Definición de vectores

Un vector es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Cada vector posee unas características que son:

Origen

O también denominado *Punto de aplicación*. Es el punto exacto sobre el que actúa el vector.

Módulo

Es la longitud o tamaño del vector. Para hallarla es preciso conocer el origen y el extremo del vector, pues para saber cuál es el módulo del vector, debemos medir desde su origen hasta su extremo.

Dirección

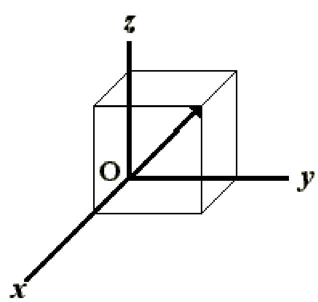
Viene dada por la orientación en el espacio de la recta que lo contiene.

Sentido

Se indica mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.

Hay que tener muy en cuenta el sistema de referencia de los vectores, que estará formado por un origen y tres ejes perpendiculares. Este sistema de referencia permite fijar la posición de un punto cualquiera con exactitud.

El sistema de referencia que usaremos, como norma general, es el *Sistema de Coordenadas Cartesianas*.



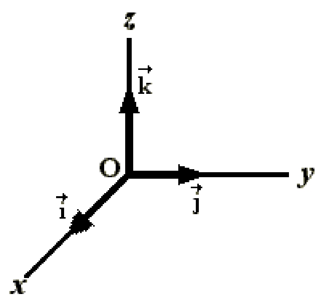
Para poder representar cada vector en este sistema de coordenadas cartesianas, haremos uso de tres vectores *unitarios*. Estos vectores unitarios, son unidimensionales, esto es, tienen módulo 1, son perpendiculares entre sí y corresponderán a cada uno de los ejes del sistema de referencia.

Por ello, al eje de las X, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{i}$ o también denominado $\hat{i}$.

Del mismo modo, al eje Y, le corresponderá el vector unitario $\vec{j}$ o también denominado $\hat{j}$.

Finalmente, al eje Z, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{k}$ o también denominado $\hat{k}$.

Por tanto, obtendríamos un eje de coordenadas cartesianas de la siguiente forma:



Magnitudes Escalares

Denominamos *Magnitudes Escalares* a aquellas en las que las medidas quedan correctamente expresadas por medio de un número y la correspondiente unidad. Ejemplo de ello son las siguientes magnitudes, entre otras:

Masa

Temperatura

Presión

Densidad

Magnitudes vectoriales

Las magnitudes vectoriales son magnitudes que para estar determinadas precisan de un valor numérico, una dirección, un sentido y un punto de aplicación.

Vector

Un vector es la expresión que proporciona la medida de cualquier magnitud vectorial. Podemos considerarlo como un segmento orientado, en el que cabe distinguir:

- Un origen o punto de aplicación: A.
- Un extremo: B.
- Una dirección: la de la recta que lo contiene.
- Un sentido: indicado por la punta de flecha en B.
- Un módulo, indicativo de la longitud del segmento AB.

Vectores iguales

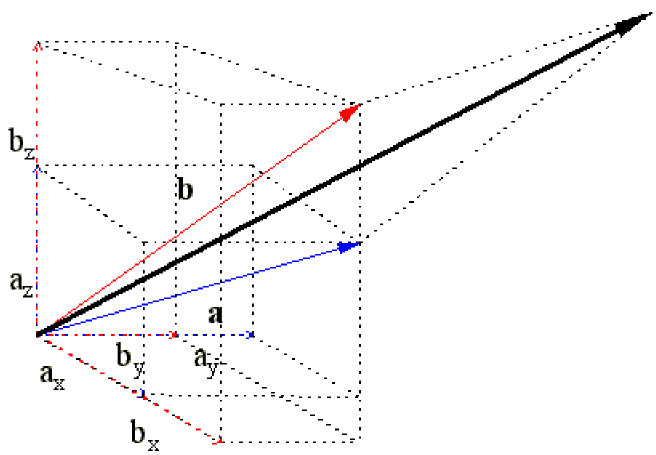
Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección.

Vector libre

Un vector libre queda caracterizado por su módulo, dirección y sentido. El vector libre es independiente del lugar en el que se encuentra.

Descomponiendo en un sistema de ejes cartesianos

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+ a_z\mathbf{k})+(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+ b_z\mathbf{k})=(a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y +b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k}$



Propiedades

Conmutativa: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

Asociativa: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

Elemento Neutro: $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

Elemento Simétrico: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{a}=0$

Vectores unitarios y componentes de un vector

Cualquier vector puede ser considerado como resultado de la suma de tres vectores, cada uno de ellos en la dirección de uno de los ejes coordenados.

$$\vec{x}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k},\ \ \vec{x}=(x,y,z)$$

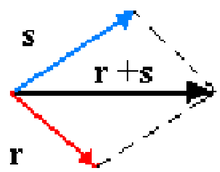
x, y, z son las componentes cartesianas del vector $\vec{x}$.

