Sistemas de Partículas:Leyes de Conservación

Conservación de momentum

Consideremos N partículas con posiciones $\vec{x}_i$, velocidades $\vec{v}_i$ y masas m_i, i=1...,N

El momentum lineal de la partícula i es:$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

El momentum total del sistema de N partículas es:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{1}$$

Sea $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ la fuerza externa que actúa sobre la partícula i.

Sea $\vec{F}_{ij}$ la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i(fuerza interna al sistema)

Calculemos la variación temporal de $\vec{P}$:

$$\frac{d\,\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\,\vec{p}_i}{dt}$$

Segunda ley de Newton:

$$\frac{d\,\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d\,\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots +$$

$$\vec{F}_{31+\dots} = 0$$

Tercera ley de Newton:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0, \ldots\ldots$$

$$\frac{d\,\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}} \tag{2}$$

La derivada temporal del momentum total del sistema es igual a la fuerza externa que actúa sobre el sistema.

SISTEMA AISLADO:$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$.

En un sistema aislado, se conserva el momentum total del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{Constante}$$

Sistema centro de momentum(masa)

En la clase de movimiento relativo, vimos que al pasa de un sistema inercial S a otro S' que se mueve respecto a S con velocidad constante $\vec{u}$, encontramos que S' también es inercial. Además es válida la suma de velocidades de Galileo

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$$

Esto implica que el momentum lineal de una partícula medido en S y S' está relacionado por:

$$\vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{u}$$

Esta expresión define la ley de transformación del momentum bajo cambios de referencia inerciales.

Consideremos ahora un sistema de N partículas. Su momentum total es

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Encontremos en qué sistema inercial el momentum total se anula:

$$\vec{P}\,' = \vec{P} - M\vec{U}_{\mathrm{CM}} = \vec{0}, M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$
$$\vec{U}_{\mathrm{CM}} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Este sistema que se mueve respecto a S con velocidad $\vec{U}_{\mathrm{CM}}$ se llama Sistema de Centro de Momentum. La velocidad correspondiente es la velocidad del sistema de N partículas como un todo.

Tenemos:

$$\vec{U}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\,\vec{X}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\,\vec{x}_i}{dt},$$

$$\vec{X}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i$$

$\vec{X}_{\mathrm{CM}}$ son las coordenadas del Centro de momentum o Centro de masas(CM). Son las coordenadas que describen el movimiento colectivo de las N partículas.

Dado que(Ver ec(2)):

$$M\vec{U}_{\mathrm{CM}} = \vec{P}\,, M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}^{\,\mathrm{ext}}$$

Que no es más que la segunda ley de Newton para el centro de masas de un sistema de partículas.

Ejemplo 1. Una granada se lanza con velocidad inicial $v = 10m/s$ en un ángulo de $45°$ con la horizontal. Después de un cierto tiempo, la granada explota. Como se mueve el CM de la granada después de la explosión?

R: La única fuerza externa que actúa sobre la granada es la fuerza de gravedad. Luego:

$$x_{\mathrm{CM}} = v\cos(45°)t \qquad y_{\mathrm{CM}} = v\,\mathrm{sen}(45°)t - \frac{1}{2}gt^2$$

CM para medios continuos

Si en lugar de N partículas se tiene un medio continuo descrito por una densidad de masas $\rho(\vec{y})$, podemos generalizar las fórmulas anteriores en la siguiente forma. Discretizamos el medio continuo en N partes, cada una con masa $m_i = \rho(\vec{y}_i)dV_i$.

$$\vec{Y}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \rho(\vec{y}_i)\vec{y}_i dV_i \to_{N\to\infty} \frac{1}{M}\int dV\rho(y)\vec{y}\,,\ M = \int dV\rho(y)$$

Ejemplo 2. Determine el CM de un alambre de largo l, con densidad de masa uniforme ρ.

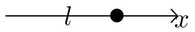


Figura 1.

Tomemos un extremo del alambre como origen del sistema de coordenadas:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_0^l dx\, x\, \rho = \frac{\rho}{M}\frac{1}{2}l^2 \quad , M = \int_0^l dx\, \rho = \rho l, \;\; x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}l$$

Ejemplo 3. Determinar el centro de masas del alambre con forma triangular representado en la figura.

