Problema 30

Ejercicio 1. Calcule el campo magnético sobre el eje de un solenoide de largo L y radio R, que es recorrido por una corriente I que le da N vueltas

$$\text{El campo de un anillo es: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I R^2 (R^2 + x^2)^{-3/2} \quad \hat{x}$$

$$d\,\vec{B} = \int_0^L \frac{\mu_0}{2} \frac{N}{L} I R^2 (R^2 + (x - x')^2)^{-3/2} dx' \quad \hat{x}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2L} \left(\frac{(L - x)}{\sqrt{R^2 + (x - L)^2}} + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{x}$$

Ejercicio 2. Un cilindro macizo de largo L y radio R está cargado uniformemente con densidad de carga ρ. Se hace rotar en torno a su eje con velocidad angular constante ω. Calcule el campo magnético sobre su eje.

$$\text{El campo de un anillo es:} \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I R^2 (R^2 + x^2)^{-3/2} \qquad \hat{x}$$

$$dq = \rho dV \quad dV = dx'\,dr\,r\,d\theta$$

$$dI = dq \frac{\omega}{2\pi}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{2} r^2 (r^2 + (x' - x)^2)^{-3/2} \frac{\omega}{2\pi} \rho dx'\,dr\,r\,d\theta =$$

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} \omega\rho \int dr\,r \left(\frac{(L - x)}{\sqrt{r^2 + (x - L)^2}} + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) =$$

$$\frac{\mu_0}{2} \omega\rho \Big((L - x) \sqrt{r^2 + (x - L)^2} + x \sqrt{r^2 + x^2} \Big)_0^R =$$

$$\frac{\mu_0}{2} \omega\rho \Big((L - x) \sqrt{R^2 + (x - L)^2} + x \sqrt{R^2 + x^2} \Big) -$$

$$\frac{\mu_0}{2} \omega\rho (-(L - x)^2 + x^2)$$

Ejercicio 3. Un electrón se mueve en un campo eléctrico que depende del tiempo(pero es uniforme en todo el espacio en un instante dado), de la forma $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen} \omega t \hat{x}$, $\left|\vec{E}_0\right| = 10^4 \frac{V}{m}$ y la frecuencia de oscilación es $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 100$ Megaciclos por segundo. También hay un campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ Calcular el movimiento del electrón.

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2} \omega \vec{E}_0 \cos \omega t + \mu_0 J \qquad \nabla \times E + \partial_t B = 0, \partial_t B = 0$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -e E_0 \operatorname{sen} \omega t - e v_y B_0$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = e v_x B_0$$

$$v_x = \frac{m \dot{v}_y}{e B_0}$$

$$\frac{m^2}{e B_0} \ddot{v}_y = -e E_0 \operatorname{sen} \omega t - e v_y B_0$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{e^2 E_0 B_0}{m^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{e^2 B_0^2}{m^2} v_y$$

$$v_y = A \operatorname{sen} \omega t$$

Para t muy grande, suponiendo un roce pequeño

$$-A\omega^2 = -\frac{e^2 E_0 B_0}{m^2} - \frac{e^2 B_0^2}{m^2} A$$

$$A = \frac{-\frac{e^2 E_0 B_0}{m^2}}{\frac{e E_0 B_0}{m^2} - \omega^2}$$

Ejercicio 4. Considere el circuito de la figura 1. Encuentre 1) La carga del condensador como función del tiempo. 2) El voltaje en el condensador como función del tiempo. 3) La corriente en el circuito como función del tiempo.

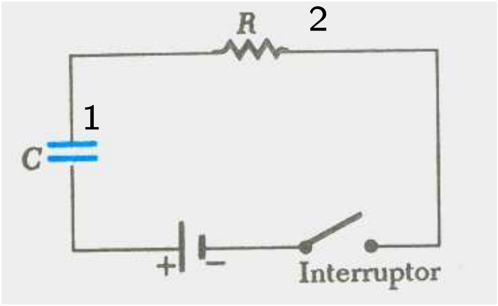

Figura 1.

Sol:En t=0 en condensador está descargado. Se conecta el interruptor, con lo cual se establece una corriente i que carga el condensador:

$$V_+ - V_1 = \frac{Q}{C} \qquad V_1 - V_2 = iR, V_+ - V_2 = V_0$$

$$V_0 = \frac{Q}{C} + iR, \qquad i = \dot{Q} \qquad \frac{Q}{C} + \dot{Q}R = V_0$$

$$\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC} \quad Q = A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + B$$

$$-\frac{1}{RC}A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC}\left(A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + B\right) \quad B = CV_0,$$

$$Q(0) = 0 = A + B, \qquad A = -CV_0$$

$$Q = CV_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad i(t) = \frac{V_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Ejercicio 5. Calcule $\varepsilon(t)$producida por la rotación de una espira circular de radio Ren un campo magnético uniforme $B\,\hat{z}$.

Sol:

$$\Phi = B\pi R^2 \cos\omega t \quad \varepsilon = B\pi R^2 \omega \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Ejercicio 6. Para medir el campo magnético terrestre se dispone de un solenoide de 1000 espiras y 11.3 cm. de diámetro, que se hace rotar en torno a un eje paralelo a un plano de las espiras, con una velocidad angular $\omega = 100\,\mathrm{rad}/s$. El eje de giro del solenoide se coloca en horizontal en la dirección Este-Oeste. Mediante un osciloscopio, conectado a los extremos del solenoide, se determina una f.e.m. inducida

$$\varepsilon = 50\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\,mV$$

en donde el tiempo se mide a partir de la horizontal. Encuentre

i. La magnitud del campo magnético en ese punto de la Tierra.

ii. La dirección del campo con respecto a la horizontal.

iii. Cuánto vale ϕ en el Ecuador y en los polos magnéticos terrestres?

Sol:

$$\vec{B} = B(\hat{y}\cos\theta_B + \hat{z}\,\mathrm{sen}\,\theta_B)$$

$$d\vec{S} = dS(\hat{y}\cos\omega t + \hat{z}\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$\vec{B}.d\vec{S} = BdS(\cos\theta_B\cos\omega t + \mathrm{sen}\,\theta_B\mathrm{sen}\,\omega t) = BdS\cos(\omega t - \theta_B)$$

$$\Phi = B\pi R^2 N\cos(\omega t - \theta_B)$$

$$\varepsilon = B\pi R^2 N\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \theta_B)$$

$$B = 0.5\times 10^{-4}\frac{\mathrm{Weber}}{m^2}$$

$$\theta_B = -\phi$$

$$\text{En el Ecuador } B \text{ es horizontal:} \quad \theta_B = -\phi = 0$$

$$\text{En el polo magnético norte, } B \text{ es vertical } y \text{ apunta hacia arriba:} \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{En el polo magnético sur, } B \text{ es vertical } y \text{ apunta hacia abajo:} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$