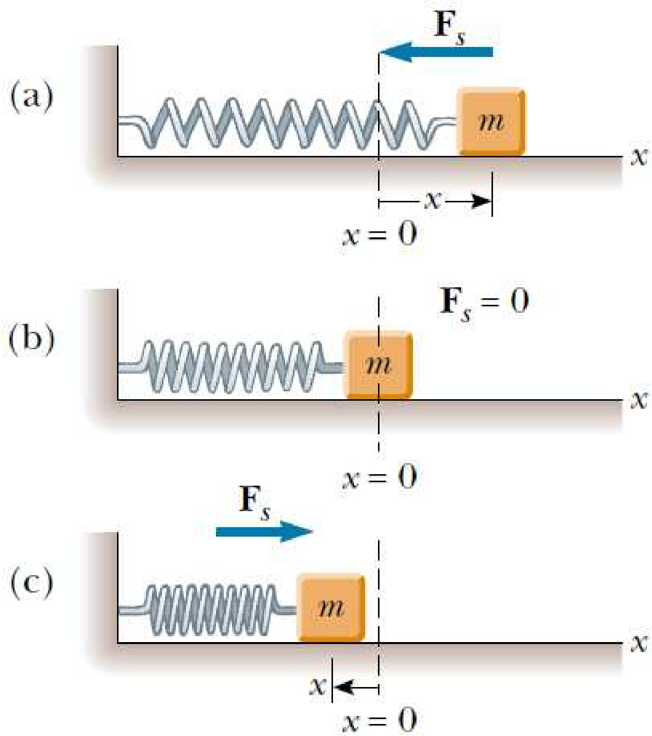
Movimiento oscilatorios: libre, amortiguado, forzado.

Masa sujeta a un resorte



Ley de Hooke:

$$F = -kx$$

Segunda Ley de Newton:

$$ma = -kx; a = -\omega^2 x; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2x^2}}=dt$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2x^2}}=\int_0^t dt \quad =t$$

$$\omega x=\sqrt{\frac{2E}{m}}\operatorname{sen} u$$

$$\omega^{-1}\int_{u_0}^{u} du=\frac{u-u_0}{\omega}=t$$

$$u=u_0+\omega t$$

$$x=\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}}\operatorname{sen}(\omega t+u_0)$$

$$x(t)=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$$

A:Amplitud; ω: Frecuencia Angular;ϕ: Constante de Fase; T: período

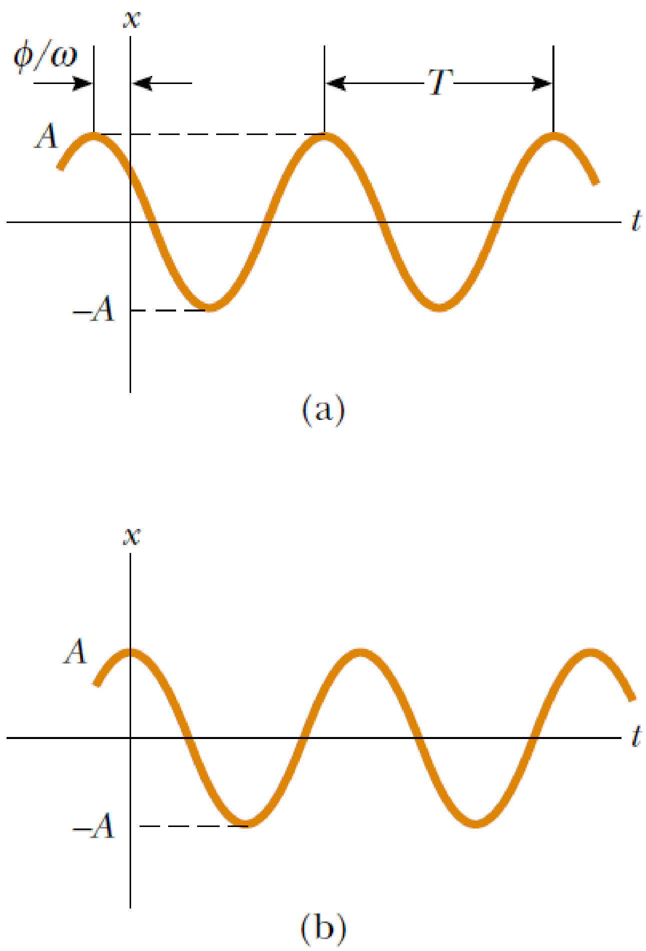
$$x(t+T)=x(t), \text{para todo}\, t$$

$$\omega T=2\pi\,, T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Frecuencia f:

$$f=\frac{1}{T}$$

Se mide en ciclos por segundo. 1 ciclo por segundo=1 hertz=1 hz.



