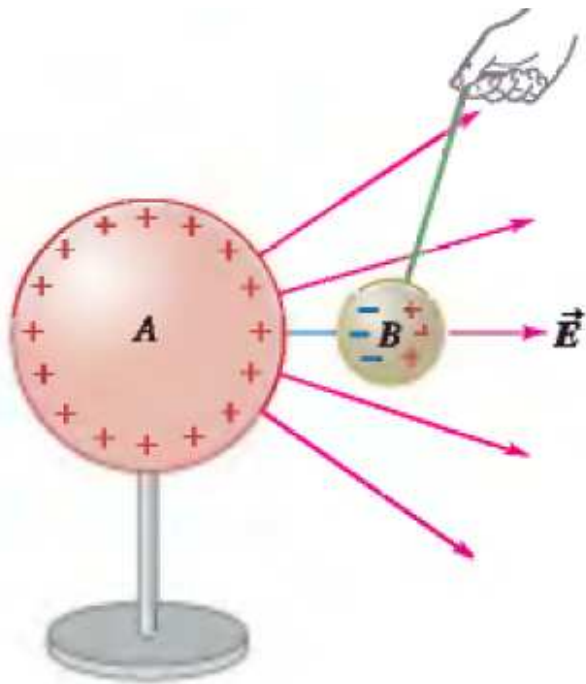
Para dieléctricos **lineales**  $\varepsilon$  es una constante.



# Constante Dieléctrica

Material	K (adimensional)
Aceite mineral	19,5
Agua	78,5
Caucho	de 20 a 50
Acetona	191
Aire	$1,00058986 \pm 0.00000050$ (en CNPT, para 0,9 MHz)
Papel duro	49,5
Agua destilada	$88,0 \pm 0^{\circ}C$
	55,3 a $100^{\circ}C$
PVC	de 30 a 40
Baquelita	de 50 a 80
Vidrio	de 40 a 60
Mica	5,4

CNPT=Condiciones normales de presión y temperatura.



**Figura 15.**

La esfera B sin carga eléctrica es atraída por la esfera A debido a la polarización.

Fuerza sobre un dipolo en presencia de un

campo eléctrico variable. El dipolo está constituido por una carga  $q$  en  $\vec{x} + l\hat{n}$  y una carga  $-q$  en  $\vec{x} - l\hat{n}$ . El momento dipolar es  $\vec{p} = 2ql\hat{n}$

$$F_i = q(E_i(\vec{x} + l\hat{n}) - E_i(\vec{x} - l\hat{n})) = q(\partial_j E_i(\vec{x})2ln_j + \dots) = p_j \partial_j E_i(\vec{x})$$

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{x})$$

$$\vec{p}_B = \vec{P}V_B \quad \vec{P} = \chi \vec{E}$$

$$\vec{F} = \chi V_B (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{x})$$

$$E = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = \hat{r} \chi V_B k \frac{Q}{r^2} \partial_r k \frac{Q}{r^2} = -2k^2 \chi V_B \frac{Q^2}{r^5} \hat{r}$$

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{D} = Q$$
$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \int_V d^3x \rho$$

Como el volumen  $V$  es arbitrario, se satisface que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Recordemos que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \Phi = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} \Phi) - \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{D} \cdot \nabla \Phi$$

$$\frac{1}{2} \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{D} \Phi + \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Si  $V$  incluye todo el espacio.  $S$  es la esfera de radio infinito. El flujo de  $\vec{D} \Phi$  se anula allí:

$$\frac{1}{2} \oint_S dS \cdot \vec{D} \Phi = \frac{1}{2} 4\pi R^2 \epsilon \frac{Q^2}{R^3} = \frac{2\pi Q^2 \epsilon}{R} \rightarrow 0, \text{ si } R \rightarrow \infty$$

Podemos decir que la energía se acumula en el campo eléctrico con una densidad:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x})$$

- Condensador de placas paralelas conductoras gruesas, lleno con dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ :  $D = \sigma \hat{z}$  (z crece hacia la carga negativa);  $E = \frac{\sigma}{\epsilon} z$

$$\Phi(d) - \Phi(0) = -d \frac{\sigma}{\epsilon}, C = \epsilon \frac{A}{d}$$

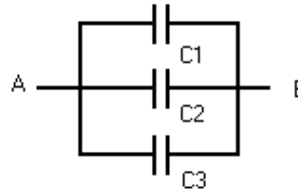
- Condensador esférico: radio interior a, radio exterior b, lleno con dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad V = \int_a^b dr \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Consiste en dos cilindros conductores concéntricos de largo  $L$ . El radio del cilindro interior es  $a$  y tiene carga uniformemente distribuida  $Q$ . El radio del cilindro exterior es  $b > a$  y tiene carga  $-Q$ . El espacio entre  $a$  y  $b$  está lleno con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ .

