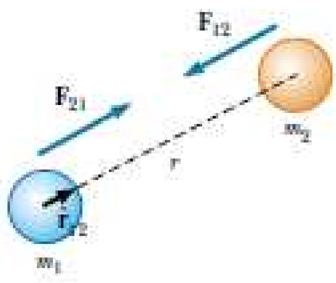
Ley de Gravitación Universal

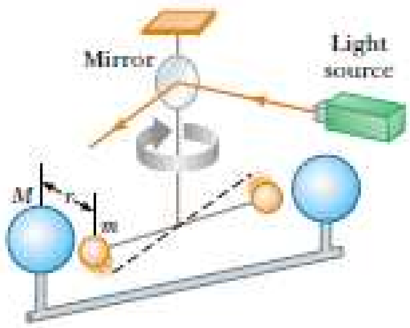
La fuerza gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r es

$$F_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{r_{12}}$$

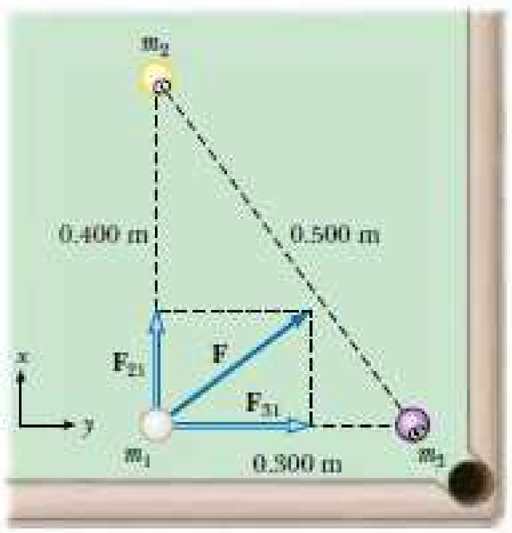
$G = 6.67 \times 10^{-11} N m^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación de Newton, $\widehat{r_{12}}$ es el vector unitario con origen en la partícula 1 y que apunta a la partícula 2.



Balanza de Cavendish



Ejemplo 1. 3 bolas de billar de 0.300-kg se ponen sobre una mesa en las posiciones que muestra la figura. Calcule la fuerza gravitacional sobre m_1 debida a las otras bolas.



$$F_x = 6.67 \times 10^{-11} \times 0.09/0.09 = 6.67 \times 10^{-11}$$
$$F_y = 6.67 \times 10^{-11} \times 0.09/0.16 = 3.75 \times 10^{-11}$$

Variación de la aceleración de gravedad

con la altura

$$mg = \frac{GMm}{(R_T + h)^2}$$

$$g(h) = \frac{GM}{(R_T + h)^2}$$

Ejemplo 2. Densidad de la Tierra.

Sabiendo que $g = 9.8m/s^2$, encuentre la densidad de la Tierra

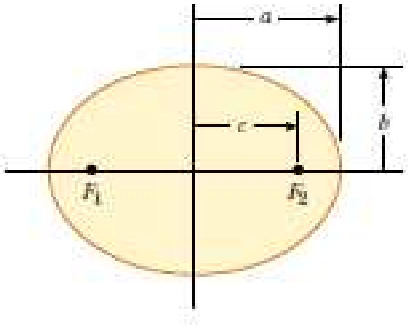
$$g = \frac{GM}{R_T^2}, \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3g}{4\pi G R_T} \quad , R_T = 6.4 \times 10^6 m$$

$$\rho = \frac{3x9.8}{4x3.14x6.67x10^{-11}x6,4x10^6} = \frac{29.4}{5.35}x10^3 = 5.5x10^3 \text{kg}/m^3$$

Leyes de Kepler

A partir de la ley de Gravitación y de las leyes de la mecánica se obtienen las leyes de Kepler del movimiento planetario:

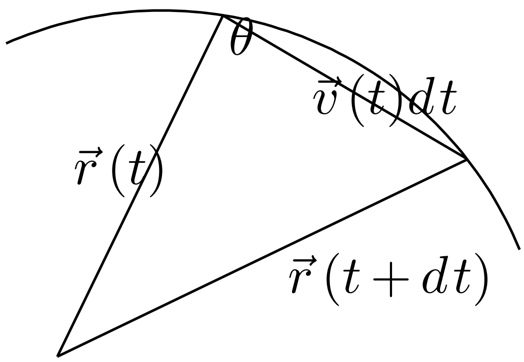
1) Los planetas se mueven en elipses, con el Sol en uno de los focos.



2) La línea que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley se deduce de la conservación del momentum angular $\vec{L}$, lo cual se deriva del carácter central de la fuerza:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{constante}$$

Se tiene:



$$dA = \frac{1}{2} r(t) v(t) \operatorname{sen}\theta\, dt. \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)| = \text{constante}$$

3)El cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

Demostraremos esta ley para órbitas circulares:

La segunda ley de Newton da:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

pero $v = \frac{2\pi r}{T}$, donde T es el período. Se tiene:

$$\frac{4\pi^2}{GM} r^3 = T^2$$

La ley de gravitación y el movimiento de los planetas

aceleración de la Luna comparada con la aceleración g

$$\frac{a_L}{g} = \frac{(1/R_L)^2}{(1/R_E)^2} = \left(\frac{6.37 \times 10^6}{3.84 \times 10^8}\right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}$$

aceleración centrípeta de la Luna:

$$a_L = 2.7 \times 10^{-3} m/s^2$$

Cálculo directo:

$$a_L = \frac{v^2}{R_L} = \omega^2 R_L = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_L = 2.72 \times 10^{-3} m/s^2$$

Muy parecidas!