(a) Una curva $x(t)$ para una partícula efectuando un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A, el período es T, y la constante de fase ϕ. (b) Lo mismo para el caso particular $x = A$, $t = 0$; $\phi = \pi/2$.

ENERGIA

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = A\omega \qquad \cos(\omega t + \phi)$$

$$K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

VELOCIDAD:

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$
$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Ejemplo 1. Un cubo de 0.500-kg conectado a un resorte con $k = 20\, N/m$ oscila en una superficie horizontal sin roce.

(a) Calcula la energía total del sistema y la velocidad máxima del cubo si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$ $\quad m = .5$ kg, $A = 0.03m$, $\omega = \sqrt{\frac{20}{.5}} = \sqrt{40}\text{rad}/s$

$$E = 0.009\, J$$

(b) Cuál es la velocidad del cubo si el desplazamiento es 2.00 cm?

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$
$$v = \sqrt{40}\sqrt{9 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4}} = \sqrt{2} \times 10^{-1} m/s$$

(c) Encuentre la energía potencial y cinética del sistema para x=2.00 cm.

(d) Encuentre la frecuencia angular, el período y la frecuencia del movimieno.

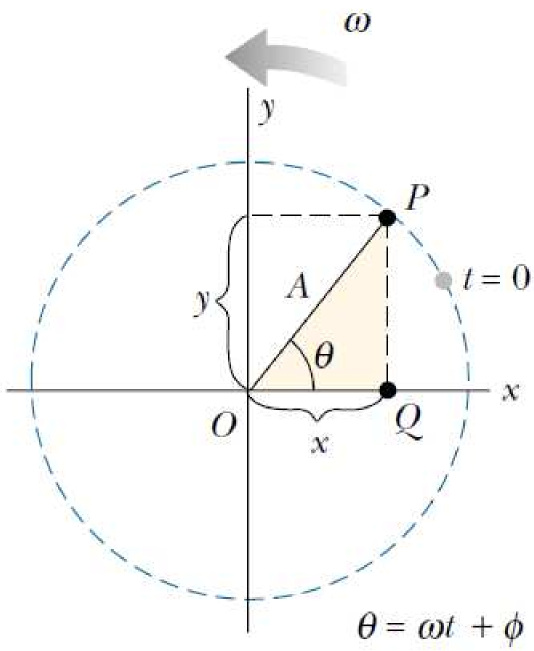
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{\sqrt{40}} s$$
$$f = \sqrt{40}/6.28\,\text{Hz}.$$

Ejemplo 2. Un auto con masa 1 300 kg se construye de tal manera que su estructura se sustenta sobre 4 resortes. Cada resorte tiene una constante de fuerza igual a 20 000 N/m. Si dos persona que viajan en el auto tienen una masa combinada de 160 kg, encontrar la frecuencia de vibración del auto luego de pasar por un bache en la pista. Suponga que la masa se distribuye uniformemente.

$$m = 1460/4 = 365\,\text{kg}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{20000}{365}} = \sqrt{\frac{2}{365}} \quad \times 10^2$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4.8 \times 10^{-4}\text{Hz}.$$

Comparación entre movimiento armónico simple y movimiento

circular uniforme



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

ω es la velocidad angular de rotación en el círculo.

Ejemplo 3. Una partícula rota en dirección contraria a las agujas del reloj en un círculo de radio 3.00 m con velocidad angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$ la partícula tiene una coordenada $x = 2.00$ m y se mueve hacia la derecha .

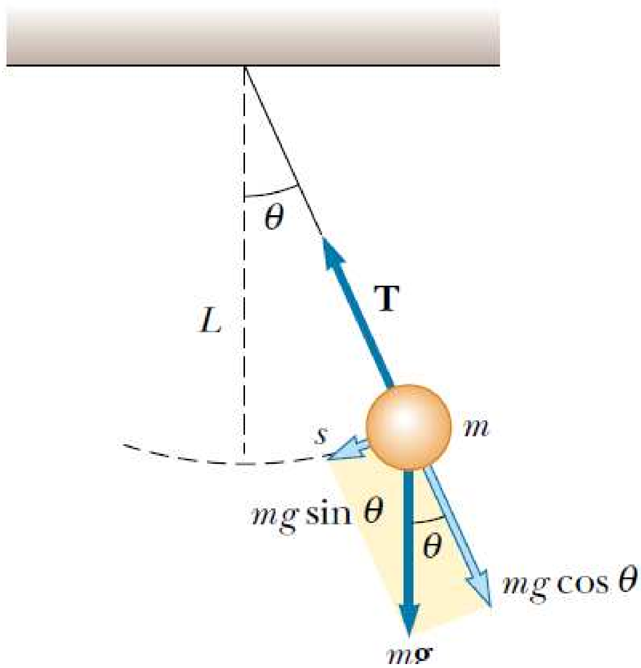
(a) Encuentre $x(t)$.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$2 = 3\cos\phi, \cos\phi = 2/3 \quad \phi = 311.8°$$

