



Figura 1. Este enorme cilindro es una bobina para generar campos magnéticos muy fuertes en el LHC en el CERN.

Campo magnético de una carga en movimiento

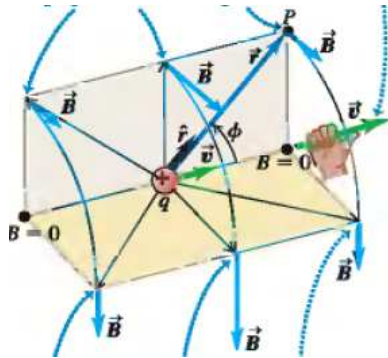


Figura 2. Campo magnético de una carga q con velocidad \vec{v} constante.

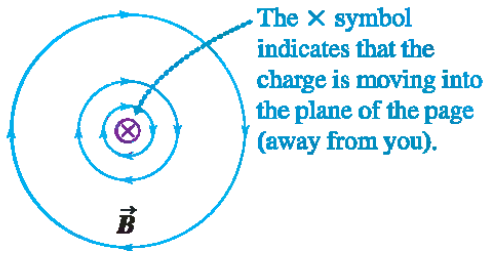


Figura 3. Vista de atrás de la carga

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

\vec{r} es el vector que va de la carga al punto de observación del campo P. $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, donde r es el módulo de \vec{r} .

En MKS: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$

La velocidad de la luz es:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Lo que muestra una profunda relación entre la luz y los fenómenos electromagnéticos que dilucidaremos más adelante.

Sea un elemento de corriente dl por el cual circula una corriente I . Queremos encontrar el campo magnético debido a este elemento de corriente.

- La carga contenida en el elemento $dl = v dt$ es $dq = I dt = I \frac{dl}{v}$.
- Por lo tanto:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{v} \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

donde $d\vec{l}$ apunta en la dirección de la corriente.

- Ley de Biot y Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

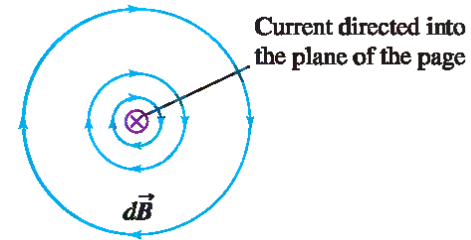


Figura 4. Líneas de campo debidas a una corriente

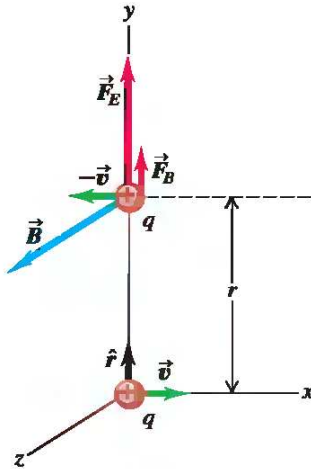


Figura 5. Fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos cargas.

Dos protones se mueven paralelos al eje x, en direcciones opuestas, con la misma rapidez v . Encuentre las fuerzas actuando sobre el protón de arriba y calcule su cociente para

$$v \ll c.$$

(a) La fuerza eléctrica es: $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$. Es repulsiva.

(b) La fuerza magnética es: $F_B = qvB(r)$. $B(r) = \mu_0 q \frac{v}{r^2}$. Las líneas de campo son circunferencias centradas en el eje x. La regla de la mano derecha nos dice que \vec{B} es perpendicular al plano de la figura y sale hacia afuera de la figura. Así que la fuerza magnética sobre el protón de arriba apunta en la dirección de \hat{y} . Es repulsiva. $F_B = \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 \frac{v^2}{r^2}$

(c) $\frac{F_B}{F_E} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$

Regla de la mano derecha: Tomo el alambre con la mano derecha, con el pulgar apuntando en la dirección de la corriente. Entonces las líneas de campo magnético son círculos con el campo apuntando en la dirección de los otros dedos de la mano.