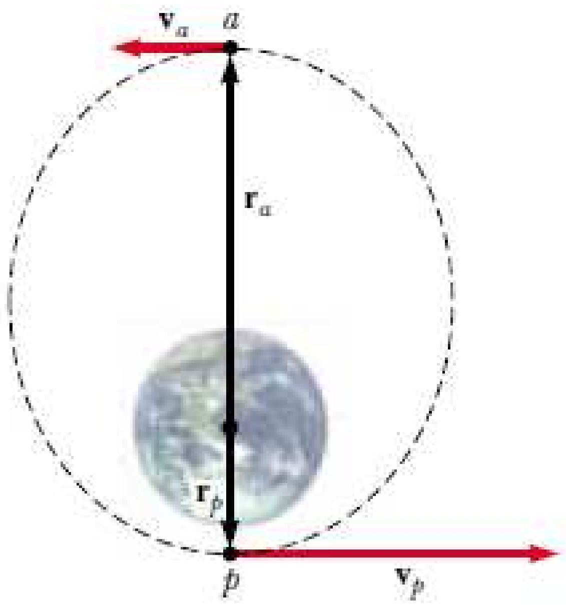
Ejemplo 3. Encuentre la masa del Sol, usando $T_T = 3.156 \times 10^7 s$,$D_T = 1.496 \times 10^{11} m$

$$\frac{4\pi^2}{GM} r^3 = T^2, M_S = \frac{4\pi^2}{GT_T^2} D_T^3$$

$$\frac{4x3.14^2 x1.5^3 x10^{33}}{6.7x10^{-11}3.2^2 10^{14}} = \frac{133.1}{68.6} x10^{30} = 1.9x10^{30}$$

R:1.99×10^{30}kg.

Ejemplo 4. Si la velocidad de un satélite en su apogeo es v_p, encuentre su velocidad en el perigeo v_p.



$$L_p = m v_p r_p = L_a = m v_a r_a$$
$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a$$

Campo gravitacional.

Partícula de prueba de masa m:

$$\vec{g} = \lim_{m \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{x})}{m}$$

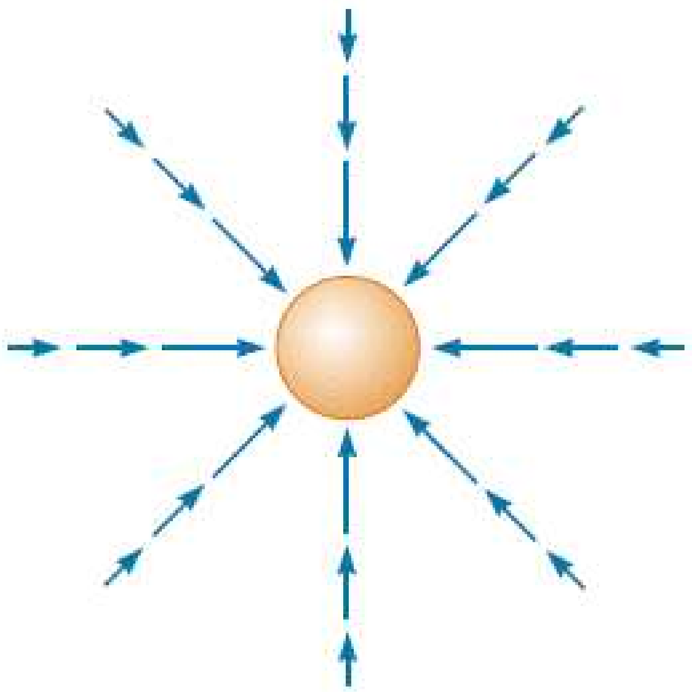
$\vec{g}$ es el campo gravitaciona en $\vec{x}$.

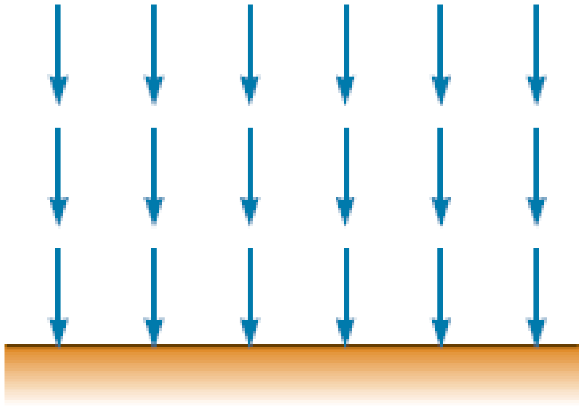
Conocido el campo gravitacional, se tiene:

