Sistemas con masa variable

$$\vec{F} = \frac{d(m\,\vec{v}\,)}{dt} = \dot{m}\vec{v} + m\,\vec{a}$$

Ejemplo 1. *Satélite en el polvo ínterplanetario.* Un satélite en un espacio libre de fuerzas recoge residuos interplanetarios estacionarios en una proporción $\dot{m} = cv$, donde m es la masa del satélite, v es su velocidad y c es una constante. Cuál es la desaceleración:

$$\vec{F} = cv\,\vec{v} + m\,\vec{a} = \vec{0}, \vec{a} = -cv\,\vec{v}$$

$$\dot{v} = -cv^2, v^{-1} - v_0^{-1} = ct, v = \frac{v_0}{1 + cv_0 t}$$

Ejemplo 2. *Problema del vehículo espacial.* Un vehiculo espacial arroja gases oon una velocidad V. respecto al vehiculo; la variación de la masa del vehículo por unidad de tiempo es $\dot{M} = -\alpha =$, oonstante. Plantear y resolver la ecuación del movimiento del vehículo espacial, despreciando la gravedad.

En un sistema inercial dónde el cohete se mueve con velocidad v, no hay fuerzas externas actuando sobre los gases y el cohete: se conserva el momentum total:

$$\begin{aligned}
M\,(t)v(t) = M(t + dt)\,v(t + dt) - \alpha(V - v(t))\,dt = \\
(M - \alpha dt)(v + a\,dt) - \alpha(V - v(t)) = Mv + Ma\,dt - \alpha v\,dt - \alpha V dt + \alpha v\,dt \\
Ma - \alpha v - \alpha V + \alpha v = 0 \\
M\,\dot{v} = \alpha V \\
\dot{M} = -\alpha, M = M_0 - \alpha t \\
v - v_0 = \int dt \frac{\alpha V}{M_0 - \alpha t} = -V\ln\left(\frac{M_0 - \alpha t}{M_0}\right) \\
v = v_0 - V\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. *Fuerza debida a una cadena que cae.* Una ilustración familiar viene proporcionada por la fuerza que actúa sobre una plataforma estacionaria al caer sobre ella una cadena flexible desde la posición en que cuelga. Consideremos que inicialmente la cadena está suspendida de un extremo y el extremo inferior justamente toca la plataforma. Sea s la longitud de la cadena depositada en la plataforma. La fuerza que ejerce la plataforma sobre la cadena es f:

$$f = \rho s g + \rho\,\dot{s}^2$$

El segundo término es la fuerza necesaria para frenar la cadena al llegar a la plataforma:

Momentum de la cadena:$\rho ds\,\dot{s}$ Esto se reduce a 0 en un instante dt

Conservación del Momentum Angular

Consideremos una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ que está rotando alrededor de un punto O. La posición de la partícula respecto a O es $\vec{r}$. Definimos el momentum angular(cantidad de movimiento angular de la partícula por:

$$L = \vec{r} \times \vec{p}, \vec{p} = m\,\vec{v}$$

Se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ es el torque debido a la fuerza $\vec{F}$ actuando sobre la partícula. La última ecuación es la segunda ley de Newton para una partícula en rotación.

Si el torque actuando sobre la partícula se anula, se conserva el momentum angular.

Esto implica que el movimiento sucede en un plano perpendicular a $\vec{L}$:

$$\vec{L}.\vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}).\vec{r} = 0$$

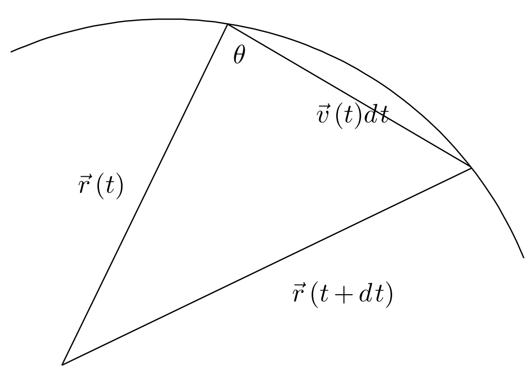
Nota 4. Tanto el momentum angular como el torque dependen del punto O.

