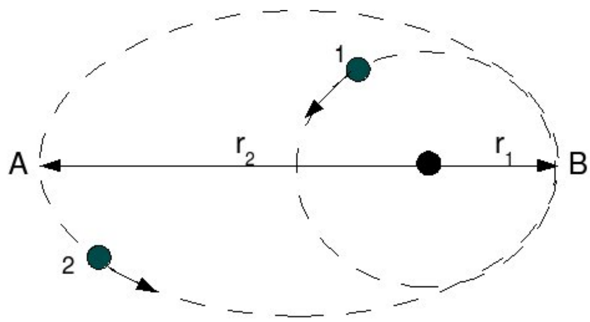
# Ejercicios resueltos

Boletín 1

Leyes de Kepler y Ley de gravitación universal

## Ejercicio 1

Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $r_1 = 10^8$ km con un periodo de rotación $T_1 = 2$ años, mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es $r_1 = 10^8$ km y la más alejada es $r_2 = 1{,}8 \cdot 10^8$ km tal y como muestra la figura. ¿Cuál es el periodo de rotación del planeta 2?




## Solución 1

Para un objeto que recorre una órbita elíptica su distancia media al astro central coincide con el valor del semieje mayor de la elipse.

De la figura adjunta se deduce que la distancia media del planeta 2 a la estrella es:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{10^8 + 1{,}8 \cdot 10^8}{2} = 1{,}4 \cdot 10^8 \text{km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r^3}$$

Y sustituyendo:

$$\frac{2^2}{(10^8)^3} = \frac{T_2^2}{(1{,}4 \cdot 10^8)^3}$$

Despejando el periodo de rotación del planeta 2 es: $T_2 = 3{,}3$ años.

# Ejercicio 2

Calcula la masa del Sol, considerando que la Tierra describe una órbita circular de 150 millones de kilómetros de radio.

# Solución 2

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de traslación de la Tierra, se cumple que:

$$F = m_T \cdot a_N$$

$$G \cdot \frac{m_S \cdot m_T}{r^2} = m_T \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{m_S}{r} = v^2$$

Sustituyendo la velocidad de la Tierra por su relación con el periodo de traslación, se tiene:

$$G \cdot \frac{m_S}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

$$m_S = \frac{4 \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

El periodo es (tomando el año como 365,25 días): $T = 3{,}156 \cdot 10^7$ s

Sustituyendo:

$$m_S = \frac{4 \cdot \pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(150 \cdot 10^9)^3}{(3{,}156 \cdot 10^7)^2} = 2{,}01 \cdot 10^{30} \mathrm{km}$$

# Ejercicio 3

La masa de la Luna es 1/81 de la masa de la Tierra y su radio es 1/4 del radio de la Tierra. Calcula lo que pesará en la superficie de la Luna una persona que tiene una masa de 70 kg.

# Solución 3

Aplicando la ley de gravitación universal en la superficie de la Luna, se tiene:

$$P_L = G \cdot \frac{m_L \cdot m}{R_L^2} = G \cdot \frac{(m_T/81) \cdot m}{(R_T/4)^2} = \frac{16}{81} \cdot \frac{G \cdot m_T}{R_T^2} \cdot m = \frac{16}{81} \cdot g_{0,T} \cdot m$$

Sustituyendo:

$$P_L = \frac{16}{81} \cdot 9{,}8 \cdot 70 = 135{,}5 \mathrm{N}$$

# Ejercicio 4

Expresa en función del radio de la Tierra, a qué distancia de la misma un objeto que tiene una masa de 1 kg pesará 1 N.

## Solución 4

Aplicando la ley de gravitación universal:

$$P = F_{T,obj} = G \cdot \frac{m_T \cdot m}{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot m_T \cdot m}{P}}$$

Aplicando la relación:

$$g_0 = G \cdot \frac{m_T}{R_T^2}$$

$G \cdot m_T = g_0 \cdot R_T^2$, se tiene:

$$r = \sqrt{g_0 \cdot R_T^2 \cdot \frac{m}{P}} = R_T \cdot \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 1}{1}} = 3{,}13 \cdot R_T$$

## Ejercicio 5

Calcula el momento angular de la Tierra respecto al centro del Sol, despreciando el movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma y considerando a la órbita de la Tierra como circular. Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r_{órbita} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km