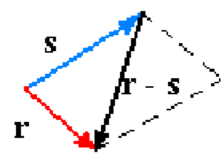
Suma y resta de vectores

La suma de dos vectores libres es otro vector libre que se determina de la siguiente forma:

Se sitúa el punto de aplicación de uno de ellos sobre el extremo del otro; el vector suma es el vector que tiene su origen en el origen del primero y su extremo en el extremo del segundo.

Por tanto, el vector suma de dos vectores coincide con una de las diagonales, la "saliente", del paralelogramo que puede formarse con los vectores que se suman; la otra diagonal representa la resta de dichos vectores.





Para efectuar sumas o restas de tres o más vectores, el proceso es idéntico. Basta con aplicar la propiedad asociativa.

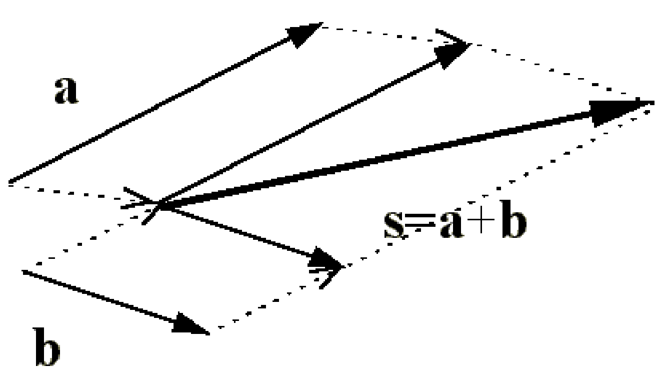
Al vector que se obtiene al sumar o restar varios vectores se le denomina resultante.

Suma de Vectores

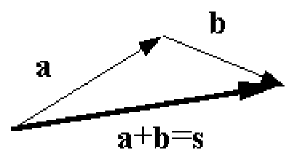
La suma de los vectores podemos realizarla de dos maneras diferentes, analítica y gráficamente.

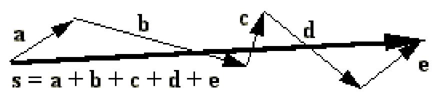
Procedimiento Gráfico

Para sumar dos vectores de manera gráfica utilizaremos la denominada Regla del paralelogramo, consistente en trasladar paralelamente los vectores hasta unirlos por el origen, y luego trazar un paralelogramo, del que obtendremos el resultado de la suma, como consecuencia de dibujar la diagonal de ese paralelogramo, como podemos ver en el siguiente dibujo:

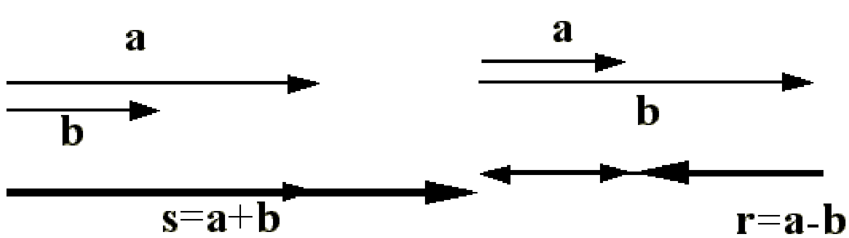


Otra manera de expresar la suma de manera gráfica es trasladar el segundo vector a sumar de tal manera que el origen de éste, coincida con el extremo del primer vector, y la suma la obtendremos dibujando un vector que vaya desde el origen del primer vector hasta el extremo del segundo, de la siguiente manera:





Hay que tener muy presente lo siguiente: vectores en la misma dirección se suman (tal y como ya hemos visto en la sección de la suma de vectores), pero vectores con sentidos opuestos se restan (tal y como se puede ver en el apartado correspondiente a la resta de vectores). A continuación tenemos un ejemplo de suma y resta de vectores.



Método Algebraico para la Suma de vectores

Dados tres vectores

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

La expresión correspondiente al vector suma es:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3)$$

La suma de vectores goza de las siguientes propiedades:

Conmutativa

a + b = b + a

Asociativa

(a + b) + c = a + (b + c)

Elemento neutro o vector 0

a+ 0 = 0 + a = a

Elemento simétrico u opuesto a'

a + a' = a' + a = 0

a' = -a

Producto de un vector por un escalar

El resultado de multiplicar un escalar **k** por un vector **v**, expresado analíticamente por **kv**, es otro vector con las siguientes características :

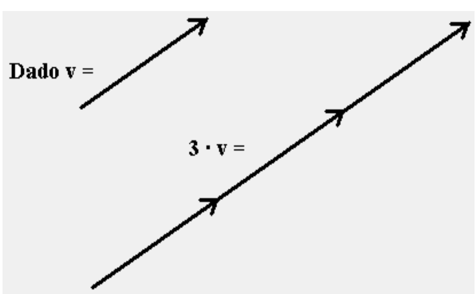
1.- Tiene la misma dirección que **v**.
2.- Su sentido coincide con el de **v**, si **k** es un número positivo, y es el opuesto, si **k** es un número negativo.
3.- El módulo es **k** veces la longitud que representa el módulo de **v**. (Si **k** es 0 el resultado es el vector nulo).

