Ondas Electromagnéticas

Una primera consecuencia fundamental de la corriente de desplazamiento es que los campos eléctricos y magnéticos son capaces de propagarse en forma de onda, cuya velocidad en el vacío fue calculada por Maxwell, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. Cuando Maxwell reemplazó los valores de la permitividad y la permeabilidad del vacío, conocidos usando experimentos con bobinas y condensadores, obtuvo que $c \sim 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$. La velocidad de la luz en el vacío!

Basado en esto, Maxwell propuso que la luz es una onda electromagnética.

Figura 1. James Clerk Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell muestran que se genera una onda electromagnética cuando cargas eléctricas son aceleradas. Si las cargas eléctricas se mueven con velocidad constante no se genera una onda, aún cuando existe un campo eléctrico y un campo magnético.

Para que haya una onda electromagnética debe haber flujo de energía a través de la superficie de radio infinito.

Atendiendo a su longitud de onda, la radiación electromagnética recibe diferentes nombres, y varía desde los energéticos rayos gamma (con una longitud de onda del orden de picómetros) hasta las ondas de radio (longitudes de onda del orden de kilómetros), pasando por el espectro visible (cuya longitud de onda está en el rango de las décimas de micrómetro). El rango completo de longitudes de onda es lo que se denomina el espectro electromagnético.

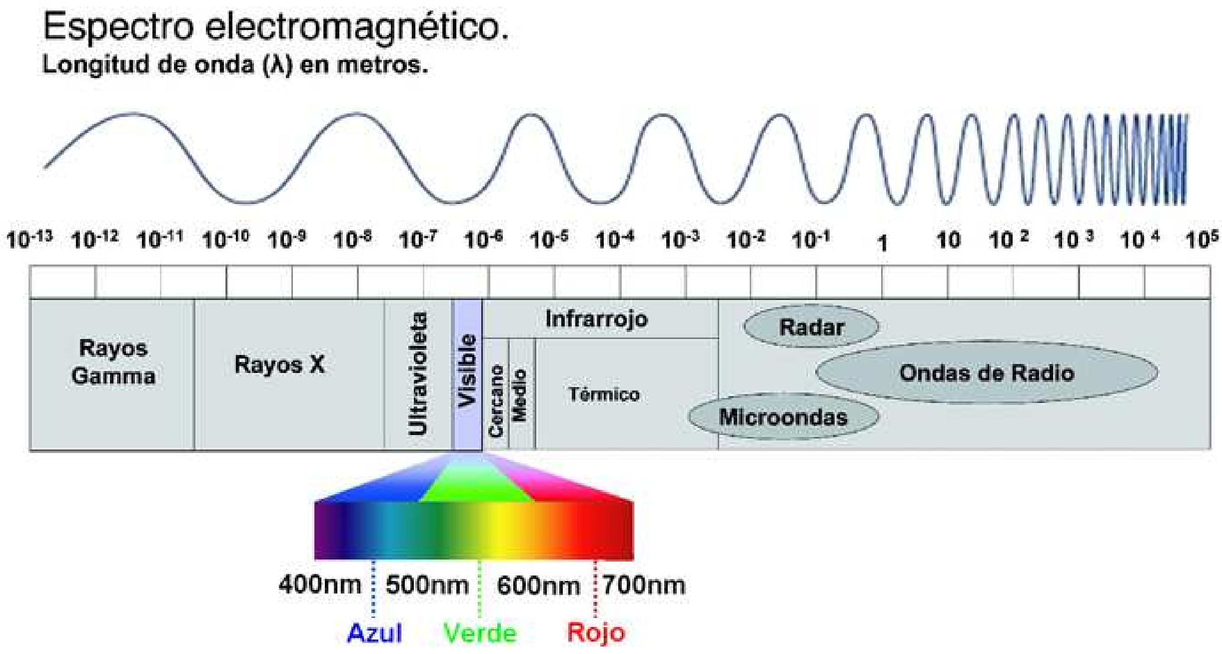


Figura 2.

