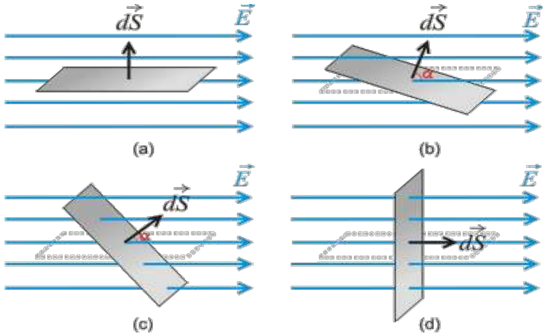
Ley de Gauss

- El número de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie depende de la orientación de esta última con respecto a las líneas de campo.



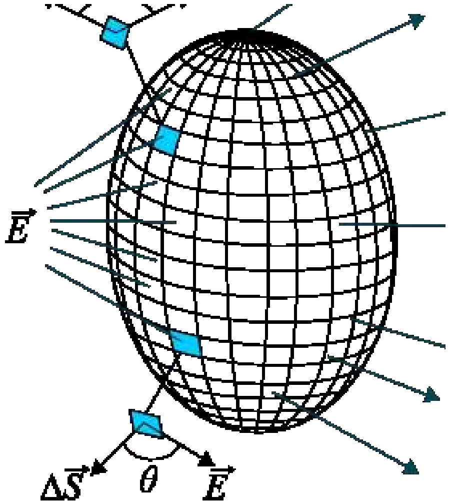
- $d\vec{S}$ es un vector de módulo el elemento de área infinitesimal de la superficie, dirección perpendicular a la misma y sentido hacia afuera de la curvatura.

- El flujo del campo eléctrico es una magnitud escalar que se define mediante el producto escalar:

$$\Phi_E = \int_S d\,\vec{S}\,.\vec{E}$$

El flujo (denotado como Φ) es una propiedad de cualquier campo vectorial referida a una superficie hipotética que puede ser cerrada o abierta. Para un campo eléctrico, el flujo (Φ_E) se mide por el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie.

Para definir al flujo eléctrico con precisión considérese la figura, que muestra una superficie cerrada arbitraria ubicada dentro de un campo eléctrico.



La superficie se encuentra dividida en cuadrados elementales ΔS , cada uno de los cuales es lo suficientemente pequeño como para que pueda ser considerado como un plano. Estos elementos de área pueden ser representados como vectores $\overrightarrow{\Delta S}$, cuya magnitud es la propia área, la dirección es perpendicular a la superficie y hacia afuera.

En cada cuadrado elemental también es posible trazar un vector de campo eléctrico $\vec{E}$. Ya que los cuadrados son tan pequeños como se quiera, $\vec{E}$ puede considerarse constante en todos los puntos de un cuadrado dado.

$\vec{E}$ y $\overrightarrow{\Delta S}$ caracterizan a cada cuadrado y forman un ángulo θ entre sí. La figura muestra una vista amplificada de dos cuadrados.

El flujo, entonces, se define como sigue:

$$(1)\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$

En el límite:

$$(2)\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Teorema 1. *El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada* S *es igual a la carga Q contenida dentro de la superficie, dividida por la constante* ε_0

$$\oint_s d\,\vec{S}.\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La superficie cerrada empleada para calcular el flujo del campo eléctrico se denomina **superficie gaussiana**.

- El ángulo sólido $\Delta\Omega$ que es subtendido por ΔA sobre una superficie esférica, se define como: $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$ siendo r el radio de la esfera.