Analíticamente, tenemos que multiplicar el escalar por cada una de las coordenadas del vector.

Ejemplo : Dado el vector **v** de componentes : $\mathbf{v_x i} + \mathbf{v_y j} + \mathbf{v_z k}$, el producto 3 **v** =3 $\mathbf{v_x i}$ +3 $\mathbf{v_y j}$ +3 $\mathbf{v_z k}$.

La representación gráfica del producto es igual a sumar el vector tantas veces como indica el escalar.

Ejemplo :



Propiedades

El producto de un vector por un escalar cumple las siguientes propiedades:

1.- Conmutativa: **k v = v k.**
2.- Distributiva: **k** (**v** + **u**) = (**k v**) + (**k u**).
3.- Elemento Neutro: 1 **v = v.**
4.- Elemento Simétrico: -1 **v = -v.**

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores, expresado analíticamente como **r** **v**, se obtiene de la suma de los productos formados por las componentes de uno y otro vector. Es decir, dados dos vectores **r** y **v**, expresados en un mismo sistema de coordenadas:

$\mathbf{r}=\mathbf{r_x i} + \mathbf{r_y j} + \mathbf{r_z k}$
$\mathbf{v}=\mathbf{v_x i} + \mathbf{v_y j} + \mathbf{v_z k}$

teniendo en cuenta que el producto escalar de los vectores :

$\mathbf{i}\ \mathbf{i} = \mathbf{j}\ \mathbf{j} = \mathbf{k}\ \mathbf{k} = 1$
$\mathbf{i}\ \mathbf{j} = \mathbf{i}\ \mathbf{k} = \mathbf{j}\ \mathbf{k} = 0$

el resultado de multiplicar escalarmente **r** por **v**es:

$\mathbf{r}\ \mathbf{v} = \mathbf{r_x}\ \mathbf{v_x} + \mathbf{r_y}\ \ \mathbf{v_y} + \mathbf{r_z}\ \ \mathbf{v_z}$

Esta operación no solo nos permite el cálculo de la longitud de los segmentos orientados que representan (sus módulos), sino también calcular el ángulo que hay entre ellos. Esto es posible, ya que el producto escalar también se puede hallar en función de sus módulos y del coseno del ángulo que forman mediante la fórmula :

$\mathbf{rv} = |\mathbf{r}||\mathbf{v}| \cos(\mathbf{r}, \mathbf{v})$

Propiedades

Conmutativa : **r** **v**= **v** **r**
Distributiva : **r** (**v**+ **u**) = **r** **v** + **r** **u**
Asociativa : (**k** **r**) **v**= **k** (**r** **v**)= **r** (**k** **v**) siendo **k**escalar.

Además :

1.- **r** **r**= 0 si, y sólo sí **r** = 0.
2.- Si **r** y **v** <> 0 y **r** **v**= 0, esto implica que los vectores son perpendiculares, (cos 90Âž = 0).
3.- El producto escalar de dos vectores es equivalente a multiplicar escalarmente uno de ellos por el vector proyección del otro sobre él.

Ejemplo :

Proyección ortogonal ($\mathbf{r_v}$) de **r**sobre **v**

rv= |r| cos (r, v) -> **r** **v** = |**v**| $\mathbf{r_v}$

Ejemplo :

Calcular el producto escalar de los vectores **r**=5 i - 3 j + 2 k y **v**= -2 i + j + 3 k. Hallar el ángulo que forman.

Primero hallamos el producto escalar de los vectores :

r **v**= 5 (-2) + (-3) 1 + 2 3 = -7

Ahora calculamos el angulo que forman;

sabemos que :

$$\cos(\vec{r}\,,\vec{v}\,) = \frac{\bar{r}\,.\vec{v}}{|\vec{r}\,||\vec{v}\,|}$$

como ya calculamos **r** **v**, nos queda que hallar el producto de sus módulos para poder realizar el cociente:

|**r**| |**v**| =22.17.

Entonces

$$\cos(\vec{r}\,,\vec{v}\,) = -\,0.31$$

y obtenemos que el ángulo entre los vectores es = 108.06°.

Aplicación: ángulo entre dos vectores

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores es por definición un escalar.