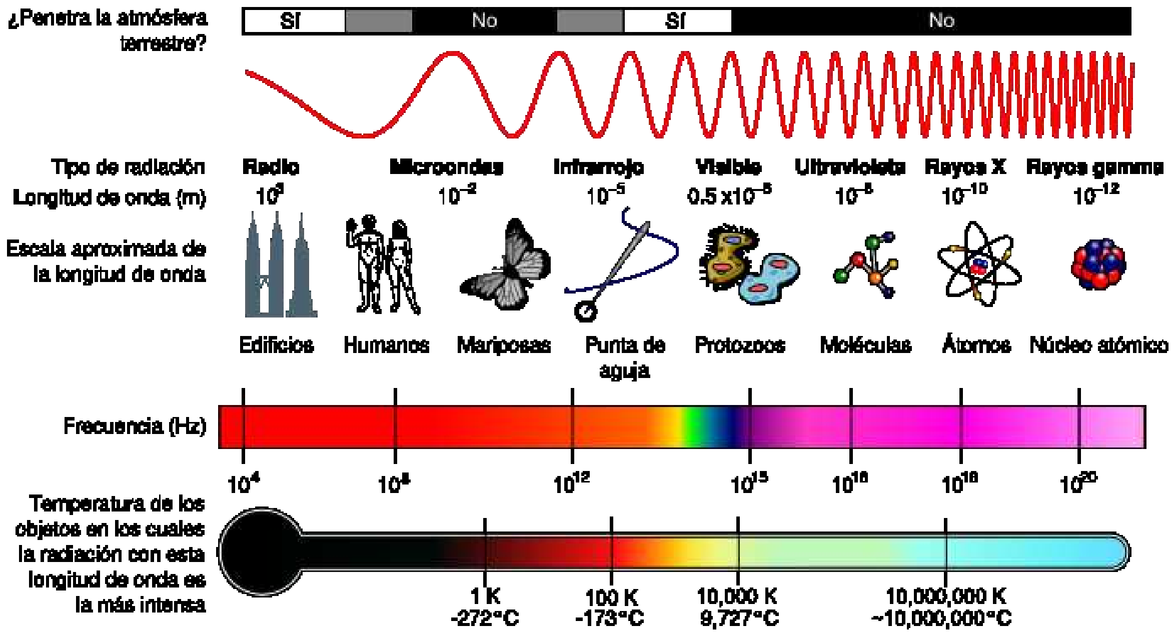


Figura 3. Espectro electromagnético

Sabemos (potencial 16) que la densidad de energía debida a los campos eléctricos y magnéticos es:

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(\vec{x}) \qquad u_B = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

Las ecuaciones de Maxwell muestran que hay un flujo de energía. En efecto, consideremos un volumen V rodeado por una superficie cerrada S. La variación temporal de la energía electromagnética en V es:

$$\int_V d^3x\left(\varepsilon_0\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \int_V d^3x\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E}.(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right) =$$
$$-\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0}\oint_S d\,\vec{S}.(\vec{E}\times\vec{B})$$

Vector de Pointing $\vec{S}$. Mide el flujo de energía electromagnética a través de la superficie S.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$(E\times B)_{i,i} = \varepsilon_{ijk}(E_jB_k)_{,i} = \varepsilon_{ijk}(E_{j,i}B_k + E_jB_{k,i}) = (\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{B}).\vec{E}$$

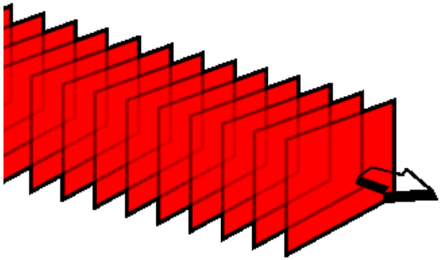


Figura 4. Frente de onda de una onda plana. La flecha indica la dirección de $\vec{k}$.

