

# I1: Ondas y Calor (FIS1522 y FIZ1250)

15 de Septiembre de 2004

No olvide poner su nombre en cada una de las hojas que entregue.

NOMBRE.....

SECCION.....

TIEMPO: 2 horas.

No usar apuntes ni calculadoras. NO CONSULTE A LOS AYUDANTES.  
Si Ud. tiene nota P, por lo que no figura en la lista, indíquelo junto a su nombre.

**NO USE LAPIZ A MINA. SI LO HACE NO TENDRA DERECHO A RECLAMO**

Justifique bien sus afirmaciones

---

## Problema 1

Suponga que la atmósfera de la Tierra es un gas ideal con peso molecular  $\mu$  y el campo gravitacional de la Tierra es uniforme y produce una aceleración  $g$ .

a) Muestre que la presión  $p$  varía como:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

donde  $z$  es la altura sobre el nivel del mar,  $T$  es la temperatura y  $R$  es la constante universal de los gases.(3 pts)

b) Suponga que la variación de la presión con la altura se debe a una expansión adiabática. Muestre que:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

$\gamma = C_P/C_V$ .(3 pts)

- c) Encuentre  $dT/dz$  para una atmósfera hecha solamente de  $N_2$  con  $\gamma = 1,4$ . (3 pts)
- d) Suponga que la atmósfera es isotérmica con temperatura  $T$ . Encuentre  $p(z)$  como función de  $T$  y  $p_0$  (la presión a nivel del mar). (3 pts)
- e) Suponga que al nivel del mar la temperatura es  $T_0$  y la presión es  $p_0$ . Encuentre  $p(z)$  para una atmósfera adiabática. (3 pts)

Solución:

(a) Equilibrio mecánico implica que:  $dp = -n\mu g dz$ , donde  $n$  es el número de moles por unidad de volumen. La ecuación de estado del gas ideal es:  $p = nRT$ . Luego, despejando  $n$ , se llega al resultado pedido.

(b) El proceso adiabático satisface  $T^{1-\gamma} p = \text{constante}$ . Diferenciando y factorizando se llega a  $\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{dT}{T}$ .

(c) Comparando (a) y (b) se tiene que:  $\frac{dT}{dz} = (\frac{1}{\gamma} - 1) \frac{\mu g}{R}$ . Para  $\gamma = 1,4$  da  $\frac{dT}{dz} \sim -4,7 K/Km$ .

(d) De (a) se tiene que:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)$$

(e) De (a) y (b) se tiene

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

y

$$T^{1-\gamma} p = T_0^{1-\gamma} p_0$$

Luego:

$$p^{-1/\gamma} dp = -\frac{\mu g}{RT_0} p_0^{1-1/\gamma} dz$$

Integrando se llega a:

$$p(z) = p_0 \left[1 - \frac{\mu g}{RT_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) z\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Este resultado vale sólo si  $z < \frac{RT_0 \gamma}{\mu g (\gamma-1)}$ .

## Problema 2

Se mezclan adiabáticamente 900 g de hielo a  $0^\circ\text{C}$  ( $L_{\text{fus}} = 333 \text{ KJ/Kg}$ ) con 2 litros de agua a  $23^\circ\text{C}$  ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $c = 4186 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$ ).

- (a) ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio? (5 pts)  
 (b) Determine la variación total de entropía. (10 pts)

**Solución:**

(a) Como 2 litros = 2000 cm<sup>3</sup>, la masa de agua es  $m_a = 2000 \times 1 = 2000$  g = 2 Kg. El calor que puede ceder esta masa de agua (suponiendo que esta se enfria hasta los 0°C) es  $m_a c \Delta T = 2 \times 4186 \times (23 - 0) = 192,6 \times 10^3$  J. El calor necesario para fundir toda la masa de hielo es  $m_h L_{\text{fus}} = 0,900 \times 333 \times 10^3 = 299,7 \times 10^3$  J. Así se concluye que no todo el hielo se fundió y la temperatura final de equilibrio es 0°C.

