Fuerzas Electromagnéticas

La fuerza eléctrica entre dos cargas q_1 y q_2 , separadas por una distancia r es

$$F_{12} = K\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\widehat{r_{12}}$$

$K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, $\widehat{r_{12}}$ es el vector unitario con origen en la partícula 1 y que apunta a la partícula 2. La carga eléctrica se mide en Coulombs (C).Dado que las cargas pueden ser positivas o negativas, la fuerza puede ser repulsiva, para cargas de igual signo o atractiva, para cargas de signo opuesto.
La energía potencial electrostática está dada por:

$$U = K\frac{q_1 q_2}{r}$$

Resulta tremendamente conveniente introducir el concepto de Campo Eléctrico $\vec{E}$. Consideremos una carga Q en el origen. El campo eléctrico creado por la carga Q en cualquier punto $\vec{r}$ es:

$$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

De esta manera, la fuerza que ejerce el campo eléctrico sobre una carga q situada en $\vec{r}$ es

$$\vec{F}_q = q\vec{E}$$

lo que coincide con la ley de Coulomb. El campo eléctrico se mide en N/C

Asociado al campo eléctrico, se introduce el potencial electrostático φ, tal que $U = q\varphi$. Para una carga Q , se tiene

$$\varphi(r) = K\frac{Q}{r}$$

El potencial electrostático se mide en volts. $1V(\mathrm{olt}) = 1J/C$.

Campo magnético

El movimiento de cargas eléctricas da origen a un campo magnético $\vec{B}$. El campo magnético produce una fuerza sobre una carga eléctrica en movimiento dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

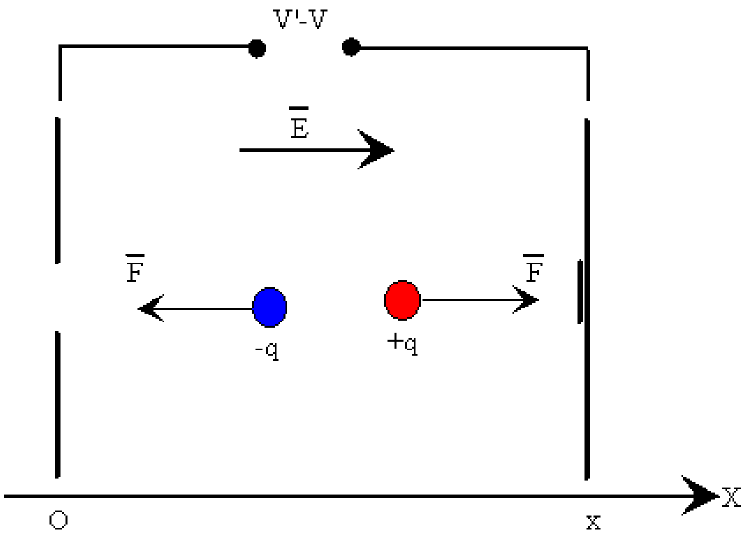
$\vec{v}$ es la velocidad de la carga q.

La presencia de un campo eléctrico y otro magnético da lugar a la llamada Fuerza de Lorentz, que es válida aún en Relatividad Especial:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico

constante y uniforme



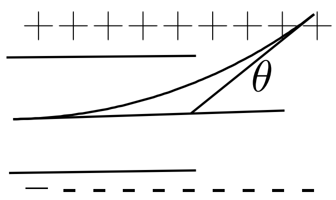
La fuerza sobre una carga q de masa m en un campo eléctrico E uniforme en el espacio y constante en el tiempo es:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = q\,\vec{E}$$
$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\,\vec{E}$$
$$\vec{v} = \frac{q}{m}\,\vec{E}t + \vec{v}_0$$
$$\vec{x} = \frac{q}{2m}\,\vec{E}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

EJEMPLO Aceleración longitudinal de un protón. Partiendo del reposo se acelera un protón durante un nanosegundo ($= 10^{-9}$ s) mediante un campo eléctrico E=1 statvolt/cm. Cuál es su velocidad final?
1 statvoltio/cm = 3×10^4V/m

R:2.4×10^5cm/s

EJEMPLO Aceleración transversal de un electrón. Después de abandonar el campo acelerador del ejemplo precedente, el haz electrónico entra en una región de longitud L=l cm en la que existe un campo deflector transversal E= -0,1 statvolt/cm. Qué ángulo formará con el eje x el haz al abandonar la región deflectora? Obsérvese que esto es semejante al lanzamiento horizontal de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre.