1. Entre los cilindros el campo (y el desplazamiento) es radialmente hacia afuera y depende sólo de la distancia al eje del cilindro  $r$ . Aplicando la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio  $r$ , concéntrica con los dos conductores obtenemos:  $D 2\pi r L = Q$ ,  $E = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon}$
2. La diferencia de potencial es  $V = \int_a^b dr \frac{Q}{2\pi r L \epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
3. La capacidad es  $C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

En todos los ejemplos se tiene que  $\frac{C}{C_0} = K$ , donde  $C$  es la capacidad del condensador en presencia del dieléctrico y  $C_0$  es la capacidad del condensador sin dieléctrico. Midiendo la capacidad en los dos casos podemos determinar el valor de  $K$ .

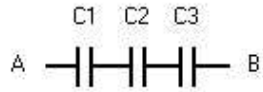


Consideremos el circuito siguiente:**Figura 16.** Condensadores en paralelo

La diferencia de voltaje  $V$  es común a todos los condensadores. La carga total acumulada en las placas conectadas a  $A$  es:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V$$
$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

Condensadores en paralelo:  $C = \sum_i C_i$



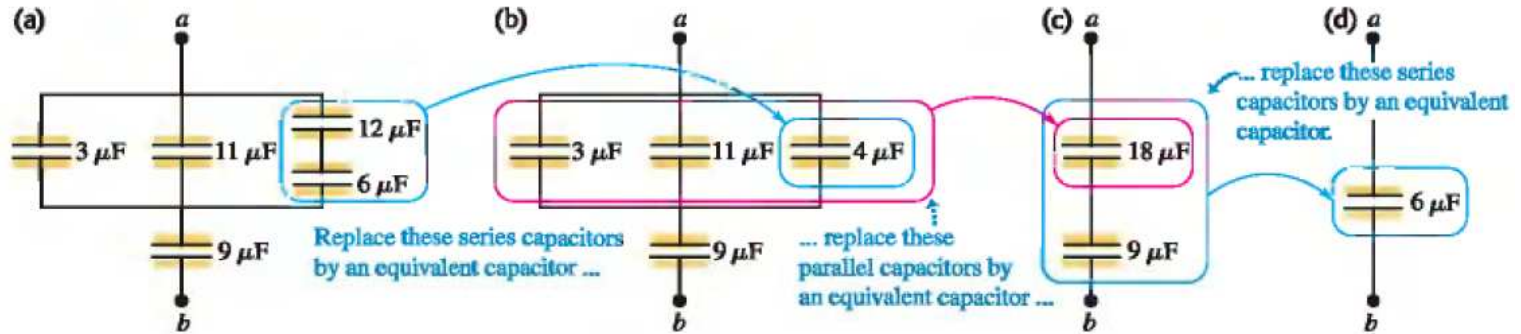
**Figura 17.** Condensadores en serie

Dado que el campo eléctrico se anula fuera de los condensadores, la carga contenida en cada condensador es la misma  $Q$ , pero se genera una diferencia de voltaje  $V_i$  en el condensador  $i$ . Se tiene:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Condensadores en serie:  $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$





**Figura 18.**

a) En serie.  $\frac{1}{C_a} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ,  $C_a = 4\ \mu\text{F}$

b) En paralelo.  $C_b = 3 + 11 + 4 = 18\ \mu\text{F}$ .

c) En serie.  $\frac{1}{C_c} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ ,  $C_c = 6\ \mu\text{F}$ .