  Como el área total de la esfera es $4\pi r^2$ el ángulo sólido para ''toda la esfera'' es:

  $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ La unidad de este ángulo es el estereorradián (sr)

- Si el área ΔA no es perpendicular a las líneas que salen del origen que subtiende a $\Delta\Omega$, se busca la proyección normal, que es:

  $$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \ \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2}$$

- $\Omega = \frac{S}{R^2}$

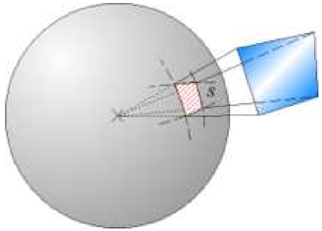


Figura 1. Para calcular el ángulo sólido de un superficie, se proyecta el objeto sobre una esfera de radio conocido R

- Consideremos una carga puntual q rodeada por una superficie cualquiera S. Para calcular el flujo que atraviesa esta superficie es necesario encontrar $\vec{E}\cdot\hat{n}\,\Delta A$ para cada elemento de área de la superficie, para luego sumarlos. Usando la ley de Coulomb se tiene:

$$\Delta\Phi = \vec{E}\cdot\hat{n}\;\;\Delta A = \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\,\Delta A = kq\,\Delta\Omega$$

De esta manera $\Delta\Omega$ es el mismo ángulo sólido subentendido por una superficie esférica. como se mostró un poco más arriba $\Delta\Omega = 4\pi$ para cualquier esfera, de cualquier radio.Al sumar todos los flujos que atraviesan la superficie queda:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{dA} = kq\oint_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Flujo de varias cargas puntuales

- Recordemos que el campo eléctrico satisface el principio de superposición:

  Si $\vec{E}_i(\vec{x})$ es el campo eléctrico debido a una carga q_i en el punto $\vec{x}$, el campo eléctrico en $\vec{x}$ debido a todas las cargas es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{x})$$

- Lo mismo pasa con el flujo del campo eléctrico a través de una superficie S

$$\Phi = \oint_S d\vec{S}.\vec{E}(\vec{x}) = \oint_S d\vec{S}.\sum_i \vec{E}_i(\vec{x}) = \sum_i \Phi_i$$

- Por lo tanto:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

La ley de Gauss puede ser utilizada para demostrar que no existe campo eléctrico dentro de una jaula de Faraday(Un volumen V sin carga eléctrica rodeado por una superficie conductora cerrada S).

El potencial ϕ en el interior del conductor cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2\phi = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V$

Dado que el conductor está en equilibrio en su superficie no hay corrientes, de modo que el potencial en su superficie es constante:$\phi|_S = \phi_0$. En virtud del teorema de unicidad del potencial el potencial que cumple tales condiciones es único y puede verse que la solución es trivialmente:$\phi = \phi_0 \quad \forall \mathbf{r} \in R$. Por lo tanto $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$

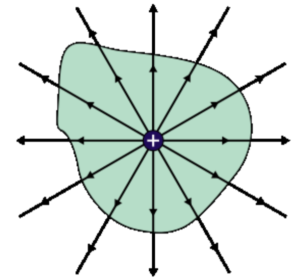
De modo que el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo.

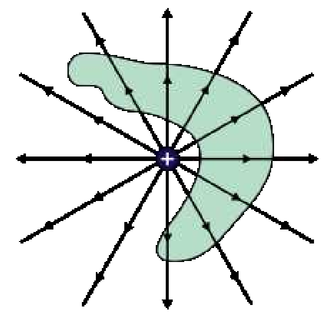
Figura 2. Una Jaula de Faraday en el Deutsches Museum.

- Evitar el ruido molesto de las interferencias entre el teléfono móvil y su altavoz.
- Dejar sin señal: (teléfonos móviles, módems, etc.)
- Evitar interferencias entre altavoces y una frecuencia de radio.

La ley de Gauss puede interpretarse, entendiendo el flujo como una medida del número de líneas de campo que atraviesan la superficie S. Para una carga puntual este número es constante si la carga está contenida por la superficie y es nulo si está fuera (ya que hay el mismo número de líneas que entran como que salen). Además, al ser la densidad de líneas proporcionales a la magnitud de la carga, resulta que este flujo es proporcional a la carga, si está encerrada, o nulo, si no lo está.