## Solución 5

La velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 30 \text{ km/s}$$

Considerando a la Tierra y al Sol como objetos puntuales y suponiendo que la órbita de la Tierra es circular alrededor del Sol, entonces el vector de posición y el vector velocidad de la Tierra respecto al Sol son siempre perpendiculares. Por tanto, el momento angular de la Tierra respecto del Sol es un vector perpendicular al plano de la órbita del planeta, cuyo módulo es:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v \cdot \sin 90^\circ = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^4 = 2{,}7 \cdot 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{ m}^2/\text{ s}$$

## Ejercicio 6

La Tierra en su perihelio está a una distancia de 147 millones de kilómetros del Sol y lleva una velocidad de 30,3 km/s. ¿Cuál es la velocidad de la Tierra en su afelio, si dista 152 millones de kilómetros del Sol?

## Solución 6

La dirección de la fuerza con la que actúa el Sol sobre la Tierra coincide con la dirección del vector de posición de la Tierra respecto del Sol, por lo que el momento angular de la Tierra respecto del Sol permanece constante a lo largo de toda la trayectoria.

$$\vec{L}_{perihelio} = \vec{L}_{afelio}$$

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular a la velocidad, se tiene:

$$\vec{r}_p \times m \cdot \vec{v}_p = \vec{r}_a \times m \cdot \vec{v}_a$$

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

Sustituyendo:

$$147 \cdot 10^6 \cdot 30{,}3 = 152 \cdot 10^6 \cdot v_a$$

$$v_a = 29{,}3 \text{ km/s}$$

# Ejercicio 7

Calcula el periodo de la estación espacial internacional (ISS), sabiendo que gira en una órbita situada a una distancia media de 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9{,}8$ m/s$^2$

# Solución 7

El radio de la órbita es: $r = R_T + 400 \text{ km} = 6370 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3 = 6{,}77 \cdot 10^6$ m.
Aplicando la segunda ley de Newton y considerando la órbita circular, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m_{ISS} \cdot \vec{a}_N$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m_{ISS}}{r^2} = m_{ISS} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como

$$g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$$

se tiene que el periodo es:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(6{,}77 \cdot 10^6)^3}{9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}} = 5{,}6 \cdot 10^3 \text{ s} = 93 \text{ min}$$

# Ejercicio 8

Un satélite artificial se dice que es geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra. ¿A qué altura están los satélites geoestacionarios? ¿Cuál es el momento angular respecto del centro de la Tierra de un satélite geoestacionario de 500 kg de masa? ¿Puede haber satélites geoestacionarios en la vertical de un punto de España? Datos: $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9{,}8$ m/s$^2$

# Solución 8

Para que un satélite sea geoestacionario su periodo de revolución tiene que ser el mismo que el de la Tierra: $T = 24$ h.

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio $r$, y como

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

se tiene:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{m_T}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y operando:

$$g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$$

queda:

$$r^3 = \frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Sustituyendo y como $T = 8{,}6 \cdot 10^4$ s, se tiene:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42200 \text{ km}$$

La altura del satélite sobre la superficie de la Tierra es:

$$h = r - R_T = 42200 - 6370 = 35830 \text{ km} 36000 \text{ km}$$

La órbita geoestacionaria está situada sobre el ecuador, por lo que el momento angular del satélite es un vector perpendicular al plano del ecuador terrestre.

La velocidad del satélite es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4{,}22 \cdot 10^7}{8{,}64 \cdot 10^4} = 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Como los vectores de posición y velocidad del satélite son perpendiculares, su módulo es:

$$|\vec{L}_0| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v = 4{,}22 \cdot 10^7 \cdot 500 \cdot 3{,}07 \cdot 10^3 = 6{,}48 \cdot 10^13 \text{ kg·m}^2/\text{s}$$

Para que una órbita sea estable debe pasar por el centro de la Tierra, ya que en caso contrario la dirección del vector fuerza y del vector de posición del satélite respecto del centro de la órbita no son paralelos y el momento angular del satélite respecto del centro de la órbita no se conserva.

Para que el satélite sea geoestacionario su periodo tiene que ser el mismo que el de la Tierra. Por Tanto, un satélite geoestacionario está en la vertical de un punto del ecuador terrestre, no puede estar situado sobre la vecrtical de un punto de España, ni de ningún lugar fuera de la línea ecuatorial.