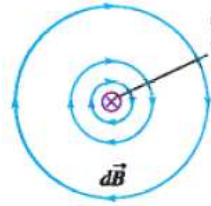


Figura 6. Corriente entrando al plano de la página

Consideremos un conductor rectilíneo infinito a lo largo del eje z , por el cual circula una corriente I . Por la regla de la mano derecha las líneas de campo magnético son círculos concéntricos centrados en el conductor. Por simetría, el campo magnético no depende de z y sólo depende de la distancia radial r del punto P al alambre. Lo evaluaremos en el punto $r \hat{x}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz \hat{z} \times (-z \hat{z} + r \hat{x})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{y} r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{y} r \frac{2}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{y}$$

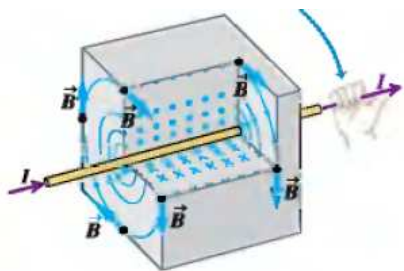


Figura 7. Conductor infinito portando una corriente I .

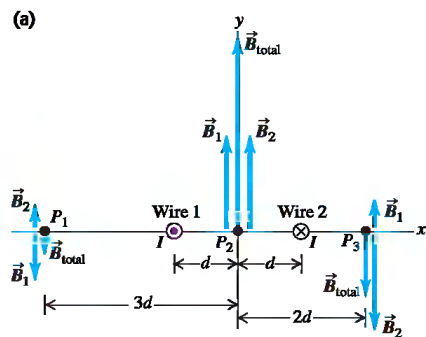


Figura 8.

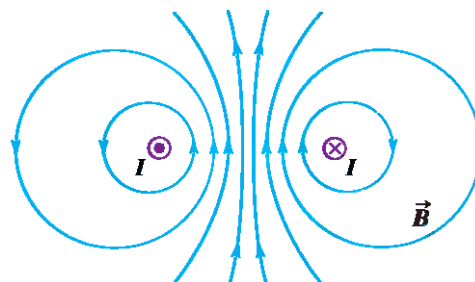


Figura 9.

Dado que los conductores son muy largos (infinitos), el campo magnético no depende de z . Por superposición obtenemos, en un punto (x, y, z) .

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I ((y\hat{x} - (x-d)\hat{y}))}{2\pi((x-d)^2 + y^2)} - \frac{\mu_0 I ((y\hat{x} - (x+d)\hat{y}))}{2\pi((x+d)^2 + y^2)}$$

Si $x \gg d$,

$$\begin{aligned} ((x-d)^2 + y^2)^{-1} &= x^{-2}(1 + 2d/x) \\ \vec{B}(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 I \hat{y}}{2\pi x} ((1 - d/x)(1 + 2d/x) - (1 + d/x)(1 - 2d/x)) \sim \\ &= -\frac{\mu_0 I \hat{y}}{2\pi x} (1 + 2d/x - d/x - 1 + 2d/x - d/x) = \\ &= -\frac{\mu_0 I \hat{y} 2d}{2\pi x x} = -\frac{\mu_0 I d \hat{y}}{\pi x^2} \end{aligned}$$

Este campo decrece más rápido que el de un sólo cable.

En sistemas de comunicación y computacionales la señal entrante y la saliente se transportan en cables muy cercanos, de tal manera de reducir el campo magnético creado por ellas, que podría afectar el comportamiento de los circuitos.



Figura 10.

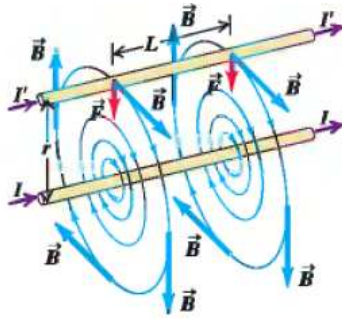


Figura 11.

Dos conductores paralelos llevan corrientes I, I' .

(a) Si las corrientes tienen la misma dirección, los conductores se atraen.

(b) Si las corrientes tienen dirección opuesta, los conductores se repelen.

Recordemos que la fuerza magnética sobre un conductor con corriente I es

$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, donde $d\vec{l}$ apunta en la dirección de la corriente.