- Sistema aislado:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$ ; como es aislado  $dW = -dU$  ( $U$  es la energía electrostática).
- Se tiene:  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ .
- Si el sistema puede rotar, se tiene  $dW = \tau d\theta$ . Luego  $\tau = -\frac{dU}{d\theta}$ .
- Conductores mantenidos a potencial constante por una fem exterior:

$$dW = dW_b - dU, \quad dU = \frac{1}{2} \sum_j \Phi_j dQ_j \quad dW_b = \sum_j \Phi_j dQ_j$$

Luego  $dW_b = 2dU$

- Se tiene que  $\vec{F} = \vec{\nabla}U$  (Notar la diferencia de signo entre las dos situaciones).
- Similarmente  $\tau = \frac{dU}{d\theta}$

**Ejercicio 1:** Considere un condensador de placas paralelas aislado. En éste se introduce un dieléctrico de constante  $K_1$ . Encuentre la fuerza que actúa sobre el dieléctrico.

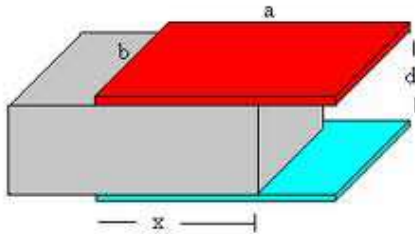


Figura 19.

Asignamos densidades de carga  $\sigma_1$  a la zona con dieléctrico y  $\sigma_2$  a la zona sin dieléctrico. Tomemos como superficie gaussiana un cilindro con la tapa superior sumergida en la superficie conductora roja, la tapa inferior sumergida en el dieléctrico. El manto del cilindro es perpendicular a las placas. La ley de Gauss da:

$$DA = \sigma A \quad D = \sigma \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Este resultado es válido para las dos zonas. Como la diferencia de potencial es la misma (un conductor forma una superficie equipotencial), se encuentra  $E_1 = E_2$ .

Esto es  $\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ . La energía contenida en el volumen es  $U = \frac{1}{2} QV$ .  $V = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} d$ .

$$Q = \sigma_1 b x + \sigma_2 b (a - x) = \sigma_1 b \left( x + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} (a - x) \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{b \left( x + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} (a - x) \right)} \cdot V = \frac{Q d}{b \epsilon_0 (x K_1 + K_2 (a - x))}$$

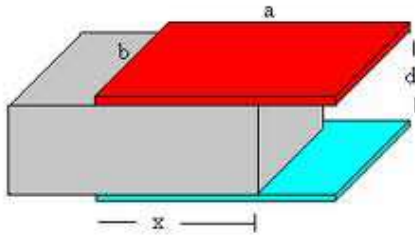
$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{b \epsilon_0 (K_1 x + (a - x) K_2)}$$

Se obtiene:

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d (K_1 - K_2)}{b \epsilon_0 (K_1 x + (a - x) K_2)^2}$$

Esta fuerza tira al dieléctrico hacia el interior del condensador, dado que  $K_1 > K_2 = 1$ .

**Ejercicio 2:** Considere un condensador de placas paralelas cuyas placas están conectadas a los polos de una batería. En éste se introduce un dieléctrico de constante  $K_1$ . Encuentre la fuerza que actúa sobre el dieléctrico.



**Figura 20.**

Como en el ejercicio 1, tenemos que la energía contenida en el volumen es  $U = \frac{1}{2}QV$  con  $V = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}d$ . El proceso sucede a

diferencia de potencial constante  $V$ . Por lo tanto  $\sigma_1 = \frac{\epsilon_1 V}{d}$ ,  $Q = \sigma_1 b x + \sigma_2 b(a - x) = \sigma_1 b \left( x + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}(a - x) \right) = \frac{b \epsilon_0 V}{d} (K_1 x + K_2(a - x))$

$$U = \frac{bV^2 \epsilon_0 ((a - x)K_2 + xK_1)}{2d}$$

La fuerza es:

$$F = \frac{bV^2 \epsilon_0 (K_1 - K_2)}{2d}$$

Nuevamente la fuerza es hacia el interior del condensador.

Ejercicio 3: Un capacitor de placas paralelas se llena con dos dieléctricos en serie horizontal con permitividad  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  de áreas  $S_1$  y  $S_2$ . Las placas están separadas una distancia  $d$ . Encontrar  $C$ .