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = |\vec{A}\,|.|\,\vec{B}\,|\cos{(\alpha)}$$

donde α es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En término de las componentes cartesianas, se tiene que:

$$(a_1, a_2, a_3).(b_1, b_2, b_3) = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Propiedades:

$$a.b = b.a$$
$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Podemos usar ahora el producto escalar para encontrar el ángulo de los vectores **a** y **b:**

$$\cos(\vec{r}\,,\vec{v}\,) = \frac{\bar{r}\,.\vec{v}}{|\vec{r}\,||\vec{v}\,|}$$

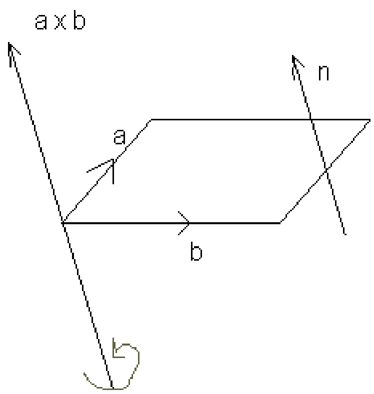
- El **cos** dará siempre entre 0 y 1
- El producto escalar varía como máximo entre $|\vec{r}\,||\vec{v}\,|$ y 0
- El **cos**nos dice si los vectores son paralelos o perpendiculares

Si cos de **a**y**b** $= 0$ *vectores perpendiculares.*

En este caso, $a.b=0$, podemos sacar como conclusión que $a = \mathbf{0}$ ó $b = \mathbf{0}$, o bien que a y b son mutuamente perpendiculares.

Producto vectorial

El producto vectorial de los vectores **a** y **b**, se define como un vector, donde su dirección es perpendicular al plano de **a** y **b**, en el sentido del movimiento de un tornillo que gira hacia la derecha por el camino más corto de **a** a **b,**



Se escribe $a\times b$. Por tanto:

$$a\times b = a\,b\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano de **a** y **b** en el sentido del movimiento de un tornillo que gira hacia la derecha de **a** a **b**.

Propiedades:

$$\begin{aligned} a\times b &= -\,b\times a \\ a\times(b+c) &= a\times b + a\times c \\ a\times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Módulo de un vector

Un vector no solo nos da una dirección y un sentido, sino también una magnitud, a esa magnitud se le denomina *módulo*.

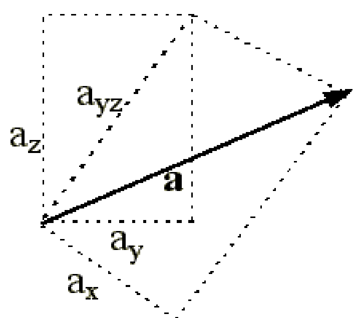
Gráficamente: es la distancia que existe entre su origen y su extremo, y se representa por:

$$a = |\boldsymbol{a}|$$

Coordenadas cartesianas: En muchas ocasiones es conveniente tomar las componentes sobre tres direcciones mutuamente perpendiculares OX, OY y OZ que forman un sistema cartesiano tridimensional.

Si tomamos tres vectores unitarios, **i** sobre OX, **j** sobre OY y **k**sobre OZ, entonces podemos encontrar puntos ax, ay, az sobre OX, OY, OZ, respectivamente, tales que:

$$\boldsymbol{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$



y aplicando el teorema de Pitágoras nos encontramos con que el módulo de **a** es:

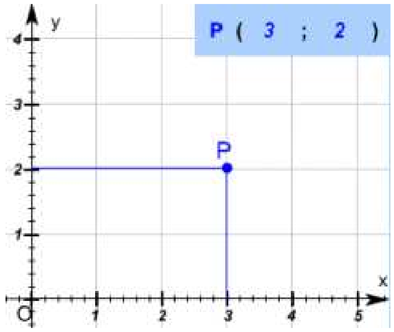
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Dos dimensiones

Si el cuerpo realiza un movimiento en dos dimensiones, es decir se mueve por un plano, necesitaremos dos coordenadas para determinar la posición que ocupa en un instante dado.

Los dos valores que determinan la posición de un cuerpo en un plano podemos establecerlos utilizando como referencia un sistema de coordenadas cartesianas o un sistema de coordenadas polares.

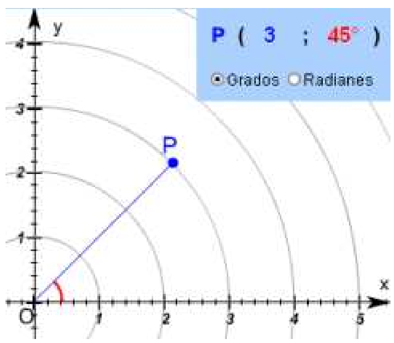
En el caso de las coordenadas cartesianas se utilizan las distancias a los dos ejes acompañadas de los signos (+) ó (-).



En la figura de arriba aparece representado el punto P(3,2). Para evitar confusiones se tiene el acuerdo de escribir primero la coordenada x y después la coordenada y, separadas por una coma.