En nuestro caso, obtenemos:

$$F = I' L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

Definición del Ampere

Un Ampere es la corriente tal que si está presente en cada uno de dos conductores paralelos infinitos, separados por un metro, en el espacio vacío, produce en cada conductor una fuerza de $2 \times 10^{-7} N$ por unidad de longitud.

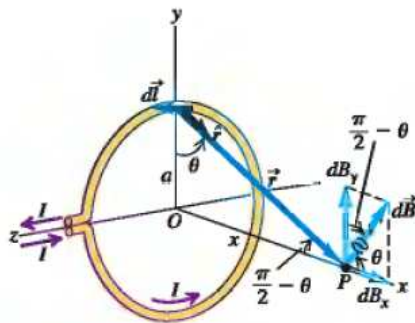


Figura 12.

Encontremos el campo magnético en un punto P sobre el eje de la espira, a una

Por simetría rotacional en torno al eje de la espira, el campo magnético sólo puede estar en la dirección \hat{x} .

Si se tiene un solenoide de N vueltas compuesto por espiras del mismo radio a , muy cercanas entre sí, el campo magnético en el eje del solenoide, a una distancia x del centro es $\frac{\mu_0}{2} I a^2 N (a^2 + x^2)^{-3/2}$

distancia x del centro O .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I a \int_0^{2\pi} d\phi \hat{\phi} \times (x\hat{x} - a \cos\phi(-\hat{z}) - a \sin\phi\hat{y})(a^2 + x^2)^{-3/2} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I a \int_0^{2\pi} d\phi (\sin\phi\hat{z} + \cos\phi\hat{y}) \times (x\hat{x} + a \cos\phi\hat{z} - a \sin\phi\hat{y})(a^2 + x^2)^{-3/2} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I a^2 (a^2 + x^2)^{-3/2} \int_0^{2\pi} d\phi \hat{x} (\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \frac{\mu_0}{2} I a^2 (a^2 + x^2)^{-3/2}
 \end{aligned}$$

Escribiendo este resultado como función del momento magnético del solenoide $\vec{\mu} = NI\pi a^2 \hat{x}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{\mu} (a^2 + x^2)^{-3/2}$$

Vemos que un momento magnético $\vec{\mu}$ también es fuente de un campo magnético, cuyo valor en el eje es la última ecuación.

Si $x \gg a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}$.

En general, el campo magnético creado por un dipolo $\vec{\mu}$ lejos de él es:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{x})\vec{x} - x^2 \vec{\mu}}{|\vec{x}|^5}$$

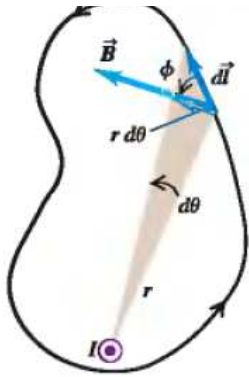


Figura 13.

$\vec{B} \perp \vec{r}$, $dl \cos \phi$ es la proyección de dl sobre la circunferencia de radio r . Por lo tanto:
 $dl \cos \phi = r d\theta$, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B r d\theta$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
 $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$, $\oint d\theta = 2\pi$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

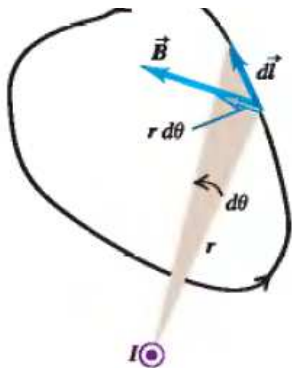


Figura 14.

Se repite el mismo análisis de más arriba. Sin embargo ahora $\oint d\theta = 0$.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

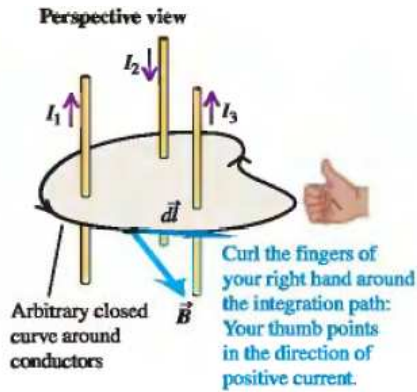


Figura 15.

