Inductancia y Circuítos LRC

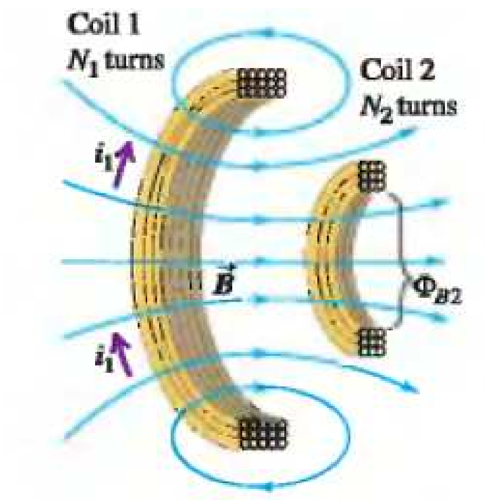


Figura 1.

Denotaremos con letras minúsculas las corrientes que cambian con el tiempo. En la fig. 1 se muestran dos bobinas. Al pasar una corriente i_1 por la bobina 1, se induce un campo magnético en la bobina 2, creando un flujo magnético en 2 $\Phi_{B2} = M_{21}i_1$. De la ley de Faraday se tiene la fem inducida en 2 debido al cambio temporal dei_1:

$$\varepsilon_2 = -M_{21}\dot{i}_1$$

M_{21} es la inductancia mutua de 1 sobre 2. Similarmente:

$$\varepsilon_1 = -M_{12}\dot{i}_2$$

M_{12} es la inductancia mutua de 2 sobre 1.Se demuestra que $M_{12} = M_{21} = M$.En MKS [M] es el Henry(H):$1H = 1Vs/A$.

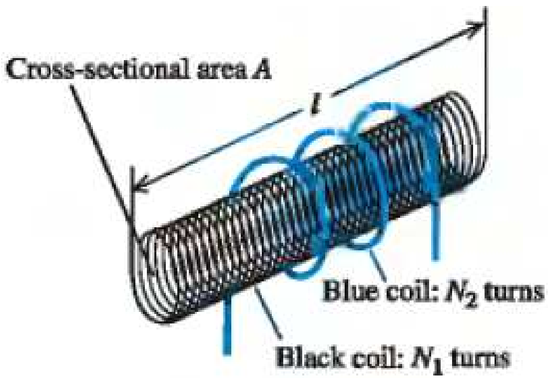


Figura 2.

Un solenoide largo de N_1 vueltas y sección transversal de área A se rodea por otro solenoide (en azul) con N_2 vueltas. Encontrar la inductancia mutua M.

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} \quad \Phi_{B2} = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} A N_2$$

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}$$

Así como una bobina 1 induce una fem en otra bobina 2 , también 1 induce una fem en si misma. Nuevamente se tiene que el flujo del campo magnético en 1 es proporcional a la corriente i que circula por 1 $\Phi_B = L i$. Entonces

$$\varepsilon = -L \dot{i}$$

L es la autoinductancia de la bobina 1.

Inductor

Un elemento de circuito que tiene una inductancia L se llama inductor.

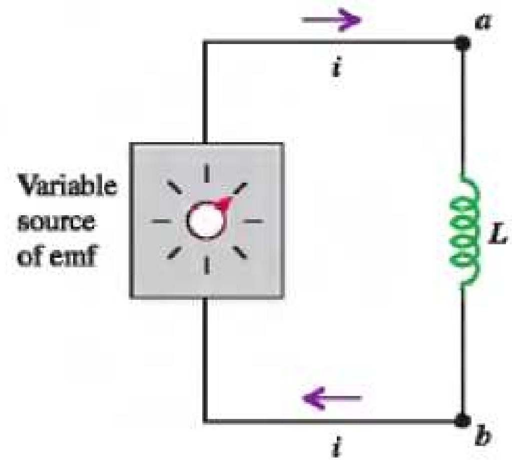


Figura 3.

En la fig. 3 tenemos un circuito con un inductor en serie. Supongamos que el inductor tiene resistencia despreciable. Esto significa que, en el inductor, el campo eléctrico conservativo E_c debe balancear al campo eléctrico noconservativo debido a la inducción E_n:$E_c + E_n = 0$

Apliquemos la ley de Faraday al circuito de la fig. 3 $\oint_C \vec{E} d\vec{x} = -L\dot{i}$

Sólo en L hay una contribución al lado izquierdo de la igualdad. El resto sólo contribuye campos eléctricos conservativos. Por lo tanto: $\int_a^b \overrightarrow{E_n} d\vec{x} = -\int_a^b \overrightarrow{E_c} d\vec{x} = -L\dot{i}$

$V_a - V_b = L\frac{di}{dt}$

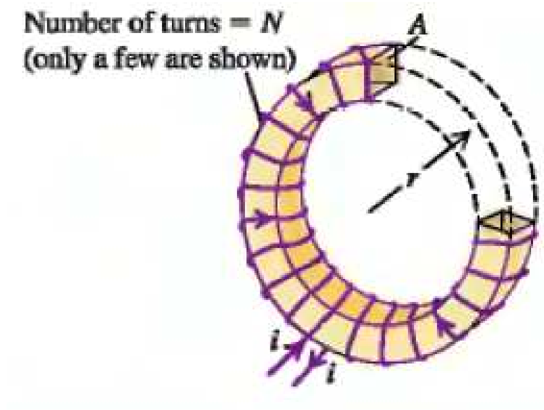


Figura 4.