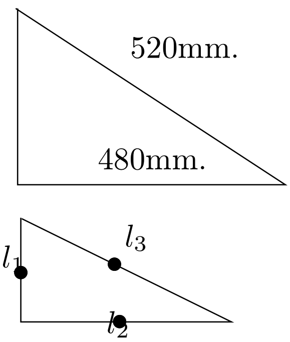


Figura 2.

Dividimos el alambre triangular en tres alambres rectilíneos con el c.m. de cada uno en su punto medio. Calcular el c. m. del conjunto es equivalente a concentrar la masa de los tres alambres rectilíneos en su centro, considerándolos así como puntuales, y calcular el c.m. de un sistema de tres partículas.

$$l_1 = \sqrt{l_3^2 - l_2^2} = 200\mathrm{mm}.$$

Las posiciones que representan a cada alambre rectilíneo serán las de sus c.m.:

$$\vec{r}_1 = (0, 100)\text{mm.}$$
$$\vec{r}_2 = (240, 0)\text{mm.}$$
$$\vec{r}_3 = (240, 100)\text{mm.}$$
$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{l_1\vec{r}_1 + l_2\vec{r}_2 + l_3\vec{r}_3}{l_1 + l_2 + l_3} = (200, 60)\text{mm.}$$

Ejemplo 4. Determinar la posición del C.M. de una semiesfera.

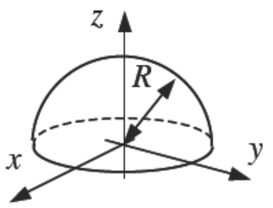


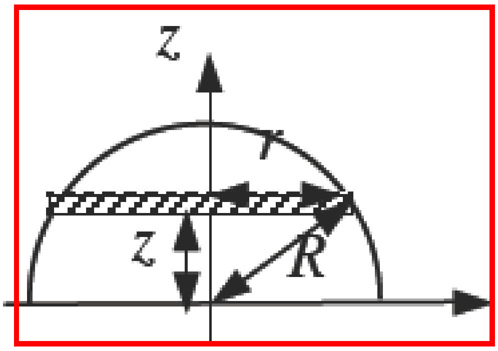
Figura 3.

Sea la semiesfera de la figura orientada con su eje de revolución a lo largo del eje Z, y de radio R. Dado que el eje Z es un eje de simetría de la semiesfera, el C.M. se encontrará en dicho eje, con lo cual las coordenadas x e y del C.M. serán nulas:

$$x_{\text{CM}} = 0, y_{\text{CM}} = 0$$

Para el cálculo de la coordenada z del C.M. vamos a dividir la semiesfera en rodajas circulares de radio r y espesor dz. La ecuación de la circunferencia nos dará la relación entre r y z:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$



El volumen de la semiesfera es:

$$V = \int_0^R dz\pi(R^2 - z^2) = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

La coordenada z del C.M. es:

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int_0^R dz\, z\pi(R^2 - z^2) = \frac{\pi}{V}\left(R^2\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^4\right) =$$

$$\frac{\pi}{4V}R^4 = \frac{3}{8}R$$

Choques

1) Elástico: Se conserva la energía cinética
2) Inelástico: No se conserva la energía cinética

Ejemplo 5. En una dimensión se pueden encontrar las velocidades finales de las partículas luego de un choque elástico:v velocidades iniciales;u velocidades finales;m masas.

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2\ ;\ m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2) \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\ \ ; \tag{4}$$

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = -m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)$$

Dividiendo (4) por (3).

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

$$u_1 = \frac{2\, m_2\, v_2 + (m_1 - m_2)\, v_1}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2\, m_1\, v_1}{m_2 + m_1}$$

Ejemplo 6. Una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ choca con una partícula de masa M inicialmente en reposo. Después del choque las dos partículas quedan pegadas. Cuál es la velocidad $\vec{U}$ de las partículas después del choque y cuánta energía cinética se perdió?

$$m\vec{v} = (M + m)\,\vec{U}\,,$$

$$\vec{U} = \frac{m\vec{v}}{m + M}$$

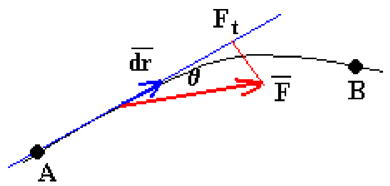
$$\Delta K = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - \frac{1}{2}(M + m)\vec{U}^{\,2} = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\left(1 - \frac{m}{m + M}\right) = \frac{1}{2}\frac{m\,M}{M + m}\,\vec{v}^{\,2}$$

Trabajo y Energía

Trabajo

Concepto de trabajo

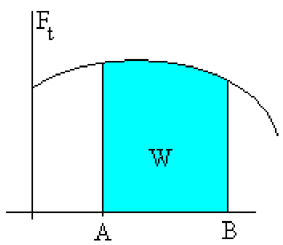
Se denomina trabajo infinitesimal, al producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.