Signo de la corriente: Curvar los dedos de la mano derecha en la dirección de la

curva C , entonces el dedo pulgar apunta en la dirección **positiva** de I . Corrientes con la dirección contraria son negativas.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_S I_S$$

La suma se extiende sobre todas las corrientes que atraviesan la superficie S cuya frontera es la curva C .

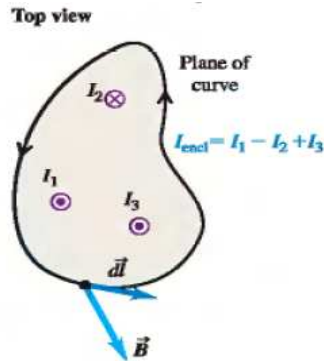


Figura 16.

Sea una línea infinita a lo largo de z , por la cual circula una corriente I en la dirección de \hat{z} . Por simetría el campo magnético no depende de z y las líneas de campo son circunferencias concéntricas cuyo centro es el conductor. B sólo depende de la distancia r a la línea infinita. Por la regla de la mano derecha, mirado desde la dirección positiva del eje z , las líneas de campo apuntan en la dirección antihoraria.

Sea C un círculo de radio r en un plano perpendicular al conductor. Se tiene:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad B \oint_C dl = 2\pi r B \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

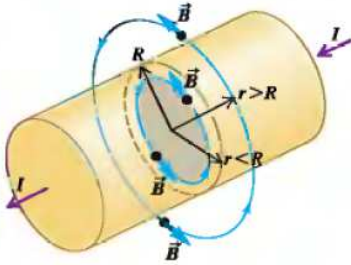


Figura 17.

Por un cilindro muy largo de radio R , pasa una corriente I , uniformemente distribuida en la sección transversal del cilindro. Encontrar el campo magnético en todo el espacio.

Las curvas son circunferencias centradas en el eje del cilindro y perpendiculares al eje, de

radio r .

(a) $r < R$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B$$

$$I_S = j\pi r^2 \quad j = \frac{I}{\pi R^2} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

(b) $r > R$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B$$

$$I_S = I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Consideremos un solenoide cilíndrico de largo infinito. Su eje coincide con el eje z . Está hecho de espiras densamente distribuidas, de radio R . Por cada una de las espiras (y por el solenoide) circula una corriente I , en la dirección \hat{y} .

El solenoide no cambia si lo desplazamos en la dirección z . Tampoco cambia si lo rotamos en torno a su eje. Escribamos:

$$\vec{B} = B_r(r) \hat{r} + B_\theta(r) \hat{\theta} + B_z(r) \hat{z}$$

Debido a la simetría, las componentes sólo dependen de r , la distancia de cada punto al eje del cilindro. En general cada componente puede depender de las tres coordenadas cilíndricas r, θ, z . Sin embargo la simetría del solenoide bajo rotaciones en torno a su eje, elimina la dependencia en θ . La simetría del solenoide bajo desplazamientos en la dirección z elimina la dependencia en z .

(a) Encontramos B_r . Consideremos un cilindro concéntrico con el solenoide, con el manto situado a una distancia r del centro y las tapas en $z = a, b$. Se tiene:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0 = B_r(b-a)2\pi r + \text{flujo en las tapas}$$

flujo en las tapas = 0 porque los campos son iguales y las normales son opuestas.

Por lo tanto $B_r = 0$.

(b) Encontramos B_θ . Para esto aplicamos la ley de Ampere a una circunferencia de radio r , perpendicular al eje del solenoide y centrada en éste.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B_\theta 2\pi r = \mu_0 I_s$$

Pero $I_s = 0$, porque no hay corriente en la dirección del eje del solenoide.

Por lo tanto: $B_\theta = 0$.

(c) Encontramos B_z fuera del solenoide. Aplicamos la ley de Ampere a un rectángulo con dos lados paralelos al eje, situados a distancias $r_2 > r_1 > R$ de éste y de largo L . Los otros dos lados son perpendiculares al eje del solenoide y de largo l .

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = (B_z(r_1) - B_z(r_2))L + B_r l - B_r l = \mu_0 I_s = 0$$

Por lo tanto B_z no depende de r fuera del solenoide y es una constante. Como lejos de las fuentes \vec{B} se anula tenemos que:

Fuera del solenoide: $B_z = 0$.