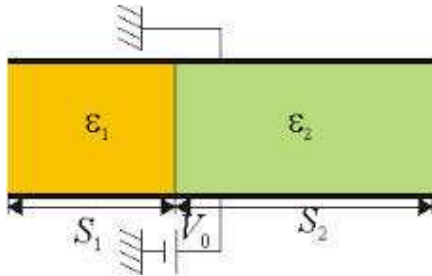


Figura 21.

Asignamos densidades de carga  $\sigma_1$  a la zona con permitividad  $\epsilon_1$  y  $\sigma_2$  a la zona con permitividad  $\epsilon_2$ . Tomemos como superficie gaussiana un cilindro con la tapa superior sumergida en la superficie conductora superior, la tapa inferior sumergida en el dieléctrico. El manto del cilindro es

perpendicular a las placas. La ley de Gauss da:

$$DA = \sigma A \quad D = \sigma \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Este resultado es válido para las dos zonas.

Como la diferencia de potencial es la misma (un conductor forma una superficie equipotencial), se encuentra  $E_1 = E_2$ .

Esto es  $\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$ . Además  $V = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}d$ .

$$Q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \sigma_1 \left( S_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} S_2 \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{S_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} S_2} \cdot V = \frac{Qd}{(\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2)}$$

R:

$$C = \frac{(\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2)}{d}$$

Ejercicio 4: Un capacitor de placas paralelas se llena con dos dieléctricos en serie vertical con permitividad  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , área  $A$  y largos  $a$  y  $b$ . Encontrar  $C$ .

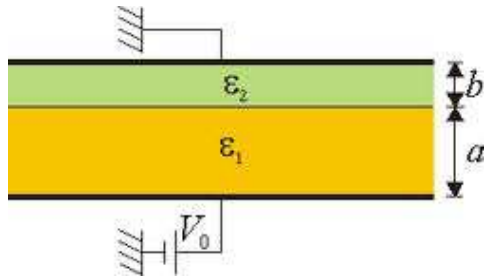


Figura 22.

Sea  $\sigma$  la densidad superficial de carga en la placa inferior y  $V_0 > 0$ . Tomemos como superficie gaussiana un cilindro con la tapa superior sumergida en la superficie

conductora inferior, la tapa superior sumergida en el dieléctrico. El manto del cilindro es perpendicular a las placas. La ley de Gauss da:

$$DA = \sigma A \quad D = \sigma \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad \sigma = \frac{Q}{A}$$

Este resultado es válido para las dos zonas. Se tiene que  $V_0 = E_1 a + E_2 b = \sigma \left( \frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b}{\epsilon_2} \right)$

$$V_0 = \frac{Q}{A} \left( \frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b}{\epsilon_2} \right)$$

R:

$$C = \frac{A}{\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{b}{\epsilon_2}}$$

La *ruptura dieléctrica* se produce cuando el campo eléctrico entre dos conductores supera un valor crítico  $E_c$ , saltando una chispa en el vacío, o quemando el dieléctrico que pueda haber en medio. Esto limita la carga que se puede almacenar en las placas de un condensador.



**Figura 23.**

Ruptura dieléctrica en un bloque de Plexiglás.

Entendemos por rigidez dieléctrica o rigidez electrostática el valor límite de la intensidad del campo eléctrico  $E_c$  en el cual un material pierde su propiedad aislante y pasa a ser conductor. Se mide en voltios por metro V/m (en el SI). También podemos definirla como la máxima tensión que puede soportar un aislante sin perforarse. A esta tensión se la denomina tensión de rotura de un dieléctrico.

## Rotura dieléctrica

Sustancia	Rotura dieléctrica (MV/m)
Helio	0.15
Aire	0.4 - 3.0 (depende de la presión)
Alumina	13.4
Vidrio de ventana	9.8 - 13.8
Aceite de silicio, Aceite mineral	10 - 15
Benceno	16
Poliestireno	19.7
Polietileno	18.9 - 21.7
Goma de Neopreno	15.7 - 27.6
Agua pura	30
Vacío	20 - 40 (depende de la forma del electrodo)
Vaso de cuarzo	25 - 40
Papel de cera	40 - 60
Teflon	60
Mica	20 - 70
Película delgada de SiO <sub>2</sub>	> 1000
Parafina	13.9
Papel parafinado	32 - 40 (depende del grosor de cada material)