Donde F_t es la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento, ds es el módulo del vector desplazamiento dr, y q el ángulo que forma el vector fuerza con el vector desplazamiento.

El trabajo total a lo largo de la trayectoria entre los puntos A y B es la suma de todos los trabajos infinitesimales

Su significado geométrico es el área bajo la representación gráfica de la función que relaciona la componente tangencial de la fuerza Ft, y el desplazamiento s.

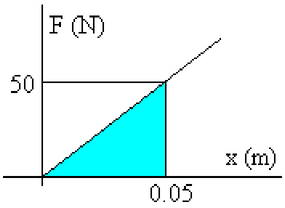


UNIDADES:

El trabajo se mide en Joules(J): 1J=1 N-m

Ejemplo: Calcular el trabajo necesario para estirar un muelle 5 cm, si la constante del muelle es 1000 N/m.

La fuerza necesaria para deformar un muelle es F=1000x N, donde x es la deformación. El trabajo de esta fuerza se calcula mediante la integral



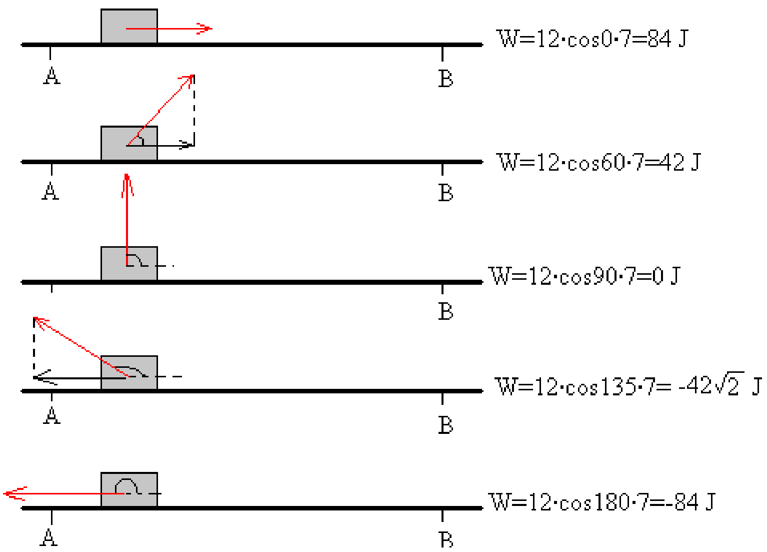
El área del triángulo de la figura es (0.05 . 50)/2=1.25 J

Cuando la fuerza es constante, el trabajo se obtiene multiplicando la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento por el desplazamiento.

W=Ft s

Ejemplo:

Calcular el trabajo de una fuerza constante de 12 N, cuyo punto de aplicación se traslada 7 m, si el ángulo entre las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son $0, 60, 90, 135, 180$ grados.



* Si la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo

* Si la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios, el trabajo es negativo

* Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo.

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{x}$$

$\vec{F}$: Fuerza aplicada, $d\vec{x}$ es el desplazamiento.
Usando la Segunda Ley de Newton:

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\frac{d\vec{x}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\,\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \frac{1}{2}m\,\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\,\vec{v}_1^2 = \Delta K$$

$K = \frac{1}{2}m\,\vec{v}^{\,2}$ es la energía cinética de la partícula.
Se mide en Joules.

Teorema del Trabajo y la Energía: El trabajo hecho por una fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva C es igual al cambio de la energía cinética de la partícula en este recorrido.

Ejemplo 7. Hallar la velocidad con la que sale una bala después de atravesar una tabla de 7 cm de espesor y que opone una resistencia constante de F=1800 N. La velocidad inicial de la bala es de 450 m/s y su masa es de 15 g.