(d) Encontramos el campo al interior del solenoide. La única componente no nula es B_z . De acuerdo a la regla de la mano derecha, B_z es positivo en la dirección \hat{z} .

Aplicamos la ley de Ampere a un rectángulo con dos lados paralelos al eje, situados a distancias $r_2 > R$ y $r_1 < R$ de éste y de largo L . Los otros dos lados son perpendiculares al eje del solenoide y de largo l .

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = (B_z(r_1) - B_z(r_2))L + B_r l - B_r l = \mu_0 I_s = \mu_0 I N$$

$$B_z(r_1) = \frac{\mu_0 I N}{L}$$

Por lo tanto, al interior del solenoide el campo es uniforme y es proporcional al número de espiras por unidad de longitud $\frac{N}{L}$.

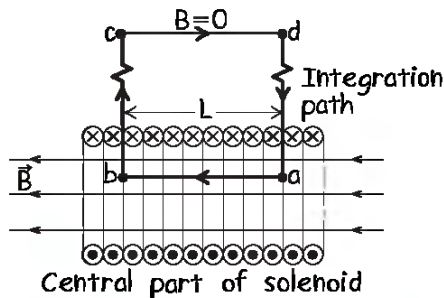
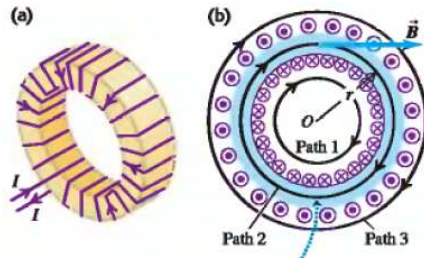


Figura 18.



Un solenoide toroidal está compuesto por N espiras enrolladas alrededor de un picarón de radio menor a y radio mayor b . Por las espiras circula una corriente I . Las espiras están muy cercanas entre sí. Encontrar el campo magnético en todo el espacio.

Figura 19. El campo es no nulo sólo en la zona en azul

Por simetría, las líneas de campo son circunferencias concéntricas con el solenoide.

Aplicamos la ley de Ampere a las curvas 1,2,3.

(1) Curva 1: $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = 0$, dado que no hay corriente pasando a través de la superficie S_1 . Por lo tanto $B = 0$ en la zona blanca.

(2) Curva 2 $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I N$, $B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$.

(3) Curva 3 $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = 0$, dado que las corrientes que entran igualan a las corrientes que salen. $B = 0$.

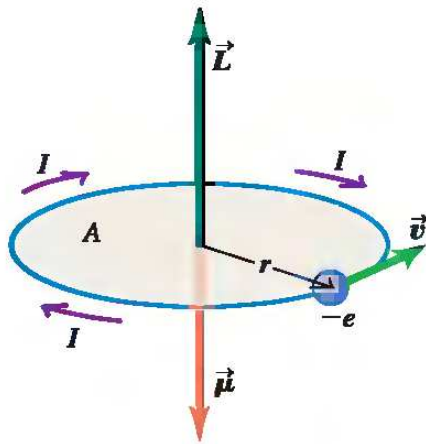


Figura 20.

La Fig. 20 muestra un electrón moviéndose en una órbita circular de radio r alrededor de núcleo. La corriente debida al movimiento del electrón es $-\frac{e}{T}$

donde $T = \frac{2\pi r}{v}$ es el período de la órbita. El momento dipolar magnético está dado

por: $\vec{\mu} = I \vec{A}$ donde $A = \pi r^2$ es el área de la órbita.

$\mu = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} e v r$. El momentum angular es: $L = m v r$.

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

L está cuantizado: $L = n \frac{h}{2\pi}$, donde $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ es la constante de Planck.

$$\mu = n \mu_B, \quad \mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$$

es el magnetón de Bohr

El electrón tiene un momentum angular intrínseco llamado espín. Asociado a éste hay también un momento magnético intrínseco.