El signo negativo para la coordenada x se utiliza si el punto se encuentra a la izquierda del orígen y para la coordenada y cuando está por debajo del orígen.

Las coordenadas polares utilizan la longitud de la recta que une nuestro punto con el punto de referencia y el ángulo que forma esta recta con la horizontal.



En la figura de arriba se representa el punto P(3 , 45°), que significa que la distancia OP vale 3 y que el ángulo vale 45°

Representar los puntos dados en:

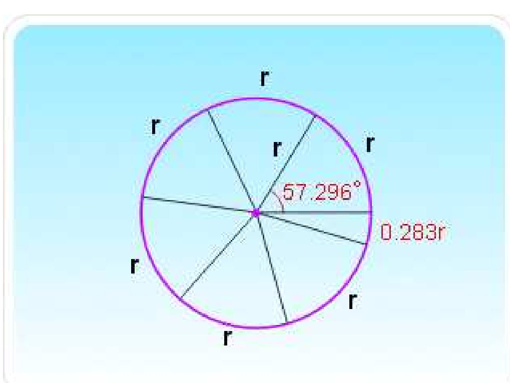
C. Cartesianas C. Polares

* (-1.3, 2) * (-2, -2) * (0, 1.8) * (2.4, 0) * (0.7, 1.5)

* (3, 45°) * (2, 160°) * (3, -90°) * (2, 30°) * (1, 90°)

Radianes

El ángulo formado por dos radios de una circunferencia, medido en radianes, es igual a la longitud del arco que delimitan los radios; es decir, $\theta = s/r$, donde θ es ángulo, s es la longitud del arco, y r es el radio.

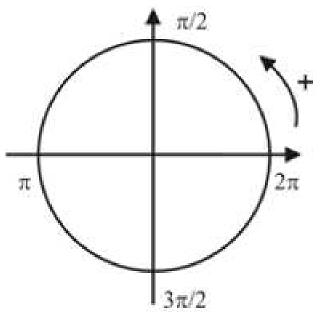


Por tanto, el ángulo completo,$\theta_{\text{circunsferencia}}$, que sustiende una circunferencia de radio r, medido en radianes, es:

$$\theta_{\text{circunferencia}} = \frac{L_{\text{circunferencia}}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\text{rad}$$

Se tiene que:

$$\theta(\text{en radianes}) = \frac{\pi}{180}\theta(\text{en grados})$$



Tres dimensiones

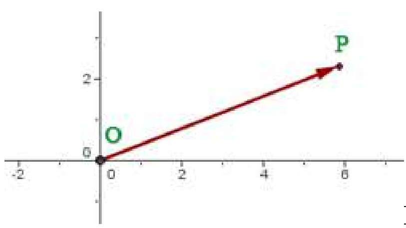
En el caso de un cuerpo que siguiera una trayectoria de tres dimensiones, necesitaríamos tres coordenadas para determinar su posición en un instante dado.

También en este caso se pueden utilizar coordenadas polares y coordenadas cartesianas.

Vector de Posición

Si ya sabes cómo se determina la posición de un punto, es muy fácil entender qué es un vector de posición.

En el siguiente gráfico se representa el vector de posición ($\vec{r} = \overrightarrow{\text{OP}}$) en rojo, para cada posición que ocupa el punto P en un plano, además de sus componentes en coordenadas cartesianas :



El vector $\overrightarrow{\text{OP}}$ que une el origen de coordenadas O con un punto P se llama vector de posición del punto P.

Trayectoria

Hemos dicho en el apartado anterior que la trayectoria es la línea formada por las sucesivas posiciones por las que pasa un móvil.

Parece razonable que podamos hacer una primera clasificación de los movimientos utilizando como criterio la forma de su trayectoria:

Movimientos rectilíneos

Podemos decir que son los movimientos cuya trayectoria es una línea recta.

En éstas páginas hacemos un estudio de este tipo de movimientos y analizamos cuáles son sus características.

Una de las características que nos permiten describir un movimiento es la dirección de su velocidad, que puede cambiar o no. Para estudiar los cambios en la dirección de la velocidad utilizamos una magnitud llamada aceleración normal o centrípeta.

Como en los movimientos rectilíneos no cambia la dirección, podemos decir que se trata de movimientos en los que la aceleración normal es cero.

Movimientos curvilíneos

Como algunas de las curvas son muy conocidas, solemos asociar el nombre de algunos movimientos con la forma de su trayectoria.