El trabajo realizado por la fuerza F es -1800×0.07=-126 J

La velocidad final v es

$$-126 = \frac{1}{2}0.015v^2 - \frac{1}{2}0.015 \times 450^2\, v = 431\frac{m}{s}$$

Impulso

Definimos el impulso debido a una fuerza aplicada durante un un intervalo de tiempo (t_i, t_f):

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}$$

El impulso se mide en Ns, o en kg $m\, s^{-1}$.
Además:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

Fuerza conservativa. Energía potencial

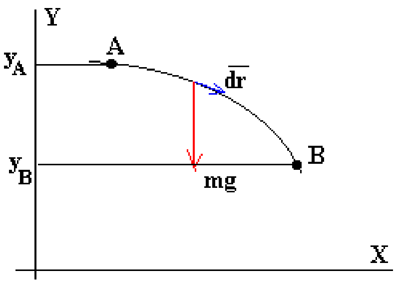
Un fuerza es conservativa cuando el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una función que solo depende de las coordenadas. A dicha función se le denomina energía potencial.

El trabajo de una fuerza conservativa no depende del camino seguido para ir del punto A al punto B.

El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de un camino cerrado es cero.

El peso es una fuerza conservativa

Calculemos el trabajo de la fuerza peso F=-mg j cuando el cuerpo se desplaza desde la posición A cuya ordenada es yA hasta la posición B cuya ordenada es yB.

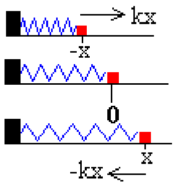


La energía potencial Ep correspondiente a la fuerza conservativa peso tiene la forma funcional

$$U = mgy + c$$

Donde c es una constante aditiva que nos permite establecer el nivel cero de la energía potencial.

La fuerza que ejerce un resorte es conservativa



Como vemos en la figura cuando un resorte se deforma x, ejerce una fuerza sobre la partícula proporcional a la deformación x y de signo contraria a ésta. Para x>0, F=-kx

Para x<0, F=kx

El trabajo de esta fuerza es, cuando la partícula se desplaza desde la posición xA a la posición xB es

$$W = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

La función energía potencial U correspondiente a la fuerza conservativa F vale

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

El nivel cero de energía potencial se establece del siguiente modo: cuando la deformación es cero x=0, el valor de la energía potencial se toma cero, U=0, de modo que la constante aditiva vale c=0.

Si (Fuerza Conservativa):

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

se obtiene:

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{x} = -\int_C \overrightarrow{\nabla U}.d\vec{x} = -\Delta U$$

El trabajo debido a fuerzas conservativas no depende de la curva C; sólo depende de los valores iniciales y finales de U.
La energía potencial crece en la dirección opuesta a la fuerza,

Ejemplo 8. La fuerza del resorte es conservativa porque se tiene

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}, U = \frac{1}{2}kx^2$$

Usando el Teorema del Trabajo y la Energía se tiene:

$$W = -\Delta U = \Delta K, \Delta(K+U) = 0$$

Por lo tanto se conserva la energía mecánica:

$$E = K + U$$

U es la Energía Potencial correspondiente a la fuerza $\vec{F}$.

Si hay varias fuerzas actuando sobre el cuerpo, la energía mecánica es:

$$E = K + \sum_i U_i$$

Esto constituye el PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA.

E no se conserva si actúan fuerzas no-conservativas, como el roce. Para obtener la forma general del Principio de Conservación de la Energía es necesario considerar el intercambio de calor, que constituye otra forma de energía.

Si solamente una fuerza conservativa F actúa sobre una partícula, el trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de la energía potencial

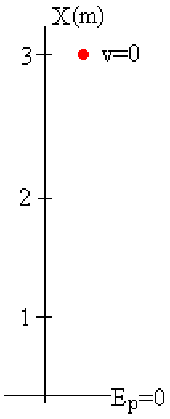
Como hemos visto en el apartado anterior, el trabajo de la resultante de las fuerzas que actúa sobre la partícula es igual a la diferencia entre el valor final e inicial de la energía cinética.

Igualando ambos trabajos, obtenemos la expresión del principio de conservación de la energía

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

La energía mecánica de la partícula (suma de la energía potencial más cinética) es constante en todos los puntos de su trayectoria.