En analogía con lo obtenido para las Propiedades Eléctricas de la materia se obtiene, para campos magnéticos:

- La magnetización: $\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta v}$, densidad de dipolos magnéticos en \vec{x} .
- La respuesta de un medio magnético a un campo \vec{B} , es la corriente de magnetización atómica $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
- El campo total B causado por la corriente estacionaria y la corriente de magnetización:
 $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M)$. Notar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_M = 0$
- Se define $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{M} = \chi_m(H) \vec{H}$. χ_m es la susceptibilidad magnética.
- $\vec{B} = \mu(H) \vec{H}$, $\mu = \mu_0(1 + \chi_m(H))$ es la permeabilidad magnética.
- Ley de Ampère $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{x} = I_S$

Un material paramagnético tiene $\chi_m > 0$. $|\chi_m| \ll 1$.

- El paramagnetismo se produce cuando las moléculas de una sustancia tienen un momento magnético permanente.
- El campo magnético externo produce un momento que tiende a alinear los dipolos magnéticos en la dirección del campo.
- La agitación térmica aumenta con la temperatura y tiende a compensar el alineamiento del campo magnético.
- Ley de Curie $M = C \frac{B}{T}$ T es la temperatura absoluta y C es una constante diferente para cada material, llamada la constante de Curie.

Ejercicio 1. Considere el compuesto NO, óxido nítrico, que es paramagnético. Sus moléculas tienen un momento magnético máximo de un magnetón de Bohr cada una. Si $B = 1.5T$, compare la energía potencial magnética con la energía cinética de una molécula a $T = 300K$.

$$U = \mu_B B = \left(9.27 \times 10^{-24} \frac{J}{T} \right) 1.5T = 1.4 \times 10^{-23} J$$

$$K = \frac{3}{2} k_B T = 1.5 \left(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \right) 300K = 621 \times 10^{-23} J$$

$K \gg U$. Por esto, a temperaturas normales el paramagnetismo es muy pequeño.

Un material diamagnético tiene $\chi_m < 0$. $|\chi_m| \ll 1$.

- El movimiento orbital de los electrones crea diminutos lazos de corrientes atómicas, que producen campos magnéticos.
- Cuando se aplica un campo magnético externo a un material, estos lazos de corrientes tienden a alinearse de tal manera que se oponen al campo aplicado.
- Esto puede ser visto como una versión atómica de la **ley de Lenz**: los campos magnéticos inducidos tienden a oponerse al cambio que los creó.
- χ_m is prácticamente independiente de la temperatura.

1 Susceptibilidades Magnéticas de Materiales Paramagnéticos y Diamagnéticos a 20°C

Material	$\chi_m = K_m - 1 (\times 10^{-5})$	Material	$\chi_m = K_m - 1 (\times 10^{-5})$
Paramagnético		Diamagnético	
Óxido de Hierro, FeO	720	Amoniaco	-0,26
Alumbre de Hierro	66	Bismuto	-16,6
Uranio	40	Mercurio	-2,9
Platino	26	Plata	-2,6
Tungsteno	6,8	Carbono (diamante)	-2,1
Cesio	5,1	Carbono (grafito)	-1,6
Aluminio	2,2	Plomo	-1,8
Litio	1,4	Cloruro sódico	-1,4
Magnesio	1,2	Cobre	-1,0
Sodio	0,72	Agua	-0,91
Oxígeno gas	0,19		

K_m se llama permeabilidad relativa.

- $|\chi_m| > 1000$
- $\vec{B}(\vec{H})$ no es lineal y no tiene valor único (histéresis)
- Los materiales ferromagnéticos exhiben un fenómeno de **ordenamiento de largo alcance** a nivel atómico, que hace que los espines de los electrones no apareados se alineen paralelamente entre sí, en una región del material llamada **dominio**.
- El campo magnético dentro del dominio es intenso, pero en una muestra global el material generalmente no estará magnetizado, debido a que los muchos dominios que lo componen estarán orientados entre ellos de forma aleatoria.
- Al aplicar un pequeño campo magnético externo los dominios magnéticos se alinean entre sí y el material está magnetizado. El campo magnético generado de esta manera puede ser muy grande.