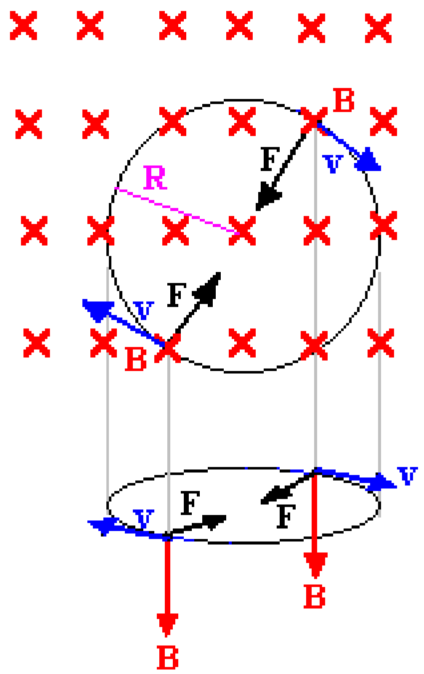
$$v_x T = L$$

$$T = \frac{L}{v_x} = 10^{-9} s$$

$$v_y = -\frac{eE}{m} T = 5 \times 10^7 \mathrm{cm}/s$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg} 0.05 \simeq 0.05 \mathrm{rad} = 3^\circ$$

EJEMPLO Campo Magnético Uniforme



Si el campo magnético es uniforme, podemos ver que

$$m\frac{d\,\vec{v}}{d\,t}\cdot\vec{v}=q\,(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}=0,$$

lo cual equivale a:

$$\frac{d}{d\,t}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})=0.$$

Por lo tanto, un canpo magnético uniforme no cambia la energía cinética de la partícula. El campo magnético no realiza trabajo sobre ella.

Por componentes (cartesianas), las ecuaciones de movimiento son (se ha definido como eje z, al eje del campo magnético)

Llamando $\omega_c = q \quad B/m$(frecuencia ciclotrón), la solución del sistema tiene la forma:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= A\sin(\omega_c t + \phi) \\ v_y(t) &= A\cos(\omega_c t + \phi) \\ v_z(t) &= v_{0z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{A}{\omega_c}\cos(\omega_c t + \phi) + x_0 \\ y(t) &= \frac{A}{\omega_c}\,\mathrm{sen}(\omega_c t + \phi) + y_0 \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned}$$

de donde se ve que la trayectoria es una helice de paso $h = v_{0z}T$, en que $T = 2\ \pi/\omega_c$ es el período del movimiento circular en torno a la dirección del campo magnético.

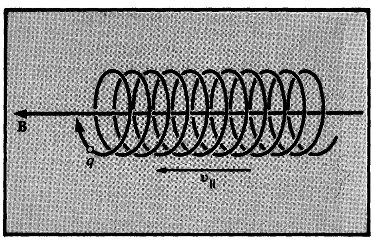


FIG. 3.8 Una carga positiva q describe una hélice de paso constante en un campo magnético uniforme **B**. La componente de la velocidad $v_{\parallel}$ paralela a **B** es una constante. Si $\mathbf{B} = B_z\hat{\mathbf{z}}$, $v_{\parallel} = v_z$.

Si $v_{0z} = 0$, el movimiento es planar. En este caso se tiene que:

La aceleración normal tiene módulo

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{q}{m} vB$$

De aquí se deduce que la partícula se mueve con radio de curvatura constante.

$$R = \frac{m v_0}{qB}$$

Una trayectoria plana de radio constante es una circunferencia. El radio de esta circunferencia se denomina radio de Larmor.

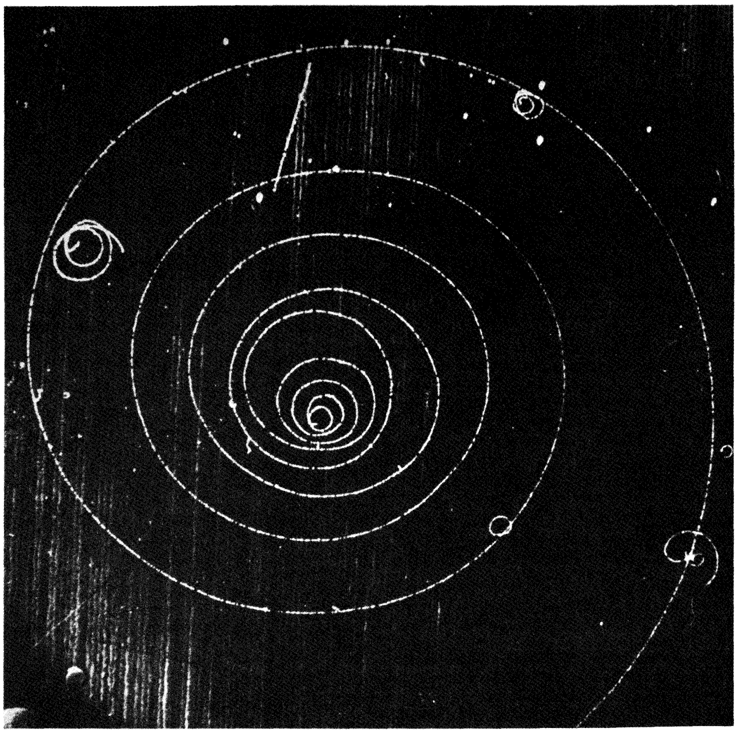


FIG. 3.9 Fotografía de la trayectoria de un electrón rápido en un campo magnético obtenida en una cámara de burbujas de hidrógeno. El electrón entra por la parte inferior izquierda y se va frenando al perder energía por ionización de las moléculas de hidrógeno. Al disminuir el electrón su velocidad, decrece su radio de curvatura en el campo magnético y de aquí que la órbita sea una espiral. *(Lawrence Radiation Laboratory.)*