Problema Sugerido

Problema 1. Se tiene un alambre cargado en el eje z, de largo $2L$, cuyo centro se encuentra en el plano $x-y$. El alambre tiene una densidad lineal de carga

$$\lambda(z) = \frac{\lambda_0}{L}|z|,$$

donde $\lambda_0 > 0$.

(a) (4 Puntos) Calcule el vector campo eléctrico en el punto $(x, 0, 0)$.

(b) (2 Puntos) Poniendo como referencia $V(\infty) = 0$, calcule el potencial eléctrico en un punto x_0 arbitrario del eje x.

Solución
(a) La fórmula para el campo eléctrico está dada por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{alambre}} \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} dq(\vec{r'})$$

En nuestro caso $\vec{r'} = (0, 0, z')$ con $z' \in [-L, L]$ y el punto donde buscamos el campo es $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Por lo tanto usando que

$$\vec{r}-\vec{r'} = (x, 0, -z'), \qquad |\vec{r}-\vec{r'}|^3 = (x^2+z'^2)^{3/2}$$

1 Punto: establecer objetos básicos

y que

$$dq(\vec{r'}) = \frac{\lambda_0}{L}|z'|dz'$$

1 Punto: Consideraciones de simetría

encontramos que

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{L}\int_{-L}^{L}\left(\frac{x|z'|}{(x^2+z'^2)^{3/2}}\hat{x} - \frac{z'|z'|}{(x^2+z'^2)^{3/2}}\hat{z}\right) dz.'$$

Dado que el integrando en la dirección $\hat{z}$ es una función impar concluimos que no hay campo en esa dirección (esto se podría también haber argumentado usando la simetría de la densidad de carga desde un principio). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 x}{L}\int_{-L}^{L}\frac{|z'|}{(x^2+z'^2)^{3/2}}dz'\,\hat{x} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 x}{L}\int_{0}^{L}\frac{z'}{(x^2+z'^2)^{3/2}}dz'\,\hat{x} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 x}{L}\int_{0}^{L}\frac{1}{(x^2+z'^2)^{3/2}}d(x^2+z'^2)\,\hat{x} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 x}{L}\left[-2(x^2+z'^2)^{-1/2}\right]_0^L\,\hat{x} \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 x}{L}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\hat{x}.
\end{aligned}$$

1 Punto: igualdad; magnitud y dirección. Si no se comenta sobre la dirección del campo, bajar medio punto.

1 Punto: por hacer el cálculo correctamente

1/2 punto: Fórmula

(b) El potencial lo derivaremos de su relación con el campo eléctrico

$$
\begin{aligned}
V(x_0) - V(\infty) &= \int_{x_0 \mapsto \infty} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x} = \int_{x_0}^{+\infty} E(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \lim_{R\to\infty} \int_{x_0}^{R} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \lim_{R\to\infty} \left[|x| - \sqrt{x^2+L^2} \right]_{x_0}^{R} \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \lim_{R\to\infty} \left[R - \sqrt{R^2+L^2} + \sqrt{x_0^2+L^2} - |x_0| \right] \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \left[\sqrt{x_0^2+L^2} - |x_0| \right].
\end{aligned}
$$

1 1/2 puntos: por terminar el cálculo correctamente

Comentarios:

Puede que a algunos no escriban valor abs. de x_0: en este caso bajar medio punto.

Puede que algunos agreguen alguna constante aditiva al potencial: en este caso no bajar nada.