Comprobación del principio de conservación de la energía



Un cuerpo de 2 kg se deja caer desde una altura de 3 m. Calcular

1.La velocidad del cuerpo cuando está a 1 m de altura y cuando llega al suelo, aplicando las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

2.La energía cinética potencial y total en dichas posiciones

Tomar g=10 m/s2

Posición inicial x=3 m, v=0.

U=2·10·3=60 J, K=0, E_A=K+U=60 J

Cuando x=1 m

U=$2 \cdot 10 \cdot 1 = 20\,J, K = 40, E_B = K + U = 60\,J$

Cuando x=0 m

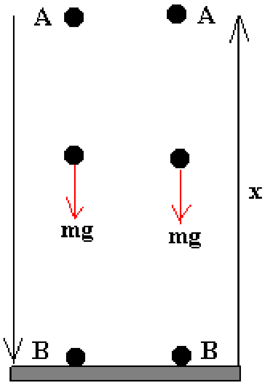
$U = 2 \cdot 10 \cdot 0 = 0\,J, K = 60, E_C = K + U = 60\,J$

La energía total del cuerpo es constante. La energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta.

Fuerzas no conservativas

Para darnos cuenta del significado de una fuerza no conservativa, vamos a compararla con la fuerza conservativa peso. El peso es una fuerza conservativa.

Calculemos el trabajo de la fuerza peso cuando la partícula se traslada de A hacia B, y a continuación cuando se traslada de B hacia A.

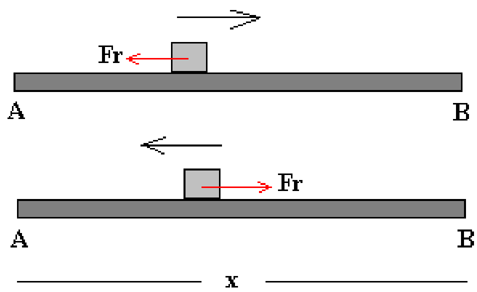


$W_{\mathrm{AB}} = mgx$

$W_{\mathrm{BA}} = -mgx$

El trabajo total a lo largo el camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es cero.

La fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa



Cuando la partícula se mueve de A hacia B, o de B hacia A la fuerza de rozamiento es opuesta al movimiento, el trabajo es negativo por que la fuerza es de signo contrario al desplazamiento. $W_{\mathrm{AB}} = -\mathrm{Fr}\,x$

$W_{\mathrm{BA}} = -\mathrm{Fr}\,x$

El trabajo total a lo largo del camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es distinto de cero

$W_{\mathrm{ABA}} = -2\mathrm{Fr}\,x$

Balance de energía

En general, sobre una partícula actúan fuerzas conservativas Fc y no conservativas Fnc. El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la diferencia entre la energía cinética final menos la inicial

$$W_c + W_{\mathrm{nc}} = K_B - K_A$$

El trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y la final

$$W_c = U_A - U_B$$

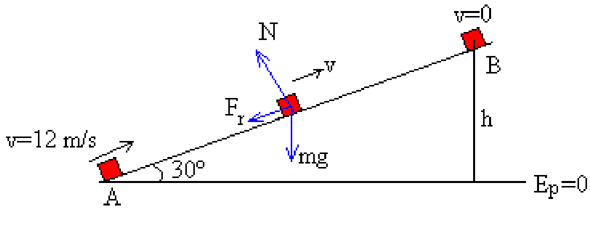
Obtenemos que

$$W_{\mathrm{nc}} = K_B - K_A - U_A + U_B = E_B - E_A$$

El trabajo de una fuerza no conservativa modifica la energía mecánica (cinética más potencial) de la partícula.

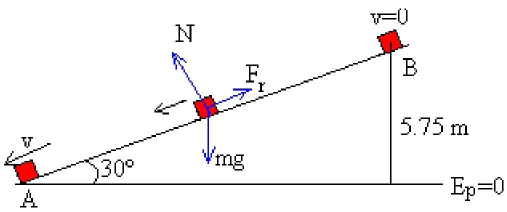
Ejemplo 9.

Un bloque de masa 0.2 kg inicia su movimiento hacia arriba, sobre un plano de 30° de inclinación, con una velocidad inicial de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0.16.