$$\vec{F} = m\,\vec{g}$$

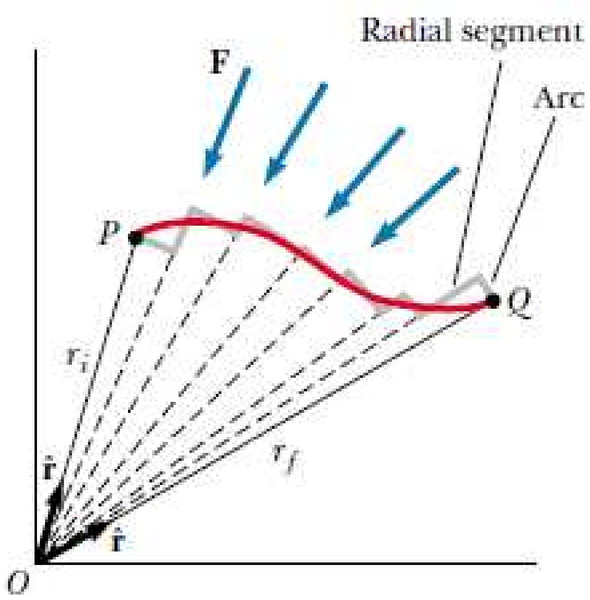
Campo gravitacional de una parícula de masa M:

$$\vec{g} = -G\,M\frac{\hat{r}}{r^2}$$





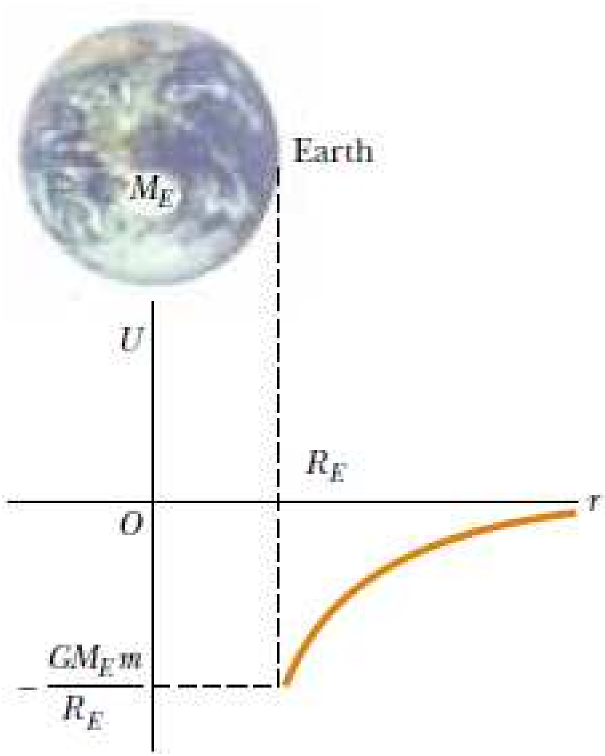
Energía potencial Gravitacional



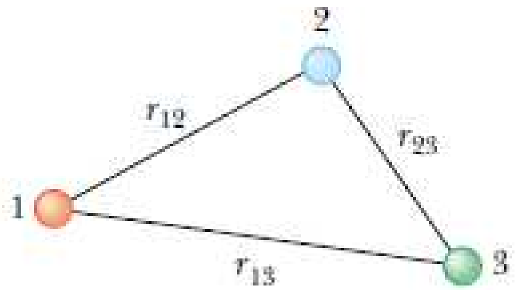
$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} dr\, F(r), F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

La energía potencial gravitacional está dada por:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}, U(\infty) = 0$$



Consideremos 3 partículas:



$$U_{\text{total}} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_{23}}{r_{23}}\right)$$

En general:

$$U = -G\int\int d^3x_1 d^3x_2 \frac{\rho(\vec{x}_1)\rho(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Ejemplo 5. Encuentre la energía potencial gravitacional para una partícula de masa m a una distancia y sobre la superficie de la Tierra.

Energía en el movimiento de planetas y satélites

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Para un sistema acotado $E < 0$.

Ejemplo 6. Movimiento circular

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{GmM}{r^2} \\ K = \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}\frac{GmM}{r} \\ E = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r} &= -K \end{aligned}$$

Ejemplo 7. El space shuttle libera un satélite de comunicaciones de 470 kg. en una órbita 280 km. sobre la superficie de la Tierra. Un cohete del satélite pone a éste en una órbita geosincrónica, tal que el satélite está siempre sobre el mismo punto de la Tierra. Cuánta energía tuvo que proveer el cohete?

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_i} \\ m\omega_T^2 r_f &= \frac{GmM}{r_f^2} \qquad r_f = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_T^2}} \\ E_f = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_f} &= \end{aligned}$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m \left(\frac{G\,M}{r_i} - \frac{G\,M}{r_f} \right) \qquad r_i = 6.65 \times 10^6 m$$

$$E_f - E_i = 1.19 \times 10^{10} J$$

Velocidad de escape

Consideremos un cuerpo celeste esférico de masa M y radio R. Si disparamos una partícula radialmente hacia afuera con velocidad v_0, se tiene la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$$

Si se impone que la partícula escape a $r = \infty$, debemos pedir que v sea cero en infinito. Por lo tanto $E = 0$. Esto es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}$$

v_0 es la velocidad de escape. Para la Tierra vale: $v_0 = 11.3\,\mathrm{km}/s$.