Cuando tenemos una distribución de cargas, por el principio de superposición, sólo tendremos que considerar las cargas interiores, resultando la ley de Gauss.





Ambito de validez

Aunque la ley de Gauss se deduce de la ley de Coulomb, es más general que ésta, ya que se trata de una ley universal, válida en situaciones no electrostáticas en las que la ley de Coulomb no es aplicable. Como tal forma parte de las Ecuaciones de Maxwell.

Consideremos una densidad de carga $\rho(x)$ contenida al interior de un volumen V rodeado por una superficie cerrada S.

La ley de Gauss se escribe como:

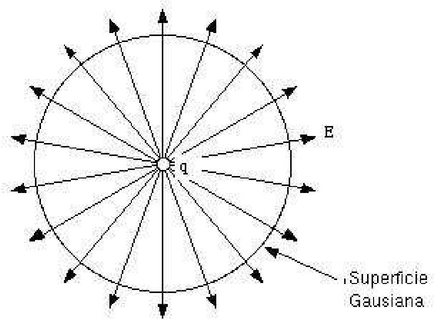
$$\oint_S d\,\vec{S}.\vec{E} = \int_V d^3x\,\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x\rho(x)$$

Hemos usado el teorema de la divergencia para transformar el flujo del campo eléctrico en una integral de volumen. Como V es arbitrario, se sigue que:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Gauss. Es una de las ecuaciones de Maxwell.

- Campo eléctrico de una carga puntual q.$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Superficie esférica centrada en q



$$\Phi = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Campo eléctrico de una línea infinita cargada uniformemente con densidad lineal λ R: $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

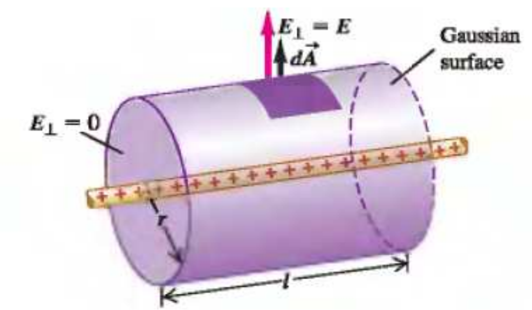


Figura 3. Superficie cilíndrica centrada en el alambre.

Consideremos una superficie S que es la frontera entre dos regiones don de los campos eléctricos valen $\vec{E}_1$y $\vec{E}_2$ respectivamente. Sobre la superficie S hay una carga superficial de carga σ. Consideremos un cilindro infinitesimal cuyo manto es perpendicular a la superficie S en un punto $\vec{x}$, la tapa superior del cilindro está totalmente contenida en la región 1 mientras que la tapa inferior del cilindro está totalmente contenida en la región 2. Ambas tapas tiene área A. El manto contenido en la región 1 y 2 tiene longitud L y radio R. La normal al manto es $\hat{r}$. La normal a las tapas es $\hat{n}$ y $-\hat{n}$.

Aplicando la ley de Gauss al cilindro obtenemos:

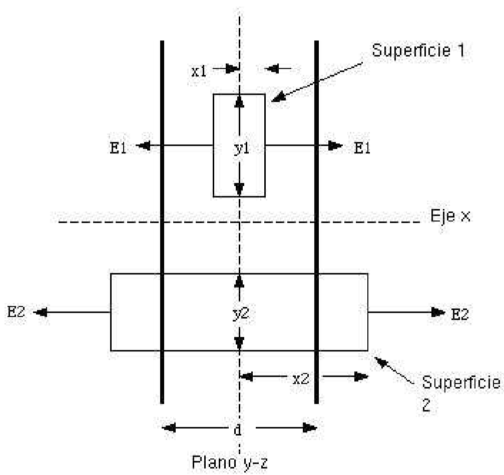
$$\oint_{\text{cilindro}} dS\,\hat{n}.\vec{E} = \hat{n}.(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)A + \hat{r}.(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)2\pi RL \sim_{L\to 0} \hat{n}.(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)A$$

$$\hat{n}.(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Al cruzar una superficie S donde hay una densidad superficial de carga σ, la componente normal del campo eléctrico es discontinua: $\hat{n}.(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ejemplos

Se tiene un plástico conformado por un paralelepípedo recto de ancho d, que se extiende indefinidamente en las otras direcciones. En el volumen del plástico hay una carga eléctrica con densidad uniforme ρ. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.