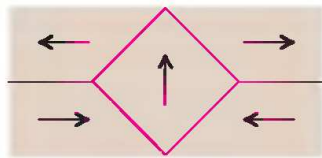


Figura 21. $B = 0$

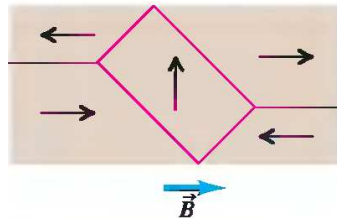


Figura 22. B chico

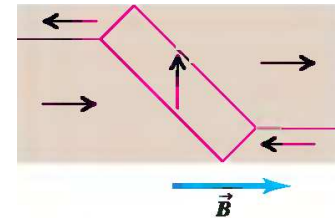


Figura 23. B grande

- Algunos materiales ferromagnéticos: El hierro, el níquel, el cobalto y algunas de las tierras raras (gadolinio, disprosio).

- Los ferroimanes tienden a permanecer magnetizados en cierta medida después de ser sometido a un campo magnético externo. Esta tendencia a "recordar su historia magnética" se llama **histéresis**. La fracción de la magnetización de saturación que es retenida cuando se elimina el campo de generación, se llama **remanencia** del material, y es un factor importante en los imanes permanentes.

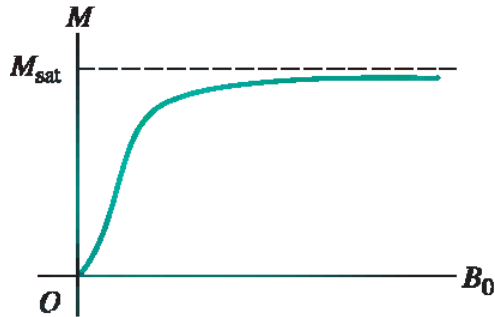


Figura 24. Saturación

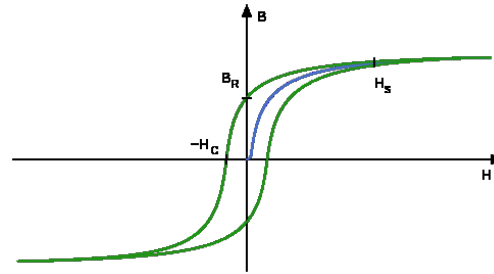


Figura 25. Histéresis

- Todos los ferroimanes tienen una temperatura máxima, donde desaparecen las propiedades ferromagnéticas como resultado de la agitación térmica. Esta temperatura se llama **temperatura de Curie**.
- Los materiales ferromagnéticos responden mecánicamente al campo magnético impuesto, cambiando ligeramente su longitud en la dirección del campo aplicado. Esta propiedad, llamada **magnetostricción**, origina el zumbido familiar de los transformadores, que es la respuesta mecánica a los voltajes de corriente alterna de 60 Hz.

Ejemplo 1. Un material ferromagnético. Un imán permanente está hecho de un material ferromagnético de magnetización $M = 8 \times 10^5 \frac{A}{m}$. El imán es un cubo de lado $a = 2 \text{ cm}$.

a) Encuentre el momento dipolar magnético del imán. R: $Ma^3 = \left(8 \times 10^5 \frac{A}{m}\right)(2 \times 10^{-2})^3 m^3 = 6.4 Am^2$.

b) Estime el campo magnético creado por el imán a una distancia de 10 cm. del imán, a lo largo de su eje. R: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}, B = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}\right)(6 Am^2)}{2\pi(10^{-1}m)^3} = 12 \times 10^{-4} T$ Este campo es alrededor de 10 veces el campo magnético de la Tierra. Es capaz de deflectar la aguja de una brújula.

Un cilindro largo, recto, con su eje en la dirección \hat{z} lleva una corriente de densidad \vec{J} . La densidad de corriente es simétrica alrededor del eje del cilindro y vale $\vec{J} = \left(\frac{b}{r}\right)e^{-(r-a)/\delta}\hat{z}$, $r \leq a$ y vale cero para $r > a$.

- a) Sea I_0 la corriente total que pasa por el cilindro. Encontrar I_0 como función de a, b, δ .
- b) Use la Ley de Ampere para encontrar \vec{B} para $r \geq a$.
- c) Use la Ley de Ampere para encontrar \vec{B} para $r \leq a$.