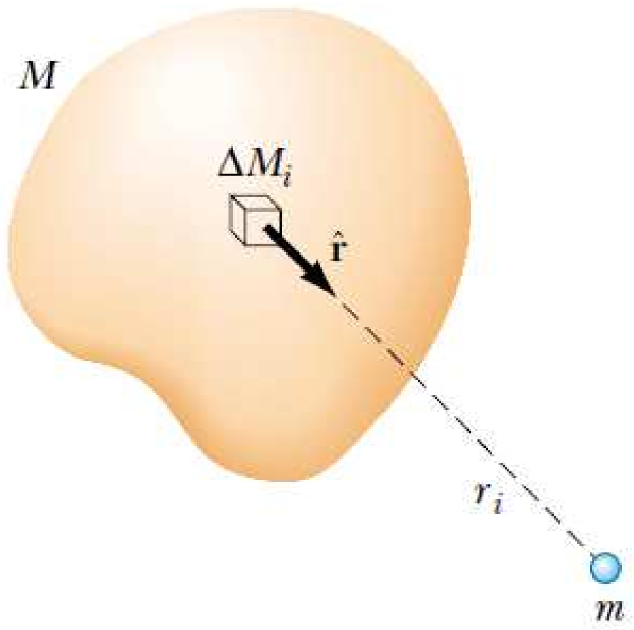
La velocidad de escape revistirá vital importancia cuando discutamos la posibilidad de atmósfera en un cuerpo celeste. Como veremos más adelante (distribución de velocidades de Maxwell), a una temperatura T dada, siempre existe una proporción de moléculas que supera la velocidad de escape y se va del cuerpo celeste. Esta fuga de moléculas se acentúa al aumentar la temperatura o al disminuir M y es particularmente relevante para moléculas de masa pequeña.

TABLE 14.3
Escape Speeds from the Surfaces of the Planets, Moon, and Sun

Body	v_{esc} (km/s)
Mercury	4.3
Venus	10.3
Earth	11.2
Moon	2.3
Mars	5.0
Jupiter	60
Saturn	36
Uranus	22
Neptune	24
Pluto	1.1
Sun	618

Fuerza gravitacional debida a objetos

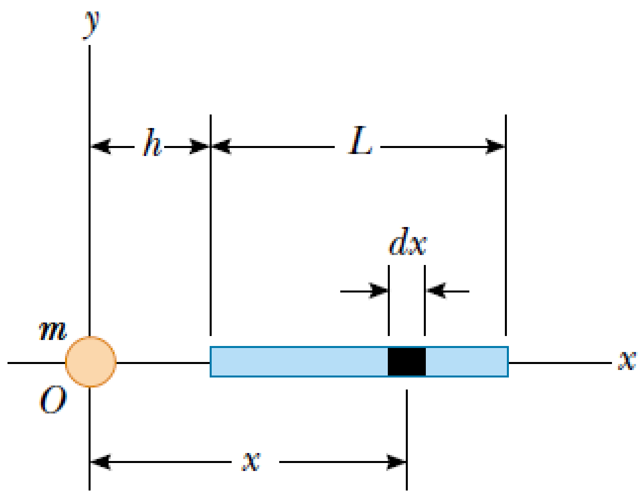
extendidos



Es más sencillo calcular el potencial gravitacional

$$U(\vec{x}) = -Gm \int \frac{dM}{r}$$

Ejemplo 8. Encontrar la fuerza gravitacional ejercida por la barra sobre m.

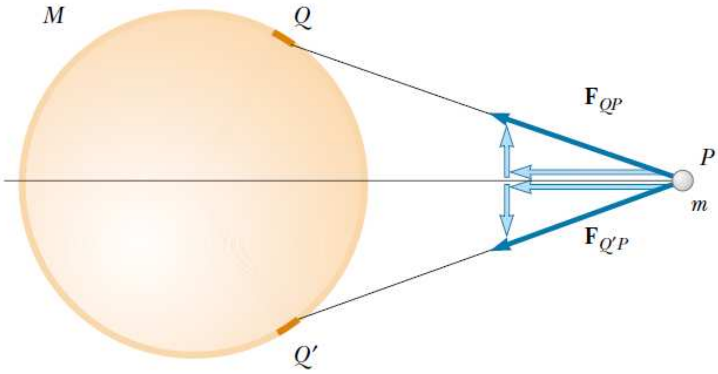


$$F = Gm \int_h^{h+L} \frac{\rho dx}{x^2} =$$

$$Gm\rho\left(-\frac{1}{h+L} + \frac{1}{h}\right) \quad M = \rho L$$

$$F = G\frac{Mm}{h(L+h)}$$

Ejemplo 9. Encuentre la fuerza gravitacional que ejerce un casquete esférico de masa M sobre una masa m situada en P