Es necesario distinguir dos situaciones:

a) $-d/2 < x < d/2$ b) $|x| > d/2$

a) Consideremos la superficie 1. Por simetría se tiene que: $\vec{E}(x = x_1) = -\vec{E}(x = -x_1)$.

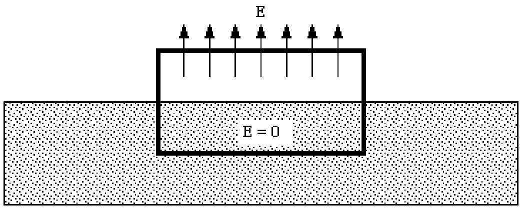
$$\Phi_1 = 2E(x = x_1)A_1 = 2E(x = x_1)y_1z_1 = \frac{2x_1y_1z_1\rho}{\varepsilon_0}, \qquad E(x = x_1) = \frac{x_1\rho}{\varepsilon_0}$$

b) Consideremos la superficie 2:

$$\Phi_2 = 2A_2E(x = x_2) = 2y_2z_2E(x = x_2) = \frac{dy_2z_2\rho}{\varepsilon_0}, \qquad E(x = x_2) = \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}$$

CAMPO ELECTRICO EN LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR

NOTA: Al interior de un conductor $\vec{E} = \vec{0}$



$$\Phi = AE = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Conductor aislado

- $\vec{E} = \vec{0}$ al interior del conductor, debido a $\vec{F} = \vec{0}$, en equilibrio electrostático.
- $\vec{E}$ tangencial a la superficie del conductor$=\vec{0}$, por la misma razón.
- Sólo existe la componente de $\vec{E}$ normal a la superficie en cada punto.
- Usando la ley de Gauss se muestra que no hay cargas al interior del conductor. Indic: Usar una superficie cerrada S infinitesimalmente cercana a la superficie del conductor, pero sumergido en éste. $\vec{E} = \vec{0}$ en S.
- Todas las cargas están sobre la superficie del conductor. Se tiene que $\hat{n}.\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

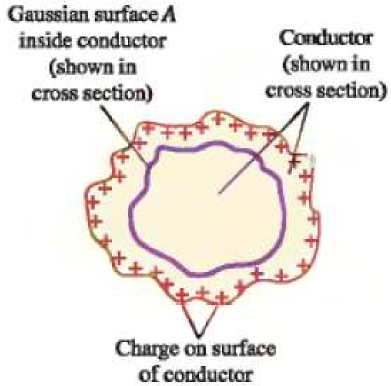


Figura 4. Superficie gaussiana al interior de un conductor.

- Esfera de radio R con distribución uniforme de carga ρ. Encontrar $\vec{E}$. Tomemos como superficie gaussiana S una esfera centrada en el origen, de radio $r (r < R)$. Por simetría el campo eléctrico se dirige radialmente hacia afuera de S y sólo depende de r. $\oint_S dS\ \vec{E}.\hat{n} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0}$. Esto es $E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$, $r < R$. Similarmente obtenemos que $E(r) = k\frac{q}{r^2}, r > R$, con $q = \frac{4}{3}\rho$
- Campo eléctrico de un plano infinito cargado uniformemente con densidad superficial σ R: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\text{sign}(z)$.