Matemáticamente, una onda plana es una solución de la ecuación de onda de la siguiente forma:

$$u(\vec{x}, t) = a e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

dónde i es la unidad imaginaria, $\vec{k}$ es el vector de onda, ω es la frecuencia angular y a es la amplitud compleja. La solución física es usualmente encontrada tomando la parte real de la expresión. La onda se propaga en la dirección de $\vec{k}$.

Sea

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\,-\omega t)} \qquad \vec{B}=\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\,-\omega t)}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E}=0 \qquad \vec{k}\,.\vec{E}_0=0 \tag{1}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B}=0 \qquad \vec{k}\,.\vec{B}_0=0 \tag{2}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0} \qquad \vec{k}\times\vec{E}_0-\omega\vec{B}_0=\vec{0} \tag{3}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0} \qquad \vec{k}\times\vec{B}_0+\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E}_0=\vec{0} \tag{4}$$

Ecuaciones (1,2) dicen que $\vec{E}_0$,$\vec{B}_0$ son perpendiculares a $\vec{k}$. La onda es transversal.

Ecuación (3) es:

$$\vec{B}_0=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0 \tag{5}$$

Esto es $\vec{E}_0\perp\vec{B}_0$.

Reemplacemos (5) en (4):

$$\vec{k}\times\left(\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0\right)+\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E}_0=\vec{0} \quad -\frac{\vec{k}^{\,2}}{\omega}\vec{E}_0+\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E}_0=\vec{0} \quad \frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c \tag{6}$$

Ecuación (6) es la velocidad de la onda electromagnética.

$$a x (b x c) = a.c b - a.b c$$

$$\varepsilon_{ijk}(E_0 \phi)_{k,j} = \varepsilon_{ijk} E_{0k} \phi_{,j} = (\nabla \phi \times E_0)_i$$

El vector de Poynting promediado en un ciclo es:

$$<S>=\frac{1}{2\mu_0}Re(E_0\bar{B}_0)=\frac{1}{2\mu_0 c}|E_0|^2$$

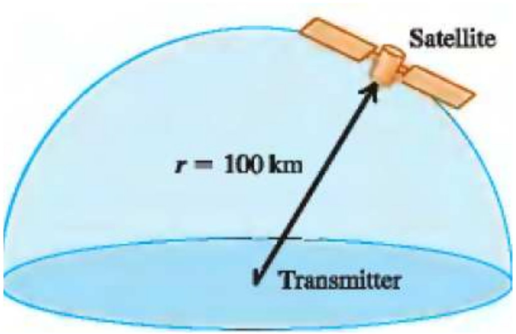


Figura 5.

Una estación de radio radía una onda sinuodal con potencia promedio de 50 kW. Suponiendo que la estación emite con la misma potencia en todas direcciones(poco realista). Encontrar $E_{\max}$, $B_{\max}$ detectada a 100km de la antena.

La potencia por unidad de área en el hemisferio es $\frac{P}{2\pi R^2}$. Esto coincide con el vector de Poynting: $\frac{1}{2\mu_0 c}|E_0|^2=\frac{P}{2\pi R^2}$. $E_0=\sqrt{\frac{P\mu_0 c}{\pi R^2}}=\sqrt{\frac{5\times10^4\times4\times10^{-7}\times3\times10^8}{10^{10}}}=2\times\sqrt{1,5}\times10^{-2}=2.45\times10^{-2}V/m$; $B_0=\frac{E_0}{c}=\frac{2.45\times10^{-2}}{3\times10^8}=8.17\times10^{-11}T$

Así como hay densidad y flujo de energía del campo electromagnético, usando las ecuaciones de Maxwell, se puede mostrar que el campo elctromagnético tiene una densidad de momentum lineal y flujo de momentum lineal:

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$$

p es el momentum. El flujo de momentum por unidad de área es:

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$$

Este flujo de momentum es la razón de la Presión de Radiación.

Figura 6. Al centro de este gas interestelar hay un grupo de estrellas que ejerce una fuerte presión de radiación sobre el gas. Durante los últimos millones de años, la presión de radiación creó esta burbuja de diámetro 70 años-luz.