Calculemos el potencial gravitacional

$$D = \sqrt{R^2 \mathrm{sen}^2\theta + (r - R\cos\theta)^2}$$

$$U = -Gm\int_0^{\pi} \frac{\rho 2\pi\, d\theta\, \mathrm{sen}\,\theta}{D}, x = \cos\theta$$

$$U = -2\pi G m\rho \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{R^2(1-x^2) + (r - Rx)^2}} =$$

$$-2\pi G m\rho \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrx}}$$

$$= \frac{-4\pi G m\rho}{-2Rr}\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrx}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{2\pi G m\rho}{Rr}(|R - r| - (R + r)) = \begin{cases} -\frac{4\pi G m\rho}{r} = -G\frac{Mm}{r}, r \geqslant R \\ -\frac{4\pi G m\rho}{R} = -G\frac{Mm}{R}, r < R \end{cases}$$

$$\vec{F} = \begin{cases} -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}, r \geqslant R \\ 0, r < R \end{cases}$$

Ejemplo 10. Encuentre la fuerza gravitacional que ejerce una esfera uniforme de masa M sobre una masa m situada en P.

Sumamos sobre casquetes de ancho dr' y masa $dM =$

$4\pi r'^2 \rho dr'$

$$U = -\frac{Gm}{r}\int dM = -G\,\frac{Mm}{r}$$

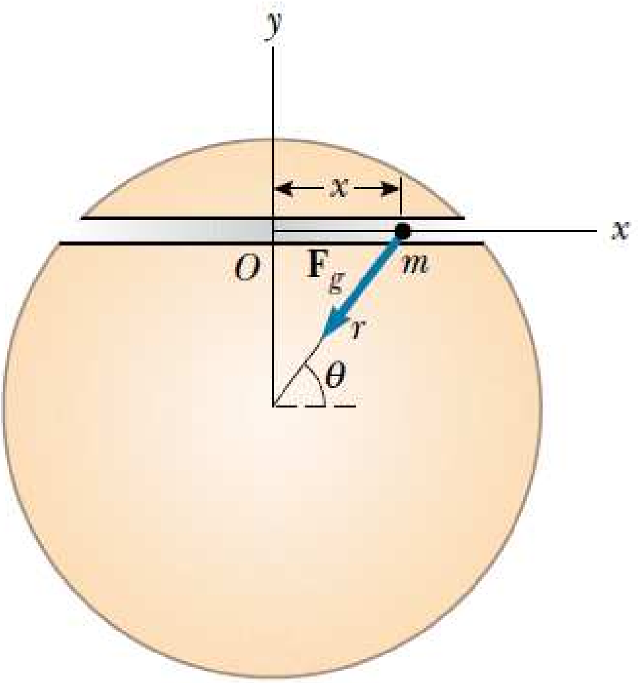
Ejemplo 11. Encuentre la fuerza gravitacional que ejerce una esfera uniforme de masa M sobre una masa m situada a una distancia r del centro de la esfera con $r < R$.
Dado que las masas exteriores a r no producen fuezas se tiene:

$$\vec{F} = -G\,\frac{M(r)\,m}{r^2}\hat{r}$$

$$M(r) = 4\pi\int_0^r dr'\,r'^2\rho = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 = M\frac{r^3}{R^3}$$

$$\vec{F} = -G\,\frac{Mmr}{R^3}\hat{r}$$

Ejemplo 12. Mostrar que una partícula de masa m que se mueve en el túnel de la figura realiza un movimiento armónico simple y encontrar el período.



Ley de Gauss Gravitacional

$$\oint_S d\vec{S}\,.\vec{g} = 4\pi G M_V$$

Orbitas: Ecuación y excentricidad

$$E = \frac{1}{2} m\,\vec{v}^{\,2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Dado que se conserva el momento angular, la órbita está en un plano perpendicular a $\vec{L}$. Tomemos el eje z en la dirección de $\vec{L}$.

En el plano x, y, introduzcamos coordenadas polares, con origen en el Sol:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \vec{v}^{\,2} = \dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\theta}^2$$

$$m r^2\dot{\theta} = l$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^{\,2} + \frac{1}{2}m r^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r} =$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}=\frac{m}{l}r^2\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{l^2}{m^2r^2}+\frac{2GM}{r}}$$

$$u=\frac{1}{r}$$

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{m}{l}\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{l^2}{m^2}u^2+2GMu}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{m}{l}\frac{-\frac{l^2}{m^2}u+GM}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{l^2}{m^2}u^2+2GMu}}\frac{du}{d\theta}=$$

$$\left(\frac{m}{l}\right)^2\left(-\frac{l^2}{m^2}u+GM\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u+GM\left(\frac{m}{l}\right)^2$$

$$u-GM\left(\frac{m}{l}\right)^2=A\cos(\theta+\phi)\qquad\phi=0$$

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}-\frac{GMm}{r}=$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\left(\frac{l}{m}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}u^2-GMmu=$$

$$\frac{1}{2}m(A\ \mathrm{sen}\ \theta)^2\left(\frac{l}{m}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{l^2}{m}\left(GM\left(\frac{m}{l}\right)^2+A\cos\theta\right)^2-GMm\left(GM\left(\frac{m}{l}\right)^2+A\cos\theta\right)=$$

$$A = -\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{l^2}{m}A^2 - \dfrac{1}{2}G^2M^2\dfrac{m^3}{l^2}}{\sqrt{\dfrac{2m}{l^2}\left(E + \dfrac{1}{2}G^2M^2\dfrac{m^3}{l^2}\right)}}$$