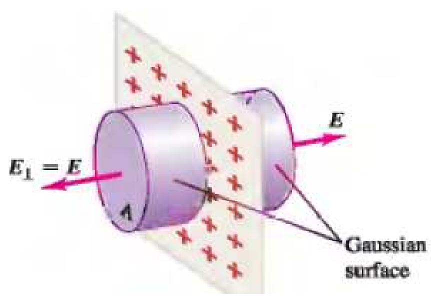


Figura 5.

Superficie cilíndrica con tapas paralelas al plano. Las lineas de fuerza se alejan del plano por ambos lados.

- Franja conductora infinita, cuya superficie exterior (dos planos paralelos) está uniformemente cargada con densidad superficial σ.
  - Usar la ley de Gauss directamente
  - Resolver primero el caso de un plano infinito uniformemente cargado: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\text{sgn}(z)$
  - Usar el principio de superposición para encontrar la solución al problema original.

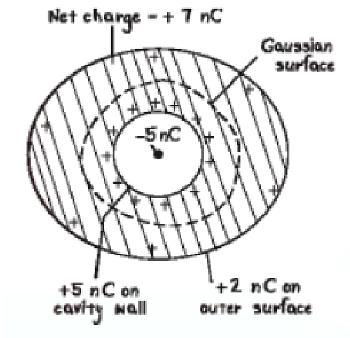


Figura 6. Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total Q. Al interior de la cavidad y aislada del conductor hay una carga puntual q.

Encontrar :

1. La carga q_1 contenida en la superficie interior del conductor. Usemos la superficie gaussiana punteada de la fig. 6. El flujo del campo eléctrico sobre la superficie es nulo $(E = 0)$. Por lo tanto: $q + q_1 = 0$, $q_1 = -q$.
2. La carga q_2 contenida en la superficie exterior del conductor. $q_2 + q_1 = Q$, $q_2 = Q - q_1 = Q + q$.

La Tierra es un conductor, que en su superficie tiene un campo eléctrico cuyo valor medio es $E = 150\, N/C$ y está dirigido hacia el centro de la Tierra. Encontrar:

1. La densidad superficial de carga de la Tierra.

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}.\hat{r} = -\varepsilon_0\, E = -1.33 \times 10^{-9} C/m^2$$

2. La carga eléctrica total Q contenida en la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra es $R = 6.38 \times 10^6 m$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = -6.8 \times 10^5 C$$

El número de electrones en exceso en la superficie de la Tierra es $N = \frac{Q}{e} = 4.2 \times 10^{24}$, recordando que $e = -1.6 \times 10^{-19} C$. Este exceso de carga es compensado por una deficiencia igual de electrones en la alta atmósfera, de tal manera que la Tierra y su atmósfera es eléctricamente neutra.

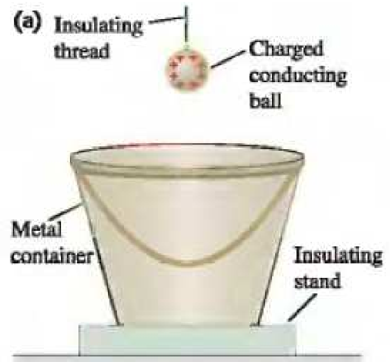


Figura 7. Una pelota conductora cargada con una carga positiva, en presencia de un balde conductor

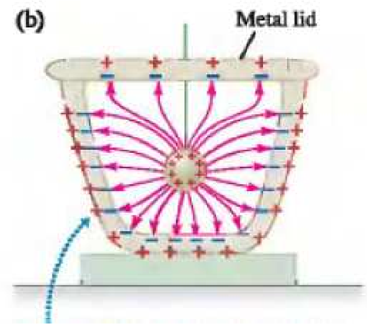


Figura 8. La esfera conductora se baja al interior del balde. Induce sobre él cargas positivas y negativas.