Así, podemos citar:

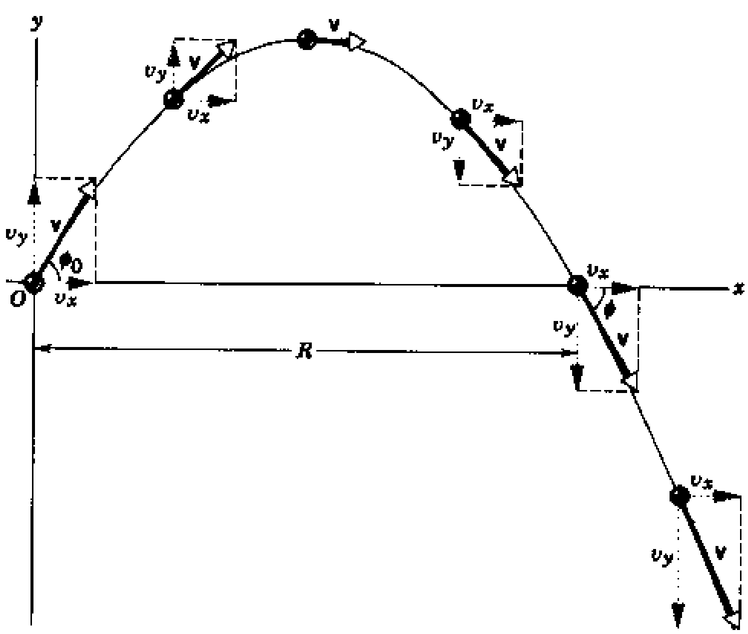
* Movimientos circulares

* Movimientos elípticos

* Movimientos parabólicos * Etc.

Tiro Parabólico

Cuando lanzamos un cuerpo con una velocidad que forma un ángulo con la horizontal, éste describe una trayectoria parabólica. En su obra Dialogo sobre los Sistemas del Mundo (1633), Galileo Galilei expone que el movimiento de un proyectil puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado.



ACELERACION CONSTANTE

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

Hemos seleccionado el punto de salida como origen de coordenadas. Si la velocidad de salida es v_0 y el ángulo es ϕ_0, tendremos que las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \cos\ \phi_0 \qquad v_{0y} = v_0 \,\mathrm{sen}\, \phi_0$$

Y las propiedades cinemáticas del cuerpo en cualquier instante (t) de su movimiento son:

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
posición	$x = v_{0x}\,t$	$y = v_{0y}t - (1/2)gt^2$

Observa que la aceleración no depende del tiempo (es constante), pero la velocidad y la posición del móvil sí que dependen del tiempo. En el tiro parabólico son de interés la altura máxima y el alcance (o desplazamiento horizontal) conseguido.

La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical v_y de la velocidad se hace cero. Como $v_y = v_{0y} - gt$, se alcanzará la altura máxima cuando $t = v_{0y}/g$. Utilizando estos datos llegarás fácilmente a la conclusión de que el valor de la altura máxima es:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

El móvil estará avanzando horizontalmente a la velocidad constante v_{0x} durante el tiempo de vuelo, que será $2t$ (siendo t el tiempo en alcanzar la altura máxima) ya que el móvil tarda lo mismo en subir que en bajar, por lo tanto el alcance es:

$$x_{\max} = 2v_{0x}t$$

es decir

$$\text{alcance} = x_{\max} = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\phi_0$$

Tiro Horizontal

El movimiento que realiza la moto en la siguiente simulación es una rama de parábola y se llama tiro horizontal.

Si la velocidad de salida es v_0, tendremos que las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \qquad v_{0y} = 0$$

Como ocurría en el caso del tiro parabólico, este movimiento puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado. Las propiedades cinemáticas del cuerpo en cualquier instante (t) de su movimiento son:

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_0$	$v_y = -gt$
posición	$x = v_0\,t$	$y = h - (1/2)gt^2$

Combinando las ecuaciones podemos llegar a la conclusión de que el tiempo de vuelo es:

$$t = \sqrt{(2h/g)}$$

y por lo tanto el desplazamiento horizontal alcanzado es:

$$x_{\max} = v_0\,\sqrt{(2h/g)}$$

Observa que el tiempo de vuelo no depende de la velocidad, sino de la altura y del valor de la gravedad.

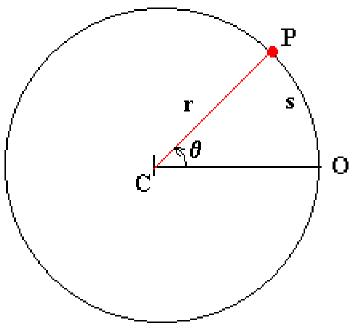
Movimiento Circular

En esta sección, vamos a definir las magnitudes características de un movimiento circular, análogas a las ya definidas para el movimiento rectilíneo.

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

Posición angular, θ

En el instante t el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.



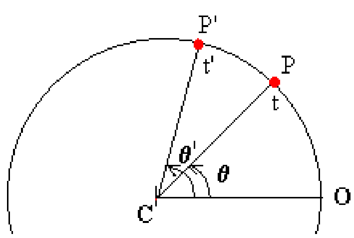
El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco s y el radio de la circunferencia r,

$$\theta = s/r$$

La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones. Se mide en radianes.