(b) La variación total de entropía es la suma del cambio de entropía del agua mas del hielo que se fundió. La temperatura inicial y final del agua en grados Kelvin son  $T_1 = 273 + 23 = 296$  K y  $T_2 = 273 + 0 = 273$  K. Como  $dQ = m_a c dT$  el cambio de entropía del agua vale

$$\begin{aligned} \Delta S_a &= \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m_a c dT}{T} = m_a c \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \\ &= 2 \times 4186 \ln \left( \frac{273}{296} \right) = -677 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned}$$

El calor que absorbio el hielo en el proceso es igual al calor que cedió el agua. Ya que la temperatura del hielo se mantiene constante, la variación de entropía es

$$\Delta S_h = \frac{Q}{T_2} = \frac{192,6 \times 10^3}{273} = 705 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

y por lo tanto  $\Delta S_{\text{total}} = -677 + 705 = 28$  J/K.

### Problema 3

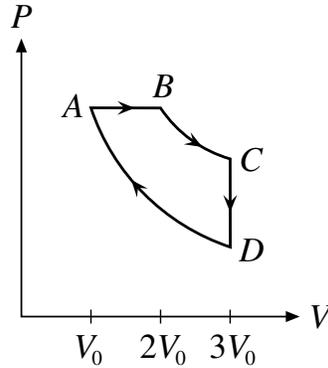
---

Un gas diatómico ideal ( $C_V = 5R/2$ ) compuesto por  $n$  moles realiza el ciclo mostrado en la Figura, donde  $A \rightarrow B$  es un proceso isobárico,  $B \rightarrow C$  es isotérmico,  $C \rightarrow D$  es isocórico y  $D \rightarrow A$  es adiabático. Si en el punto  $A$  la presión vale  $P_0$  y la temperatura  $T_0$ , determine:

- (a) Las temperaturas en  $B$ ,  $C$  y  $D$  como función de  $T_0$ . (3 pts)  
 (b) Las presiones en  $B$ ,  $C$  y  $D$  como función de  $P_0$ . (3 pts)

(c) Las variaciones de energía interna, los trabajos externos realizados sobre el gas, los calores absorbidos y el cambio de entropía en cada uno de los tramos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , todos como función de  $nRT_0$ . (6 pts)

(d) La eficiencia del ciclo. (3 pts)



**Solución:**

(a) Como el proceso  $A \rightarrow B$  es isobárico, de la ley de los gases ideales se concluye que para  $P = \text{const}$  se tiene  $T \propto V$ , o sea,

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} \quad , \quad T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = \frac{2V_0}{V_0} T_0 = 2T_0$$

El proceso  $B \rightarrow C$  es isotérmico y  $T_C = T_B = 2T_0$ .

Finalmente como  $D \rightarrow A$  es adiabático vale la relación  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ , donde  $\gamma = 1 + R/C_V = 1 + 2/5 = 1,4$ . Luego

$$T_D V_D^{1,4-1} = T_A V_A^{1,4-1}$$

$$T_D = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{0,4} T_A = \left(\frac{V_0}{3V_0}\right)^{0,4} T_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} T_0 = 0,6444 T_0$$

(b) El tramo  $A \rightarrow B$  es isobárico y por lo tanto  $P_B = P_A = P_0$ .

Ya que  $B \rightarrow C$  es isotérmico  $P \propto 1/V$

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{1/V_C}{1/V_B} = \frac{V_B}{V_C} \quad , \quad P_C = \frac{V_B}{V_C} P_B = \frac{2V_0}{3V_0} P_0 = \frac{2}{3} P_0$$

Como  $D \rightarrow A$  es adiabático vale la ecuación  $PV^\gamma = \text{const}$

$$P_D V_D^{1,4} = P_A V_A^{1,4}$$

$$P_D = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{1,4} P_A = \left(\frac{V_0}{3V_0}\right)^{1,4} P_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} P_0 = 0,2148 P_0$$

(c) Las variaciones de energía se calculan a partir de las variaciones de temperatura con la fórmula  $\Delta E_{\text{int}} = n C_V \Delta T$ . Así

$$\Delta E_{\text{int},AB} = n C_V (T_B - T_A) = n \frac{5R}{2} (2T_0 - T_0) = 2,5 nRT_0$$

$$\Delta E_{\text{int},BC} = n C_V (T_C - T_B) = n \frac{5R}{2} (2T_0 - 2T_0) = 0$$

$$\Delta E_{\text{int},CD} = n C_V (T_D - T_C) = n \frac{5R}{2} (0,6444 T_0 - 2T_0) = -3,389 nRT_0$$

$$\Delta E_{\text{int},DA} = n C_V (T_A - T_D) = n \frac{5R}{2} (T_0 - 0,6444 T_0) = 0,889 nRT_0$$