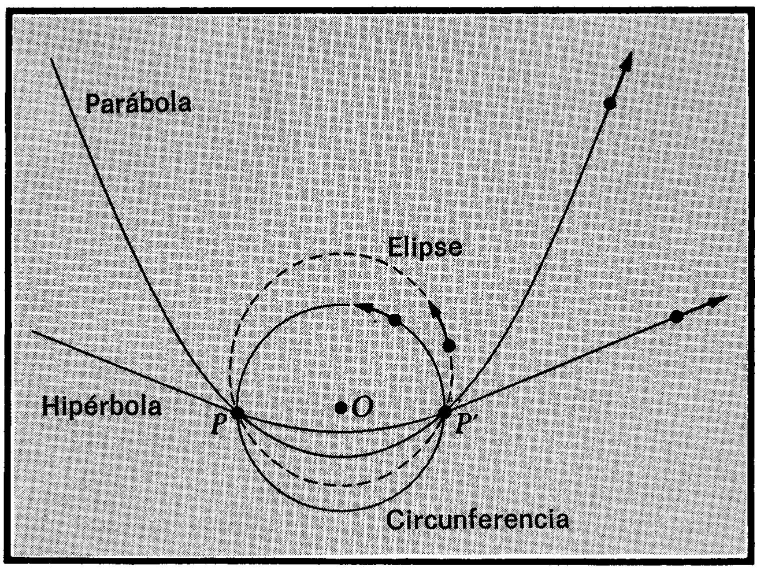
$$\frac{1}{r} = GM\left(\frac{m}{l}\right)^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{G^2M^2m^3}}\cos\theta\right)$$

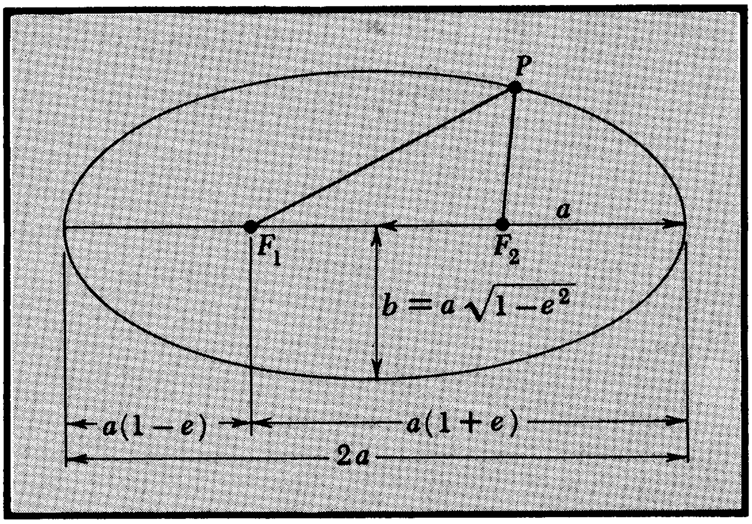
Ecuación de la cónica:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta)$$

e:excentricidad

$$\begin{cases} \text{Hipérbola}\, e > 1 \\ \text{Parábola}\, e = 1 \\ \text{Elipse}\, 0 < e < 1 \\ \text{Circunsferencia}\, e = 0 \end{cases}$$





$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}, \, a \text{ es el semieje mayor}$$

Masa Reducida

Problema de los dos cuerpos:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U(|r_1 - r_2|)$$

$$m_1r_1 + m_2r_2 = 0 \quad , \text{CM}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

$$r = r_1 - r_2$$

$$r = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)r_1$$

$$r_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} r$$

$$v_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} v$$

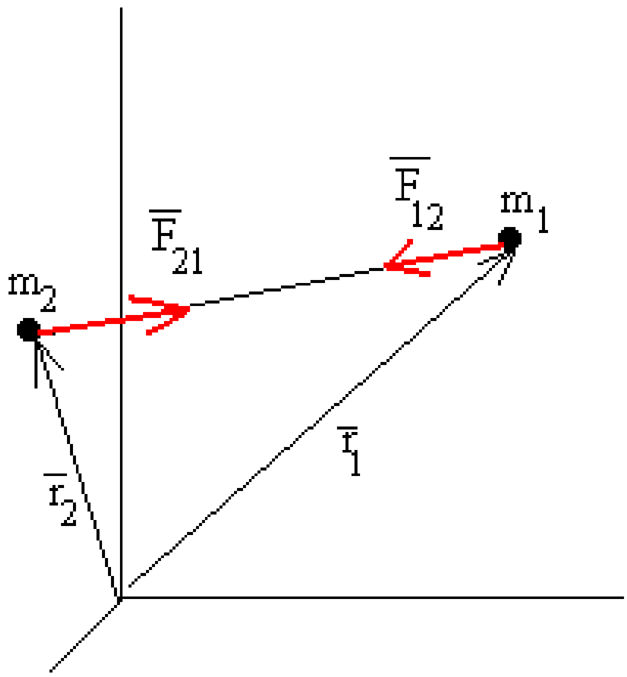
$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} v$$

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-2} + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-2}\right)v^2 + U(r) =$$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \text{masa reducida}$$

El problema de los dos cuerpos se ha reducido al problema de un cuerpo con masa μ. Notar que U no ha cambiado.