Cuando luz incide sobre una superficie y es absorbida totalmente , su momentum se transfiere a la superficie. La presión ejercida sobre la superficie, es la fuerza por unidad de área. Por consevación de momentum: $p_{\mathrm{rad}} = \frac{S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{<EB>}{\mu_0 c}$.

Si la luz se refleja totalmente, conservación de momentum implica que: $p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S_{\mathrm{av}}}{c} = \frac{2<EB>}{\mu_0 c}$.

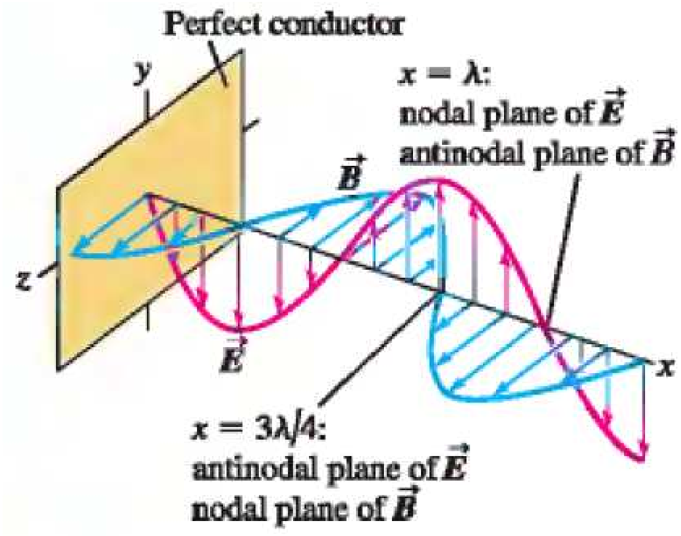


Figura 7.

Dado que en en el plano $y - z$ hay un conductor perfecto, el campo eléctrico se anula allí. La onda se refleja en el plano $y - z$. Por o tanto la amplitud es la suma de dos ondas viajeras idénticas moviéndose en direcciones opuestas:

$E_y(x,\ t) = E_{\max}(-\cos\ (kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t))$
$B_z(x,\ t) = B_{\max}(-\cos\ (kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t))$

Usando la identidad $\cos\ (A \pm B) = \cos\ A\ \cos\ B \mp \operatorname{sen}\ A\ \operatorname{sen}\ B$, obtenemos: $E_y(x,\ t) = -2E_{\max}\operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(\omega t)$, $B_z(x,\ t) = -2B_{\max}\cos(kx)\cos(\omega t)$

Planos nodales campo eléctrico: $E_y(x,t) = 0$, $\operatorname{sen}(kx) = 0, kx = n\pi, n\varepsilon Z, x_n = n\frac{\lambda}{2}$

Planos nodales campo magnético: $\cos\ (kx_n) = 0,\ kx_n = (n + \frac{1}{2})\pi,\ x_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

Para tener una cavidad agregamos una superficie conductora en $x = L$. Sobre la segunda superficie conductora $E_y = 0$. Por lo tanto:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad f_n = n\,\frac{c}{2L}$$

Figura 8. Un microondas típico crea una onda estacionaria de $\lambda = 12.2\mathrm{cm}$. Esta onda es absorbida fuertemente por el agua en los alimentos. Dado que la onda tiene nodos separados por $\lambda/2 = 6.1\mathrm{cm}$, la bandeja debe rotar. De otro modo la parte del alimento que está situada en un nodo permanecería fría.

Notemos que $\vec{B}$ se conoce si se sabe $\vec{E}$. Pero $\vec{E}$ es arbitrario excepto por ser perpendicular a $\vec{k}$. Los vectores perpendiculares a $\vec{k}$ forman un plano. Para especificar un vector de este plano, necesitamos dos vectores l.i. Este nuevo grado de libertad de la onda electromagnética se llama polarización. Hay dos estados de polarización, correspondientes a los dos vectores l.i. del plano.