Determinar:

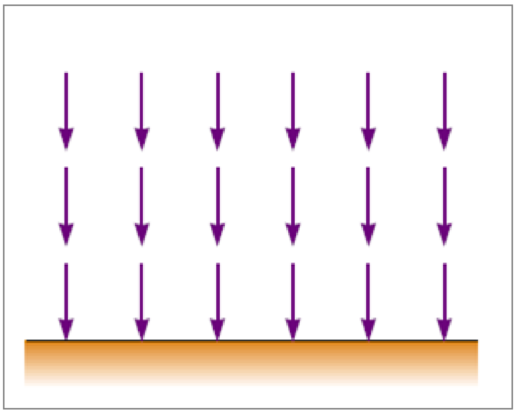
*La longitud x que recorre el bloque a lo largo del plano hasta que se para
*la velocidad v que tendrá el bloque al regresar a la base del plano
Cuando el cuerpo asciende por el plano inclinado
*La energía del cuerpo en A es $E_A = \frac{1}{2}0.2 \cdot 12^2 = 14.4J$
*La energía del cuerpo en B es $E_B = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h$=$0.98 \cdot x\, J$
*El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de A a B es
$W = -\mathrm{Fr} \cdot x = -\mu \cdot mg \cdot \cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot \cos 30 \cdot x = -0.272 \cdot x\, J$
De la ecuación del balance energético $W = E_B - E_A$, despejamos $x = 11.5m$, $h = x \cdot \mathrm{sen}30°$=$5.75m$
Cuando el cuerpo desciende



*La energía del cuerpo en B es $E_B = 0.2 \cdot 9.8 \cdot h = 1.96 \cdot h$=$0.98 \cdot x = 0.98 \cdot 11.5 = 11.28\, J$
*La energía del cuerpo en la base del plano $E_A = \frac{1}{2}0.2 \cdot v^2$
*El trabajo de la fuerza de rozamiento cuando el cuerpo se desplaza de B a A es
$W = -\mathrm{Fr} \cdot x = -\mu \cdot mg \cdot \cos\theta \cdot x = -0.16 \cdot 0.2 \cdot 9.8 \cdot \cos 30 \cdot 11.5 = -3.12\, J$
De la ecuación del balance energético $W = E_A - E_B$, despejamos $v = 9.03m/s$.

ENERGIA POTENCIAL:EJEMPLOS

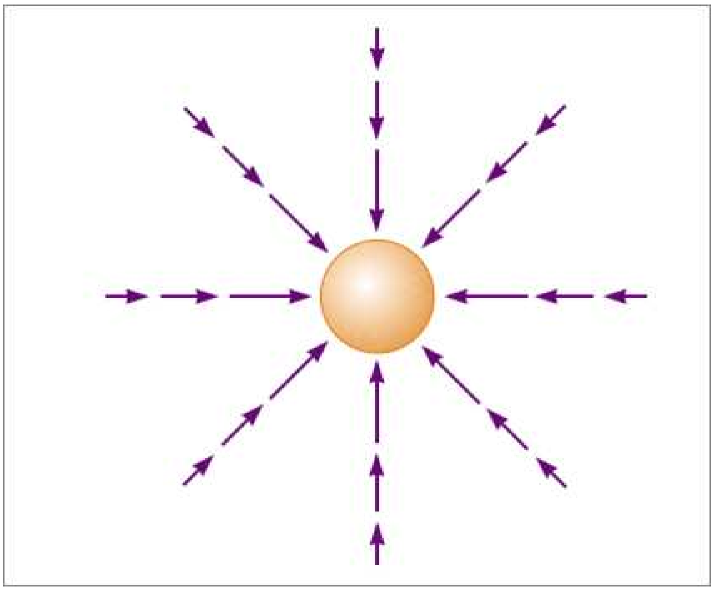
ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL CERCA DE LA TIERRA