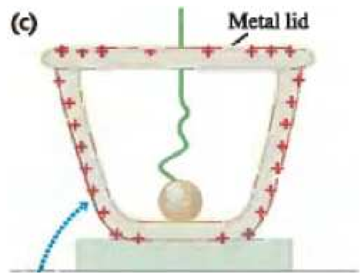


Figura 9. La pelota conductora entra en contacto con la pared interior del balde. Toda su carga se transfiere al balde. Sólo hay carga en la pared exterior del balde

En este experimento se verifica la ley de Gauss, midiendo la carga contenida al interior del balde conductor.

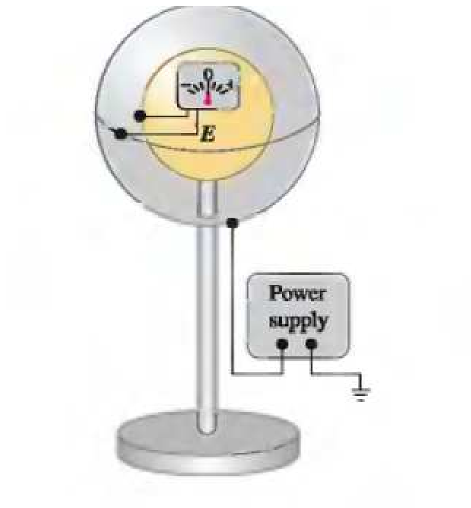


Figura 10. Versión moderna del experimento de Faraday del balde conductor.

Un generador de voltaje se aplica a la pared exterior de la esfera conductora. Un electrómetro, que mide la carga eléctrica, se conecta a la pared interior de la esfera conductora. A medida que crece el voltaje en la pared exterior de la esfera, el electrómetro permanece sin cambios, mostrando que no hay carga en la pared interior.Este experimento permite verificar la ley de Gauss y por ende la ley de Coulomb con precisión extrema. Se encuentra que la ley de Coulomb depende de $\frac{1}{r^{2(1+\varepsilon)}}$. Con $\varepsilon < 10^{-16}$.

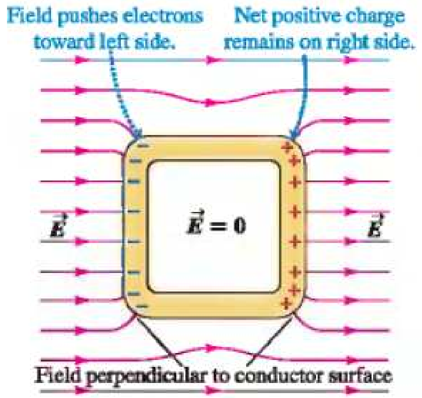


Figura 11. Campo eléctrico creado por una celda de Faraday. El campo eléctrico en la zona interior al conductor se anula.

Figura 12. La celda de Faraday protege a la persona al interior de la celda de voltajes extremadamente altos en el exterior.

Ver Faraday_cage_-_FISL_14_-_2013-07-03

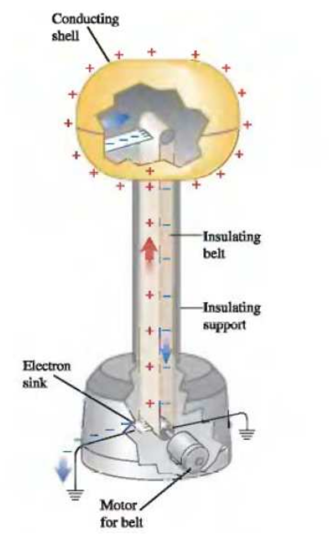


Figura 13. Generador Electrostático de Van De Graaff.

Dos rodillos conectados por una banda aislante permiten transportar carga desde la región inferior donde se sacan electrones de la banda, con lo cual ésta queda cargada positivamente. En el rodillo superior, la banda entra en contacto con la superficie conductora, que recibe una carga positiva.

A una distancia R de una carga puntual el campo eléctrico es E_0. A qué distancia de la carga el campo eléctrico es $\frac{1}{3}E_0$?