Un solenoide toroidal con área transversal A y N vueltas, se presenta en la fig. 4. Encontrar su autoinductancia L.

El campo magnético sigue la forma del toroide, por simetría.

$$\Phi_B = BNA \quad 2\pi r B = \mu_0 i N \quad \Phi_B = \frac{\mu_0 i N^2 A}{2\pi r}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

Consideremos el circuito de la fig. 3. La potencia con que la fem externa agrega energía al inductor es:

$$P = V_{ab} i = L i \frac{di}{dt}$$

Se tiene que la energía entregada al inductor es:

$$U = \int dt\, P = \int_0^I L\, i\, di = \frac{1}{2} L I^2$$

donde I es la corriente estacionaria final que pasa por el circuito. Esta energía se acumula en el campo magnético del inductor. Veamos el caso de un solenoide toroidal ideal:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \qquad B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}, I = \frac{2\pi r B}{\mu_0 N}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \left(\frac{2\pi r B}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r A = \frac{B^2}{2\mu_0} V$$

$$u = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \mathrm{densidad\,de\,energía\,en\,el\,vacío}$$

En un medio magnético de permeabilidad μ: $u = \frac{\vec{B}^2}{2\mu}$

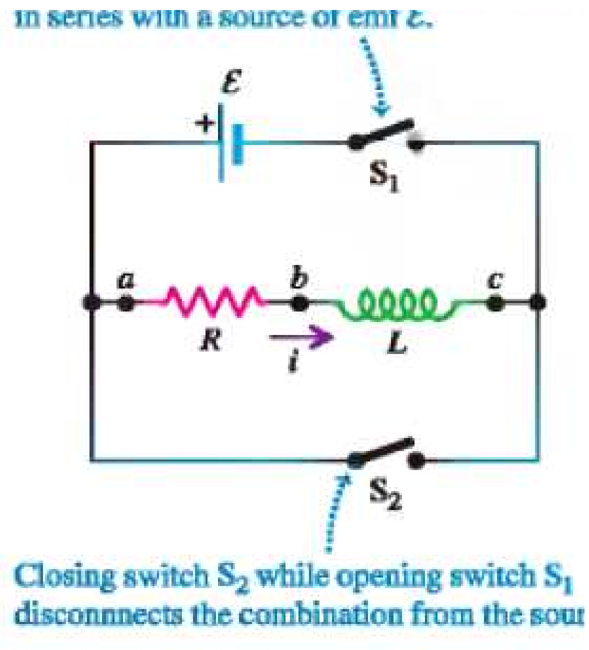


Figura 5.

En $t=0$ conectamos S_1, empieza a circular una corriente creciente en el tiempo. En un instante t tenemos:

$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\int_0^i \frac{di'}{\varepsilon - i'R} = L^{-1}\int_0^t dt'$$
$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon}\right) = L^{-1}t$$
$$\varepsilon - iR = \varepsilon e^{-R/Lt},$$
$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-R/Lt}\right)$$

Tiempo característico circuito R-L: $\tau = L/R$.

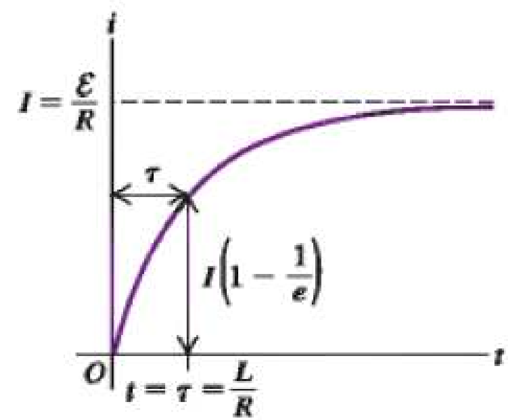


Figura 6.

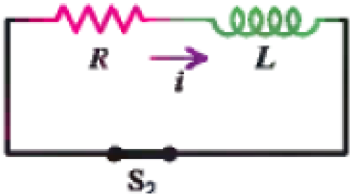


Figura 7.

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

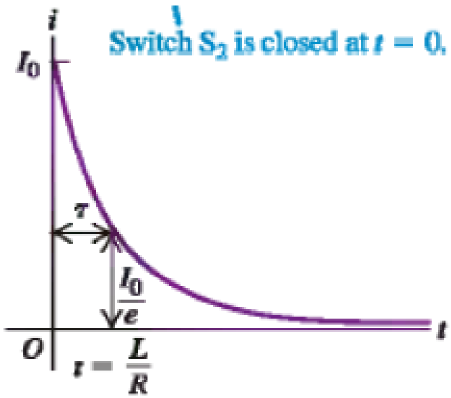


Figura 8.