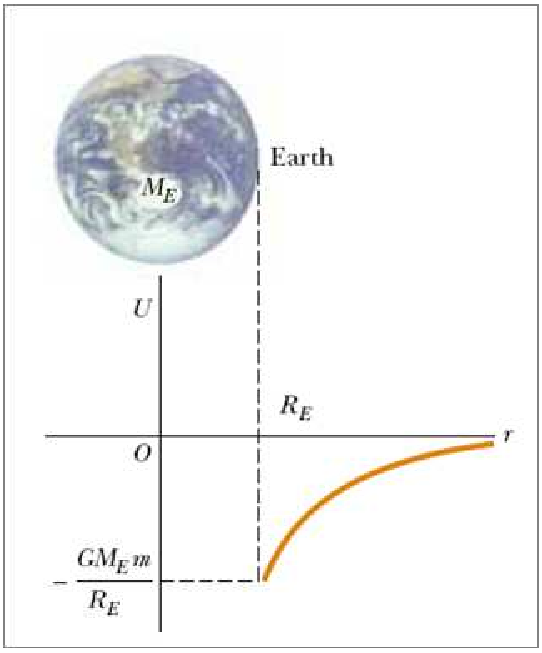


$$U = mgh$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, U(\infty) = 0$$





Energía Total de una masa m en un campo gravitacional generado por una masa M

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} - \frac{GMm}{r} \qquad , G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{\text{kg}^2}$$

Energía del Resorte

Ley de Hooke:

$$F = -kx$$

k: constante del resorte.

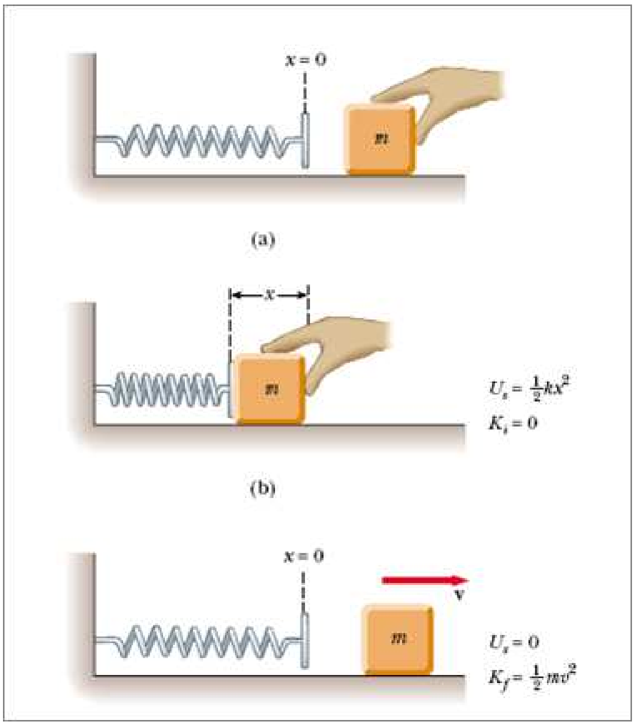
x :desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio.

?

La fuerza del resorte es conservativa.

ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



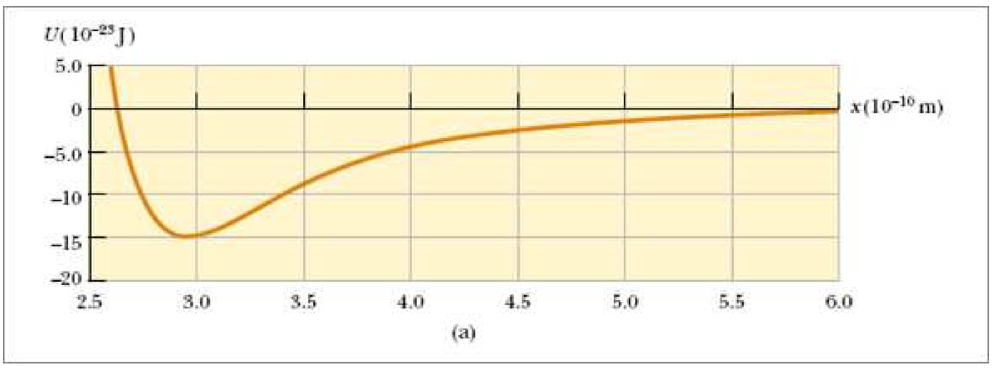
Energía Total de $\boldsymbol{m}$ en un resorte de constante $\boldsymbol{k}$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

?