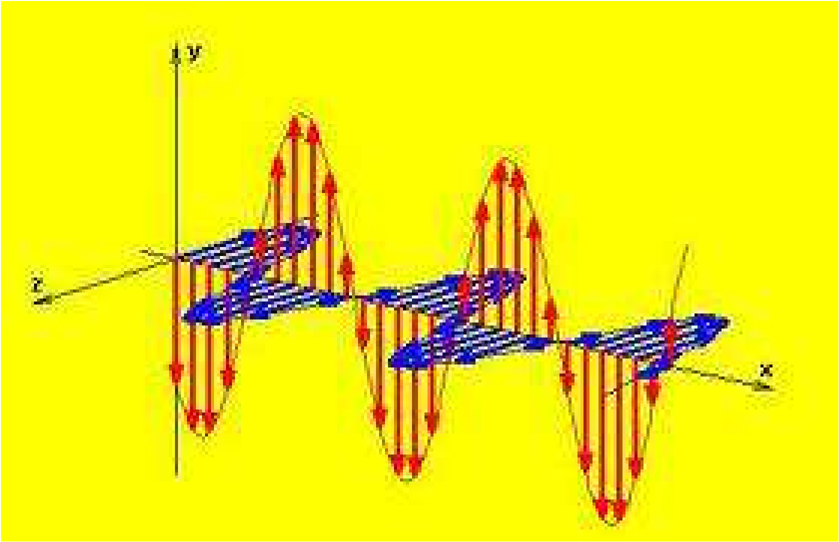


Figura 9.

Si el campo eléctrico oscila en una dirección fija, la onda está polarizada linealmente.

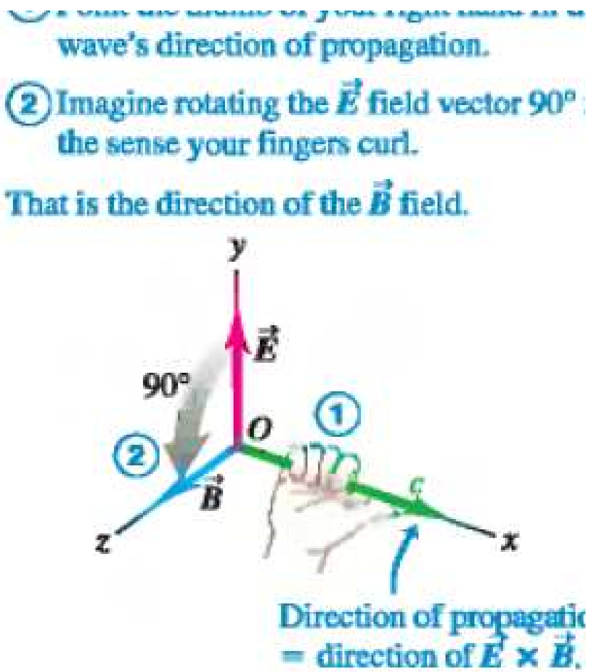
1. La onda es transversal. Esto es $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$. Además $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$. La dirección de propagación (vector de Poynting) es $\vec{E} \times \vec{B}$.

2. $\left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right|$.

3. La onda se mueve en el vacío a la velocidad de la luz c.

4. Las ondas electromagnéticas no necesitan un medio para propagarse. Recordemos que las ondas mecánicas necesitan un medio para propagarse. Problema del éter.

5. Tienen un grado de libertad llamado Polarización



wave's direction of propagation.
2 Imagine rotating the E field vector 90°
the sense your fingers curl.
That is the direction of the B field.
y
E
90°
O
1
2
B
c
z
x
Direction of propagati
= direction of E × B.

Figura 10.

Derivación de la Ecuación de ondas

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})+\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{B})}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{E})}{\partial t}=\vec{0},\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Usando la identidad (Demuéstrela!):

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de onda, dado que $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ en los dos casos:

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$
$$-\vec{\nabla}^2\vec{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Las dos ondas tiene la misma velocidad de propagación:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

En presencia de la materia con permitividad ε y permeabilidad μ tenemos que:

$$E = vB \quad B = \varepsilon\mu v E$$

Por lo tanto $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Definimos el índice de refracción por $n = \frac{c}{v}$.