Los trabajos externos se obtienen calculando las siguientes integrales

$$\begin{aligned} W_{\text{ext},AB} &= \int_{V_A}^{V_B} -P dV = \int_{V_0}^{2V_0} -P_0 dV = -P_0 (2V_0 - V_0) = -P_0 V_0 \\ &= -nRT_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{ext},BC} &= \int_{V_B}^{V_C} -P dV = \int_{2V_0}^{3V_0} -\frac{nR 2T_0}{V} dV = -2 nRT_0 \ln \left( \frac{3V_0}{2V_0} \right) \\ &= -0,811 nRT_0 \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext},CD} = \int_{V_C}^{V_D} -P dV = \int_{3V_0}^{3V_0} -P dV = 0$$

$$\begin{aligned} W_{\text{ext},DA} &= \int_{V_D}^{V_A} -P dV = \int_{3V_0}^{V_0} -P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma dV = -P_0 V_0^\gamma \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_{3V_0}^{V_0} \\ &= \frac{P_0 V_0^\gamma}{\gamma-1} [V_0^{1-\gamma} - (3V_0)^{1-\gamma}] = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} [1 - 3^{1-\gamma}] \\ &= \frac{nRT_0}{0,4} [1 - 3^{-0,4}] = 0,889 nRT_0 \end{aligned}$$

Los calores absorbidos se calculan con la primera ley  $Q = \Delta E_{\text{int}} - W_{\text{ext}}$

$$Q_{AB} = \Delta E_{\text{int},AB} - W_{\text{ext},AB} = 2,5 nRT_0 + nRT_0 = 3,5 nRT_0$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{\text{int},BC} - W_{\text{ext},BC} = 0 + 0,811 nRT_0 = 0,811 nRT_0$$

$$Q_{CD} = \Delta E_{\text{int},CD} - W_{\text{ext},CD} = -3,389 nRT_0 - 0 = -3,389 nRT_0$$

$$Q_{DA} = \Delta E_{\text{int},DA} - W_{\text{ext},DA} = 0,889 nRT_0 - 0,889 nRT_0 = 0$$

El proceso  $A \rightarrow B$  es isobárico, de tal forma que  $dQ = n C_P dT = n (C_V + R) dT$  y la variación de entropía vale

$$\begin{aligned}\Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{n (C_V + R) dT}{T} = n \left( \frac{5R}{2} + R \right) \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) \\ &= n \frac{7R}{2} \ln \left( \frac{2T_0}{T_0} \right) = 2,426 nR\end{aligned}$$

El proceso  $B \rightarrow C$  es isotérmico y como la energía interna del gas ideal depende solamente de la temperatura  $dE_{\text{int}} = 0 = dQ + dW_{\text{ext}}$ , o sea,  $dQ = -dW_{\text{ext}} = P dV$ . De esta forma

$$\begin{aligned}\Delta S_{BC} &= \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{V_B}^{V_C} \frac{P dV}{T} = \int_{2V_0}^{3V_0} \frac{nR}{V} dV = nR \ln \left( \frac{3V_0}{2V_0} \right) \\ &= 0,405 nR\end{aligned}$$

El tramo  $C \rightarrow D$  es a volumen constante y  $dQ = n C_V dT$

$$\begin{aligned}\Delta S_{CD} &= \int_C^D \frac{dQ}{T} = \int_{T_C}^{T_D} \frac{n C_V dT}{T} = n \frac{5R}{2} \ln \left( \frac{T_D}{T_C} \right) \\ &= \frac{5}{2} nR \ln \left( \frac{0,6444 T_0}{2 T_0} \right) = -2,381 nR\end{aligned}$$

Finalmente el proceso  $D \rightarrow A$  es adiabático y  $dQ = 0$

$$\Delta S_{DA} = \int_D^A \frac{dQ}{T} = 0$$

(d) Del ítem c se tiene que  $Q_{AB} > 0$ ,  $Q_{BC} > 0$ ,  $Q_{CD} < 0$  y  $Q_{DA} = 0$ . Luego el calor que entra vale

$Q_{\text{in}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3,5 nRT_0 + 0,811 nRT_0 = 4,311 nRT_0$  y el calor que sale  $Q_{\text{out}} = |Q_{CD}| = 3,389 nRT_0$ . Con esto la eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{3,389 nRT_0}{4,311 nRT_0} = 0,214 = 21,4 \%$$