Supongamos un sistema aislado de dos partículas interactuantes. Sobre la partícula de masa m1 actúa la fuerza F12, y sobre la partícula de masa m2 actúa al fuerza F21. Ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario.

Las ecuaciones del movimiento de cada partícula son

$$m_1 a_1 = F12, m_2 a_2 = F21$$

Como vemos $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$. La aceleración del centro de masa es cero. El centro de masas de un sistema aislado se mueve con velocidad constante, vc=cte

El problema de dos cuerpos se pueden reducir a un problema de un solo cuerpo, para ello, calculamos el valor de la aceleración relativa $a_1 - a_2$

Se denomina masa reducida del sistema de dos partículas a

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Podemos escribir la siguiente ecuación del movimiento

$$\mu a_{12} = F_{12}$$

El movimiento relativo de dos partículas sometidas únicamente a su interacción mutua es equivalente al movimiento, respecto de un observador inercial, de una partícula de masa igual a la reducida y bajo una fuerza igual a la de interacción.

En el caso de que la interacción entre los dos cuerpos sea descrita por la ley de la Gravitación Universal

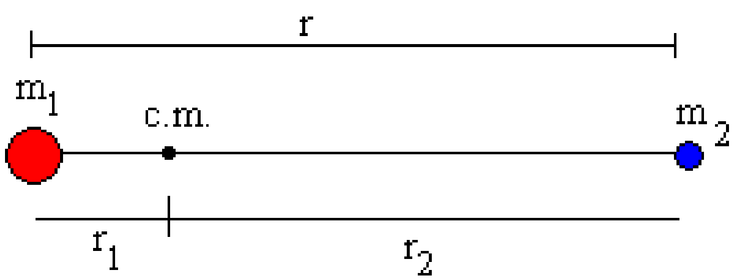
$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Siendo r el vector posición de la partícula 1 respecto de la 2, r=r1-r2. Para resolver este problema de un solo cuerpo, necesitamos únicamente hallar el vector r en función del tiempo.

La dispersión en el Sistema de Referencia del Centro de Masa y en el Sistema de Referencia del Laboratorio, será uno de los ejemplos más importantes en el estudio de un sistema aislado formado por dos partículas que interaccionan eléctricamente.

Sistema formado por dos estrellas en órbita circular.

Supongamos un sistema aislado formado por dos estrellas en órbita circular alrededor de su centro de masa. La posición del centro de masas se calculará de acuerdo con la siguiente relación

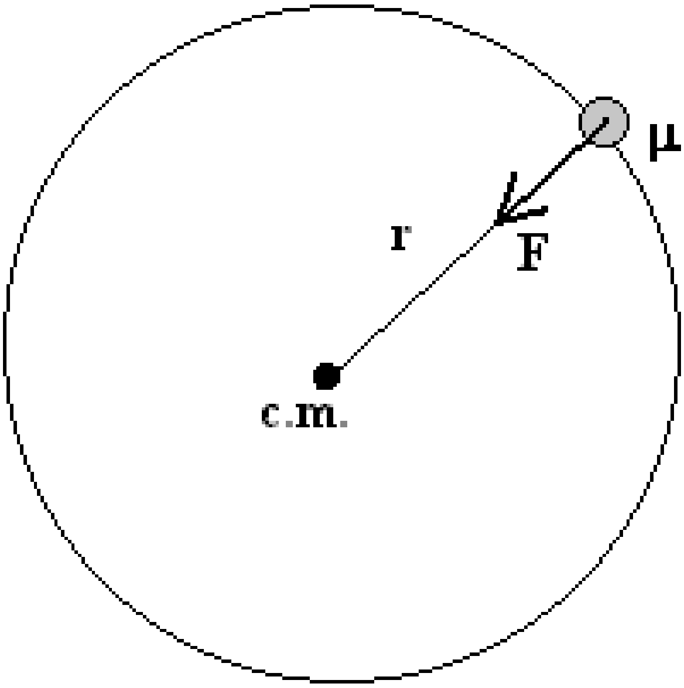


m1r1=m2r2

r=r1+r2

La posición del centro de masas está más cerca de la masa mayor.