(b) Encuentre $v_x(t)$.

$$= -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Pendulo Simple



Segunda Ley de Newton(Componente tangencial de la fuerza):

$$m\,l\,\ddot{\theta} = -m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta, \theta \ll 1$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

Conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2 + m\,g\,l(1 - \cos\theta)$$
$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \theta \ll 1$$

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad I=ml^2 \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\theta=\sqrt{\frac{2E}{\omega^2ml^2}}\mathrm{sen}(\omega t+u_0)$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El período de un péndulo simple depende solo de l y g, y no de m.

Ejemplo 4. Christian Huygens (1629-1695), el mejor relojero de la historia, sugirió que una unidad internacional de longitud podría ser definida como la longitud de un péndulo simple con período igual a 1s. A qué longitud corresponde?

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l=g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=9.8/6.28^2m=0.25m$$

Movimientos de Sistemas cerca de un punto de equilibrio estable

Energía potencial:

$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + ...,$
$U'(x_0) = 0$

Máximo(Equilibrio Inestable):

$$U''(x_0) < 0$$

Mínimo(Equilibrio Estable):

$$U''(x_0) > 0$$

Punto de Inflexión(Equilibrio Indiferente):

$$U''(x_0) = 0$$

Conservación de la energía:

$E = \frac{1}{2}m \ \dot{x}^2 + U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$ $\quad E' = E - U(x_0)$ $y = x - x_0$

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2E'}{\omega^2 m}} \mathrm{sen}(\omega t + u_0)$$

Energía potencial y cinética media

Promedio temporal:

$$<F> = \frac{1}{T}\int_0^T F dt$$

Energía potencial media:

$$<\frac{1}{2}m\ \omega^2 x^2 \qquad > \qquad = \frac{1}{T}\int_0^T \quad \frac{1}{2}m\ \omega^2 x^2 \qquad d\ t \qquad =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2\left(\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}}\mathrm{sen}(\omega t+u_0)\right)^2 dt=$$

$$\frac{E}{T}\int_0^T dt\,\mathrm{sen}^2(\omega t+u_0)$$

$$u=\omega t+u_0$$

$$\frac{E}{\omega T}\int_{u_0}^{u_0+2\pi} du\,\mathrm{sen}^2 u=\frac{E}{2\pi}\int_{u_0}^{u_0+2\pi} du\frac{1}{2}(1-\cos(2u))=$$

$$\frac{E}{2\pi}(\pi-0)=\frac{E}{2}$$

Energía cinética media:

$$<\tfrac{1}{2}m\,\dot{x}^2>=\tfrac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}m\,\dot{x}^2\,dt=\tfrac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(\sqrt{\tfrac{2E}{\omega^2 m}}\cos(\omega t+ u_0)\right)^2 dt=$$

$$\frac{E}{T}\int_0^T dt\cos^2(\omega t+u_0)$$

$$u=\omega t+u_0$$

$$\frac{E}{\omega T}\int_{u_0}^{u_0+2\pi} du\cos^2 u=\frac{E}{2\pi}\int_{u_0}^{u_0+2\pi} du\frac{1}{2}(1+\cos(2u))=$$

$$\frac{E}{2\pi}(\pi-0)=\frac{E}{2}$$

Rozamiento

$$F_r = -bv\,, b > 0$$

Oscilador Armónico amortiguado

Segunda ley de Newton:

$$m\,\ddot{x} = -\,k\,x - b\,\dot{x}\,,\, \ddot{x} + \frac{b}{m}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Consideremos una solución tipo:

$$x = A\,e^{\lambda\,t}$$

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

Si $\frac{b^2}{4m^2} < \omega_0^2$,

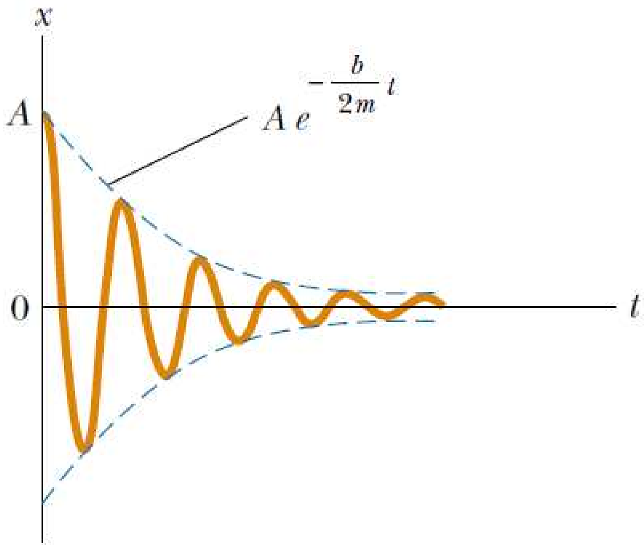
$$\lambda_\pm = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

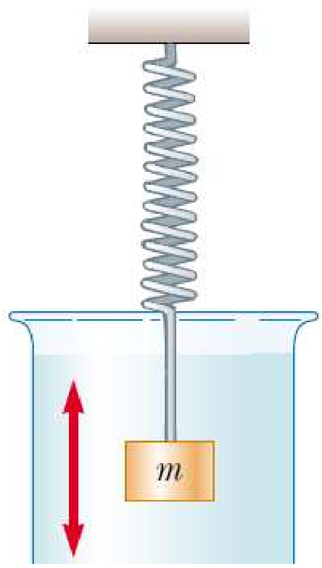
Solución general:

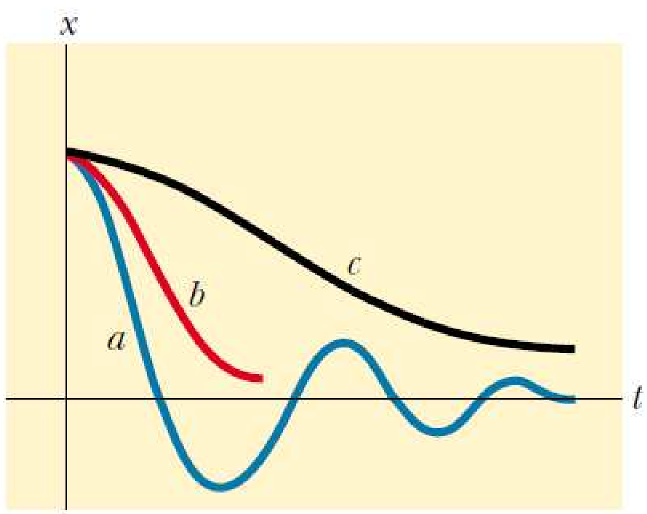
$$x = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = \quad e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A_+ e^{i\sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}\,t} + A_- e^{-i\sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}\,t} \right)$$

$$x = A \quad e^{-\frac{b}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

La amplitud decrece exponencialmente.







(a) $\frac{b^2}{4m^2} < \omega_0^2$ (b) $\frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2$ (c) $\frac{b^2}{4m^2} > \omega_0^2$

Ejemplo 5. Mostrar que la razón de cambio temporal de la energía mecánica de un oscilador amortiguado es:

$$\dot{E} = -bv^2$$

Es siempre negativa.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ \dot{E} &= m\,v\,\dot{v} + m\omega^2 x\,v \\ \ddot{x} &= -\frac{b}{m}\,\dot{x} - \omega_0^2 x \\ \dot{E} = m\,v\left(-\frac{b}{m}\,\dot{x} - \omega_0^2 x\right) + m\omega_0^2 x\,v &= \\ &-bv^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se suelta de un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1 000 s, su amplitud se reduce por la fricción a 5.50°. Calcule $b/2m$.

$$\theta = A\quad e^{-\frac{b}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}, \phi = \pi/2$$

$$\theta = A\quad e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\omega t\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \theta_0 = A, A_f = \mathrm{A}e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$\frac{A_f}{A} = e^{-\frac{b}{2m}t} = 0.37 \qquad , \frac{b}{2m} = 10^{-3}$$

Oscilador armónico forzado

$$F(t) = F_{\text{ext}} \cos(\omega t)$$

Segunda ley de Newton:

$m\,\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x} + F_{\text{ext}}\cos(\omega t)$, $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m}\cos(\omega t)$