Energía potencial entre átomos

$$U(x) = 4\varepsilon[\,(\frac{\sigma}{x})^{12} - (\frac{\sigma}{x})^6]$$



Energía potencial eléctrica

De la ley de Coulomb, se ve que:

$$\vec{F}_{12} = K\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\widehat{r_{12}} = -\nabla U\,, U = K\frac{q_1 q_2}{r}$$

POTENCIA

El trabajo infinitesimal está dado por:

$$dW = \vec{F}.d\,\vec{x}$$

El trabajo por unidad de tiempo se llama potencia y se mide en Watts(W): 1W=1J/s

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

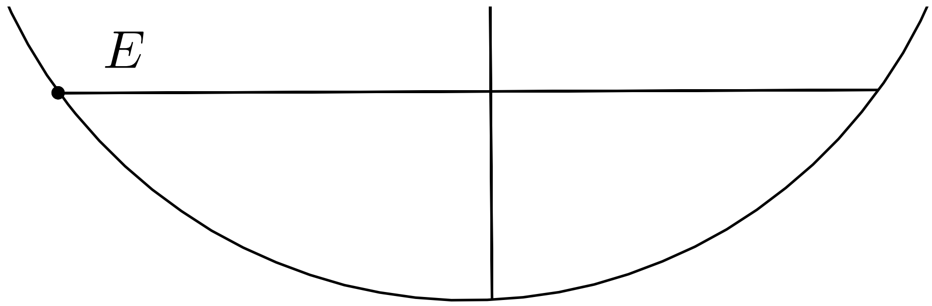
$$W(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

Descripción cualitativa del movimiento

El conocimiento de la energía potencial U permite un análisis cualitativo del movimiento.
Tenemos:

$$E - U(x) = \frac{1}{2}mv^2 \geqslant 0$$

Cuando U crece, la fuerza apunta en la dirección opuesta.
Cuando U decrece, la fuerza apunta en la misma dirección.



Para un valor fijo de E el movimiento se realiza entre los dos puntos de retorno:

$$E = U(x_R)$$

Además:
1) En x_R, $v = 0$.
2) v es máximo para x_M, cuando U es mínimo:

$$\frac{dU}{dx}|_{x_M} = 0, \frac{d^2U}{dx^2}|_{x_M} < 0$$

Ejemplo 10. Encuentre la velocidad de escape de la Tierra y del Sistema Solar. No considere la rotación de la Tierra.
$M_T = 5.98 \times 10^{24} kg$, $R_T = 6.4 \times 10^6 m$. $M_S/M_T = 3.3 \times 10^5$, D=distancia Tierra-Sol=1.5×10^{11}m.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0(\text{en infinito}) = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$v_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$v_T \simeq 10^4 m/s,\ v_S \simeq 4\times 10^4 m/s$

Ejemplo 11. Encuentre la energía potencial gravitacional cerca de la superficie de la Tierra.

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$
$$r = R + y,\ y \ll R$$

$$U = -\frac{GMm}{R+y} \sim -\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{y}{R}\right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}y = -\frac{GMm}{R} + mgy$$

Ejemplo 12. Péndulo balístico

Se dispara una bala de masa m y velocidad v sobre un bloque de madera de masa M, inicialmente en reposo, que cuelga de una cuerda de largo l. Después del impacto, el bloque y la bala quedan pegados. Se mide la altura máxima Y a la que llega el bloque después del impacto. encuentre la velocidad v de la bala.

$$mv = (m+M)u_0, \text{conservación de momentum}$$

$$E = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + (m+M)gy, \text{conservación de la energía}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)u_0^2 + (m+M)g\times 0 = \frac{1}{2}(m+M)u_0^2 = (m+M)\,gY$$

$$v = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gY}$$

Ejemplo 13. Definición de electrón volt.
La energía potencial electrostática U, permite definir el potencial electrostático ϕ, que se mide en Volts(V):

$$U = q\phi$$

q carga eléctrica; se mide en Coulombs(C)
ϕ potencial electrostático; se mide en Volts(V): 1V=1 J/C
Consideremos un electrón acelerado por una diferencia de potencial de 1V. Cuál es el cambio de la energía cinética del electrón?

$$\Delta K = e \times 1\, J = 1.6 \times 10^{-19} J$$

Dado que energías de este orden aparecen en procesos atómicos y nucleares, es conveniente definir una unidad de energía apropiada. Por esto, las energías en tales procesos se mide en electrón-volts(eV):

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19} J$$