El movimiento de las dos estrellas es equivalente al movimiento de una partícula de masa reducida μ , bajo la acción de la fuerza F que describe la interacción mutua, la fuerza de atracción entre dos masas separadas una distancia r=r1+r2



Si dicha partícula describe un movimiento circular de radio r, su aceleración es $\omega^2 r$. La segunda ley de Newton se escribe.

$$\mu\omega^2 r = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

La cantidad $\omega^2 r^3$ es constante, lo que nos indica que el cuadrado del periodo $P = 2p/\omega$ es proporcional al cubo del radio r (tercera ley de Kepler para órbitas circulares)

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G(m_1 + m_2)}$$

Una vez determinado el movimiento relativo, es decir, el radio r que describe la partícula de masa reducida m, el movimiento de cada una de las estrellas es el siguiente:

La estrella de masa m_1 describe un movimiento circular de radio $r_1 = m_2 r/(m_1 + m_2)$, alrededor del c.m de periodo P.

La estrella de masa m_2 describe un movimiento circular de radio $r_2 = m_1\, r/(m_1 + m_2)$, alrededor del c.m y del mismo periodo.

Cuando la masa de una de las partículas es muy grande comparada con la de la otra, el centro de masas coincide aproximadamente con el centro de la primera partícula y podemos suponer que la segunda se mueve alrededor de un centro fijo de fuerzas. Por ejemplo, un satélite artificial que describe una órbita alrededor de la Tierra.

Ejemplo 13. Calcular la masa de la Luna conocidos los datos siguientes:

Constante G=6.67$\centerdot$10^{-11} Nm2/kg2 Distancia Tierra-Luna $r = 3.84 \centerdot 10^8$ m

Masa de la Tierra $m_1 = 5.98 \centerdot 10^{24}$ kg

Periodo $P = 2.36 \centerdot 10^6$ s (27.3 días)

De la fórmula del periodo P, se despeja la masa de la Luna $m_2 = 3.73 \centerdot 10^{22}$ kg

El valor correcto es $7.34 \centerdot 10^{22}$ kg.

Nuestro cálculo se basa en un modelo simplificado, que no tiene en cuenta el efecto del Sol sobre el periodo de la Luna, las perturbaciones de otros planetas, y la no esfericidad de la Tierra. La órbita de la Luna no es circular aunque el resultado (tercera ley de Kepler) es válido también para órbitas elípticas.

Hemos mostrado que, en un sistema formado por dos cuerpos que interaccionan de acuerdo con la ley de la Gravitación Universal, conocido el periodo P y la separación r entre ambos (por ejemplo, un sistema binario de estrellas) se puede calcular a partir de la tercera ley de Kepler, la masa combinada m1+m2 de los dos cuerpos.

Detección de planetas extrasolares

Una estrella gira en torno al CM del sistema que comprende uno o más planetas.

Realizará un movimiento de bamboleo que se puede descomponer(series de Fourier) en varios períodos.

Cada período distinto corresponde al período de un planeta del sistema.

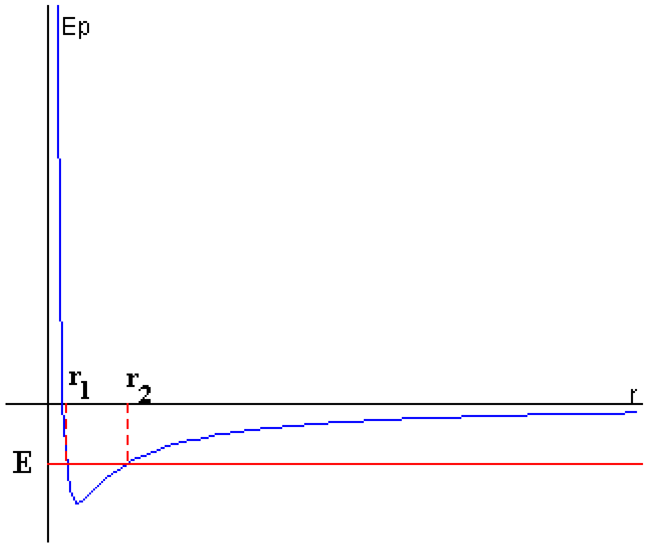
⟨video | `Planet_reflex_200.gif` | 10cm | 10cm | 10cm | yes⟩

Potencial Efectivo

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{m r^2} - \frac{G M m}{r}$$

Potencial efectivo:

$$V_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}$$



El caso más interesante se produce cuando la energía de la partícula es negativa, tal como se señala en la figura. El movimiento de dicha partícula está limitado a una región radial comprendida entre r1 y r2, que son las abscisas de los puntos intersección de la recta horizontal y la curva de energía potencial, el primero corresponde al perihelio (o perigeo) la distancia de máximo acercamiento de la partícula al centro de fuerzas, el segundo al afelio (o apogeo) distancia de máximo alejamiento del móvil al centro de fuerzas.

Ejemplo 14. Encontrar las condiciones para que la órbita sea circular.

Observando el potencial efectivo, vemos que una órbita circular corresponde a $E = V_{\text{min}}$, donde V_{min}

es el mínimo del potencial efectivo.

$$V'_{\mathrm{ef}} = 0 = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2}$$

$$r = \frac{l^2}{GMm^2}, \quad \text{radio de la órbita}$$

$$V_{\min} = \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}GMm\right) = -\frac{1}{2}\frac{G^2M^2m^3}{l^2} = E$$