Solución particular de la ecuación anterior:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_{\text{ext}}}{m} e^{i\omega t}$$

$$x = A\,e^{i\omega t}$$

$$A\left(-\omega^2 + \frac{b}{m} i\omega + \omega_0^2\right) e^{i\omega t} = \frac{F_{\text{ext}}}{m} e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{F_{\text{ext}}/m}{-\omega^2 + \frac{b}{m} i\omega + \omega_0^2}$$

$$-\omega^2 + \frac{b}{m} i\omega + \omega_0^2 = R\,e^{i\phi}$$

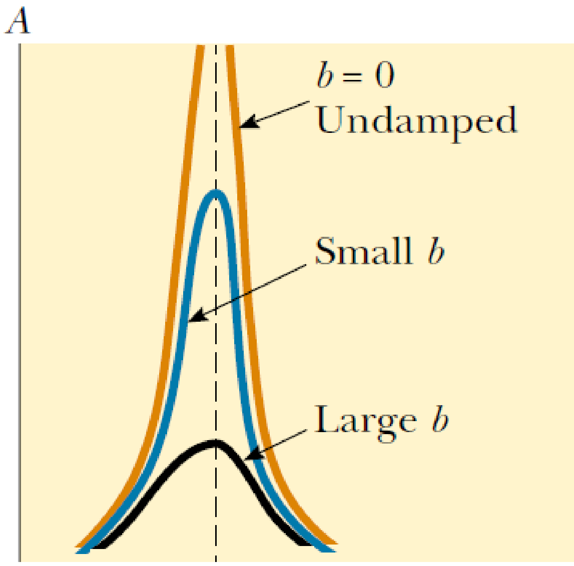
$$R = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\frac{b\omega}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = \frac{F_{\text{ext}}}{m\,R} e^{i\phi}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}(y(t)) = \frac{F_{\text{ext}}}{m\,R}\cos(\omega t + \phi)$$

La amplitud crece fuertemente para $\omega = \omega_0$. RESONANCIA



Amplitud versus frecuencia para un oscilador amortiguado cuando se aplica una fuerza periódica. Cuando la frecuencia ω de la fuerza externa iguala la frecuencia natural del oscilador ω_0, ocurre la resonancia. Note que la forma de la curva de resonancia depende del factor de amortiguamiento b.

Ejemplo 7. Una niña disfruta saltando en su cuna. Tiene masa 12.5 kg, y el colchón de la cuna puede ser modelado por un resorte de constante de fuerza 4.30 kN/m.
(a) La niña pronto aprende a saltar con amplitud máxima y mínimo esfuerzo doblando sus rodillas con qué frecuencia?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4300}{12.5}} = 18.55 \mathrm{rad}/s$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2.95\,\mathrm{Hz,frecuencia\,de\,resonancia}$$

Nota 8. Considerando la gravedad se tiene

$$m\,\ddot{x} = -kx - mg,\, y = x - \frac{mg}{k}$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\, y$$

Así que la frecuencia natural de oscilación no cambia.

(b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín, perdiendo contacto con él por intervalos en cada ciclo, cuando su amplitud excede qué valor?
La máxima compresión del colchón es tal que la fuerza elástica iguala el peso de la niña. Esta es la amplitud máxima de oscilación del colchón:

$$A = \frac{mg}{k}$$

Ejemplo 9. Una masa de 2.00-kg atada a un resorte se mueve bajo la acción de una fuerza externa $F = (3.00\,N)$ cos $(2\pi t)$. Si la constante del resorte es 20.0 N/m, determine
(a) el período

$$T = 1s$$

(b) La amplitud del movimiento
Indic. : Suponga que no hay roce.

$$A = \frac{F_{\text{ext}}}{m\,R}, \quad R = |\omega_0^2 - \omega^2| = (-10 + 6.28^2) = 29.44\,s^{-2}$$
$$A = 0.05\,m$$

PUENTE DE TACOMAVIDEO

Principio de superposición

Una propiedad importante del oscilador armónico es que las soluciones son aditivas:

Si $x_1(t)$ es el movimiento bajo la acción de la fuerza impulsora $F_1(t)$, y $x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza impulsora $F_2(t)$, entonces $x_1(t)+x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza combinada $F_1(t)+F_2(t)$. Esta propie- dad se deduce directamente de la ecuación del movimiento, por ser ésta lineal en x.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+b\,\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)(x_1+x_2)=\left(\frac{d^2}{dt^2}+b\,\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_1+\left(\frac{d^2}{dt^2}+b\,\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_2=F_1+F_2$$