Abramos S_1 y cerremos S_2. La corriente disminuye en el circuito desde su máximo $\frac{\varepsilon}{R}$ a cero.

$$-iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

Balance de energía en el circuito R-L:

La potencia instantánea provista por la fuente externa es εi. En la resistencia se disipa una potencia i^2R, mientras se acumula energía en el inductor con una potencia $Li\,\frac{di}{dt}$. Tenemos:

$$\varepsilon i = i^2 R + Li\,\frac{di}{dt}$$

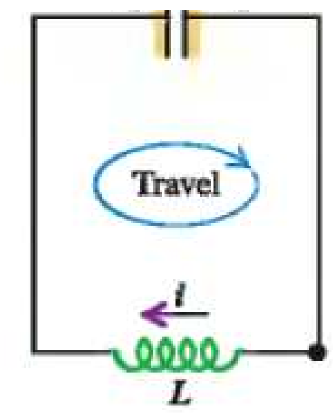


Figura 9.

Usando las leyes de Kirchhoff se tiene

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0 \quad L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \frac{d^2q}{dt^2}=-\omega^2 q$$

$$q(t)=\mathrm{A}\cos(\omega t+\alpha)$$

$$i(t)=-A\omega \mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

ω es la frecuencia de oscilación de un circuito $L-C$.

En cada instante, la energía almacenada en el circuito es: eléctrica $\frac{q^2}{2C}$, magnética $\frac{1}{2}Li^2$

$$E=\frac{q^2}{2C}+\frac{1}{2}Li^2=$$

$$\frac{A^2}{2C}(\cos^2(\omega t+\alpha)+\omega^2 L\,\mathrm{C}\mathrm{sen}^2(\omega t+\alpha))$$

$$=\frac{A^2}{2C}$$

Vemos que la energía total se conserva. Durante la oscilación la energía magnética se transforma en eléctrica y viceversa.

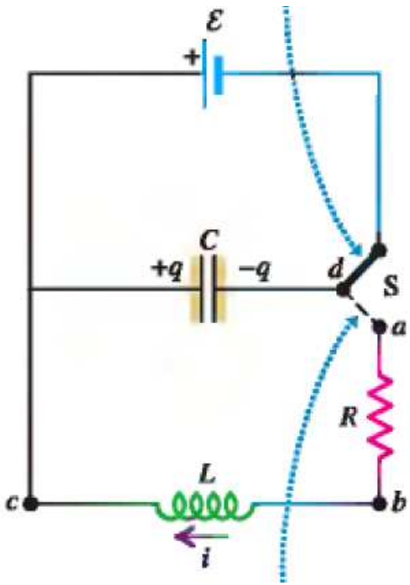


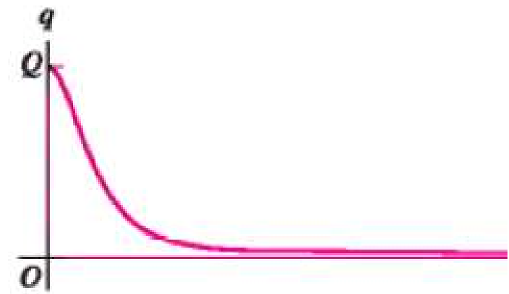
Figura 10.

Supongamos que la fem ε cargó completamente el condensador, conectando S a d. Desconectamos la fuente externa, con S conectado a a y dejamos evolucionar el circuito. Se tiene, empezando en el punto a

$$-Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$
$$q = Ae^{\alpha t}$$
$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$$
$$\alpha_\pm = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$
$$q = A_+e^{\alpha_+ t} + A_-e^{\alpha_- t}$$

(a) $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\mathrm{LC}}$. Las dos raíces son reales y $\alpha_+ > 0$. Como la carga es finita para $t \to \infty$,esta raíz debe ser desechada. $q = A_-e^{\alpha_- t}$. No hay oscilación. La carga del condensador decae exponencialmente.



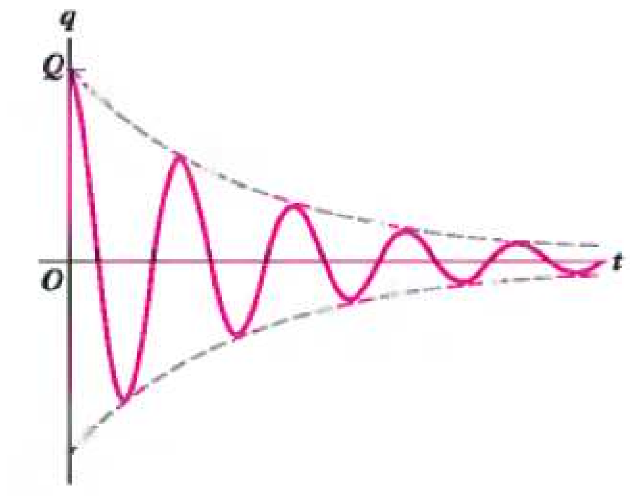


Figura 11. $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\mathrm{LC}}$

(b) $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\mathrm{LC}}$ Hay dos raíces complejas conjugadas entre sí. Podemos escribir la solución como:

$$q = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} + \phi \right)$$

En este caso la frecuencia de las oscilaciones es:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$