Velocidad Angular, ω

En el instante t' el móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo θ '. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta = \theta' - \theta$ en el intervalo de tiempo Δt=t'-t comprendido entre t y t'.



Se denomina velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento y el tiempo:

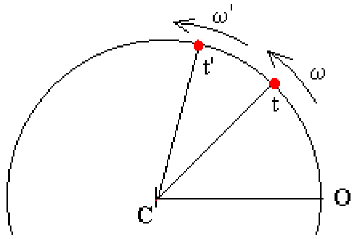
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, α

Si en el instante t la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t' la velocidad angular del móvil es ω'. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega = \omega\prime - \omega$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t\prime - t$ comprendido entre t y t'.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

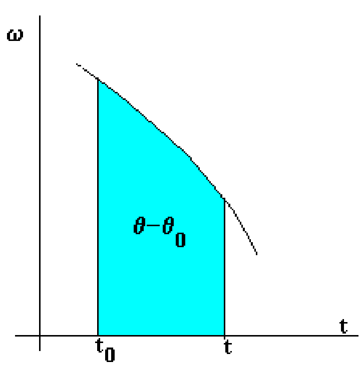
Dada la velocidad angular, hallar el desplazamiento angular

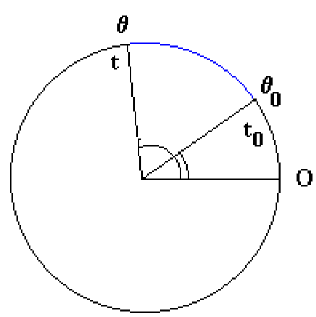
Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta - \theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

El producto $\omega \, dt$ representa el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t y t+dt, o en el intervalo dt. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos angulares infinitesimales entre los instantes t_0 y t.

En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad angular en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento angular total del móvil entre los instantes t0 y t, el arco en color azul marcado en la circunferencia.



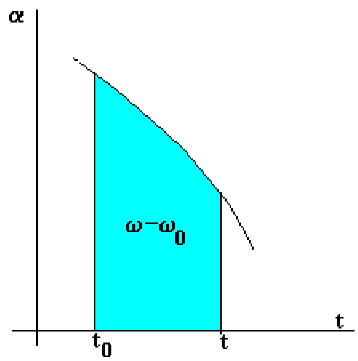


Hallamos la posición angular θ del móvil en el instante t, sumando la posición inicial θ_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva $\omega - t$ o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Dada la aceleración angular, hallar el cambio de velocidad angular

Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular w en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad w -w0 que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de una gráfica de la aceleración angular en función del tiempo.

$$\omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$



En la figura, el cambio de velocidad $\omega - \omega_0$ es el área bajo la curva $\alpha - t$, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$, y el valor inicial ω_0 en el instante inicial t_0, podemos calcular la velocidad angular ω en el instante t.

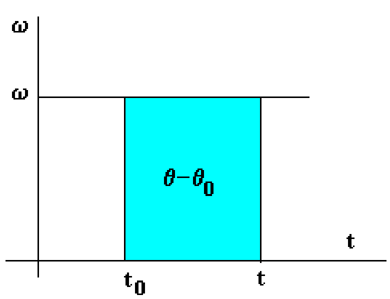
Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento circular son similares a las del movimiento rectilíneo.

Movimiento circular uniforme

Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero. La posición angular θ del móvil en el instante t lo podemos calcular integrando

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

o gráficamente, en la representación de ω en función de t.



Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

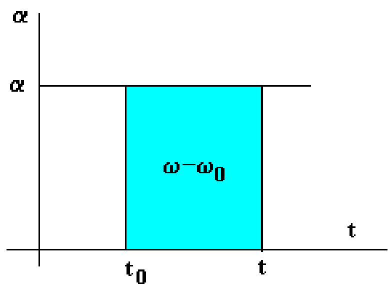
$$\alpha = 0 \qquad \omega = \text{constante} \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración a es constante.

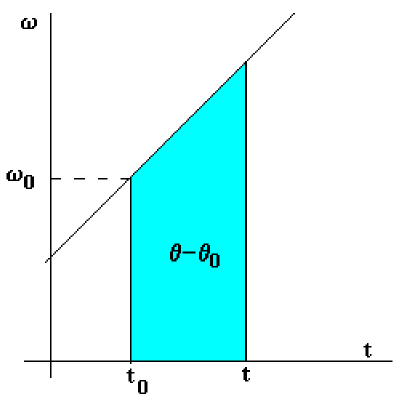
Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular $\omega-\omega_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$\omega-\omega_0=\alpha t$$



Dada la velocidad angular ω en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento $\theta-\theta_0$ del móvil entre los instantes t0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$\theta-\theta_0=\omega(t-t_0)+\frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$



Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

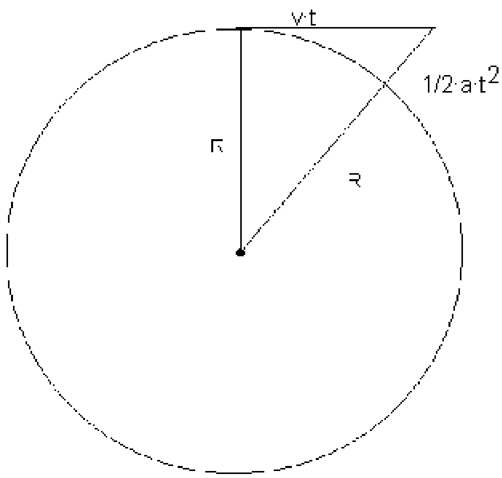
$$\alpha=\text{constante} \qquad \omega=\omega_0+\alpha t \qquad \theta=\theta_0+\omega t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento $\theta-\theta_0$

$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$$

La aceleración centrípeta

Veamos qué aceleración es necesaria para mantener a un cuerpo girando alrededor de un punto sin que tienda a ser expelido por la rotación de éste.



Y del triángulo de la figura obtenemos:

$$(R+\frac{1}{2}at^2)^2 = R^2 + v^2t^2$$

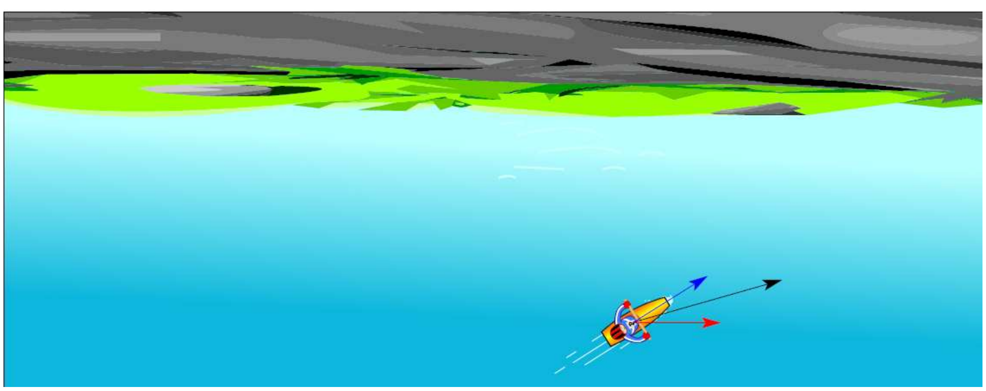
Puesto que esta aproximación es válida sólo para tiempos muy pequeños, podemos despreciar el término que contiene a t^4 y obtener finalmente que:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

La expresión de arriba es la aceleración necesaria para mantener un objeto describiendo una circunferencia de radio R con una velocidad v, y más conocida como aceleración centrípeta.

Composición de Movimientos. Movimiento Relativo

Vamos a suponer que deseamos cruzar un río con una moto de agua que se mueve a velocidad constante.



Si ponemos el timón en la dirección del punto de destino, no llegaremos a éste porque la corriente nos irá arrastrando mientras avanzamos hacia la otra orilla.

Si observas con detenimiento llegarás a la conclusión de que conseguiremos llegar a nuestro destino cuando la componente X de la velocidad del bote sea de igual valor pero de sentido contrario a la componente X de la velocidad del río (que es su única componente).

Lógicamente esto lo hacemos con el timón, poniendo un ángulo de navegación que contrarreste la velocidad del río, es decir navegando un poco a contracorriente.

Podemos decir que la moto de agua tiene simultáneamente un movimiento de avance hacia la otra orilla, producido por el motor, y otro movimiento de arrastre, producido por la corriente. Esto equivale a decir que el movimiento de la moto es la composición de los movimientos de .avance y arrastre.

Ambos movimientos son uniformes (de velocidad constante) y, como consecuencia, el movimiento resultante también lo es.

Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "El tiempo que se tarda en cruzar el río no depende de la corriente".

En general se tiene la siguiente situación. Consideremos dos sistemas de referencia inerciales S y S'. S se mueve respecto a S' con velocidad $\vec{u}$. Las posición de una partícula respecto a S es $\vec{x}$ y respecto a S' es $\vec{x}\,'$. Los tiempos medidos en $S(S')$ son $t(t\prime)$. Se tiene que:

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{u}\,t, \;\; t' = t$$

Esta es la *transformación de Galileo* entre dos sistemas inerciales.

Si consideramos los cambios de posición en los dos sistemas de referencia, encontramos la regla de *suma de velocidades de Galileo*:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{u}$$

El ejemplo del bote atravesando un río, en presencia de una corriente, es un caso particular de la regla de suma de velocidades.