Fuerzas centrales

Sea

$$\vec{F} = F(\vec{r})\hat{r}, \vec{\tau} = \vec{r} \times F(\vec{r})\hat{r} = 0$$

Para fuerzas centrales el momentum angular se conserva. Por lo tanto el movimiento es planar. Además es válida la Segunda Ley de Kepler. En efecto:



$$dA = \frac{1}{2}r(t)v(t)\text{sen}\,\theta\, dt. \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)| = \text{constante}$$

Sistemas de partículas

Consideremos N partículas con posiciones $\vec{x}_i$ (respecto a O), velocidades $\vec{v}_i$ y masas $m_i, i=1...,N$

El momentum lineal de la partícula i es:$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

El momentum angular total del sistema es:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{p}_i$$

La derivada temporal del momentum angular total es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

Sea $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ la fuerza externa que actúa sobre la partícula i.

Sea $\vec{F}_{ij}$ la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i(fuerza interna al sistema)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

Segunda ley de Newton:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{x}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Tercera ley de Newton:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0, \ldots\ldots$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ij} \tag{1}$$

Para fuerzas internas que se aplican en la dirección que une las dos partículas(fuerzas radiales):

$$(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}^{\,\text{ext}} \tag{2}$$

La derivada temporal del momentum angular total del sistema es igual al torque de la fuerza externa que actúa sobre el sistema.

Torque debido a la gravedad

Consideremos un sistema de N partículas, en presencia del campo gravitacional de la Tierra.

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \times \vec{g} = \vec{R}_{\text{CM}} \times M\vec{g}$$

Si elegimos el CM como O, el torque se anula.

El centro de gravedad(punto O donde el torque debido a la gravedad se anula) coincide con el CM si la aceleración de gravedad es constante.

El efecto total de las fuerzas de gravedad actuando sobre el sistema se puede reemplazar por la fuerza debido a la masa total actuando sobre el CM.

Descomposición del momentum angular:

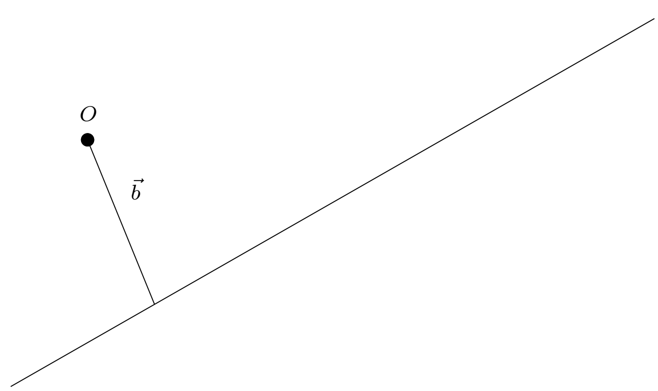
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{\text{CM}} + \vec{r}_i\right) \times \vec{p}_i = \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P} + \vec{L}_{\text{CM}}$$

Ejercicio 1. Encontrar el momentum angular para una partícula que se mueve en un círculo de radio r.

$$L = r p \operatorname{sen}(90) = r p = m v r = m\omega r^2, \text{perpendicular al plano de la circunsferencia}$$

Ejercicio 2. Encontrar el momentum angular respecto al origen para una partícula que se mueve en una línea recta que pasa a una distancia b del origen.

$$\vec{L} = \left(b\,\hat{b} + t\,\hat{v}\right) \times m v\,\hat{v} = m b v\,\hat{b} \times \hat{v}$$



Invarianza Rotacional

Consideremos un sistema de dos partículas. La energía mecánica del sistema está dada por:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_2^2 + U(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

U es la energía potencial que describe la fuerza de interacción entre las dos partículas.

Homogeneidad del espacio. E es invariante bajo:

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{a}\,, i = 1, 2$$

$$\begin{array}{rl} \vec{v}_i' = \vec{v}_i & \\ U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = & U(\vec{x}_1 + \vec{a}\,, \vec{x}_2 + \vec{a}\,) \quad \text{la solución más general de esta ecuación es:} \\ U(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) & \end{array}$$

Nota 5. $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 U = -\vec{\nabla}_a U; \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 U = \vec{\nabla}_a U; \vec{a} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Esto es $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, Tercera Ley de Newton.

Isotropía del espacio. E es invariante bajo:

$$\vec{x}_i' = O.\vec{x}_i, i = 1, 2$$

donde O es una matriz de rotación. Es decir una matriz ortogonal:

$$O\,{}^tO = 1$$

$$\begin{array}{rl} \vec{v}_i' = O\vec{v}_i, \vec{v}_i'^2 = {}^tv_i'.v_i' & = {}^tv_i\,{}^tO O v_i = {}^tv_i\,{}^t v_i \\ U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = & U(O\vec{x}_1, O\vec{x}_2) \end{array}$$

La solución más general de esta ecuación es:

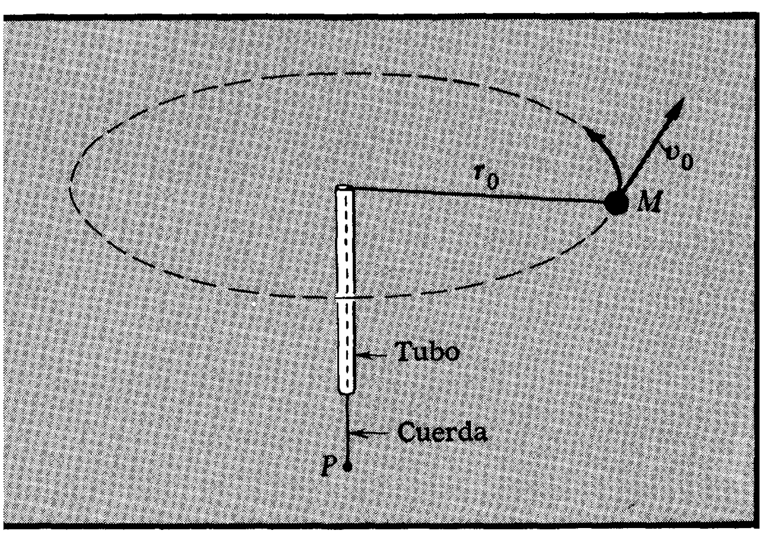
$$\begin{array}{ll} U(\vec{x}_1^2, \vec{x}_2^2, \vec{x}_1.\vec{x}_2) & a_1 = \vec{x}_1^2; a_2 = \vec{x}_2^2; a_2 = \vec{x}_1.\vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \times \vec{\nabla}_1 U + \vec{x}_2 \times \vec{\nabla}_2 U = \vec{x}_1 \times \left(\frac{\partial U}{\partial a_1} \vec{x}_1 + \right. & \left. \frac{\partial U}{\partial a_3} \vec{x}_2 \right) + \vec{x}_2 \times \left(\frac{\partial U}{\partial a_2} \vec{x}_2 + \frac{\partial U}{\partial a_3} \vec{x}_1 \right) \; = \frac{\partial U}{\partial a_3} (\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_1) = \vec{0} \end{array}$$

Ejercicio 3. Para N partículas se tiene:

$$U = U(\vec{x}_i.\vec{x}_j), i \geqslant j$$

Mostrar que el torque debido a fuerzas internas se anula.

Ejemplo 6. *Aceleración angular que acompaña a una contracción.* Se sujeta a una cuerda (Ver figura) una partícula de masa M; la partícula gira siempre en un mismo plano con velocidad v., cuando la longitud de la cuerda es r_0. ¿Qué trabajo ha de realizarse para acortar la cuerda hasta r?



Como la fuerza es central, se conserva el momento angular:

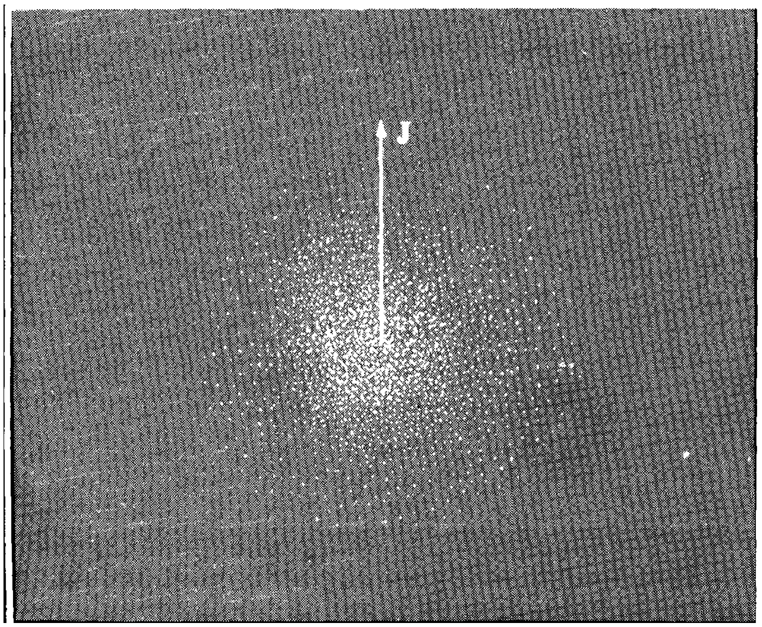
$$m v_0 r_0 = m v r, \frac{v}{v_0} = \frac{r_0}{r}$$

Usando el teorema del trabajo y la energía se tiene:

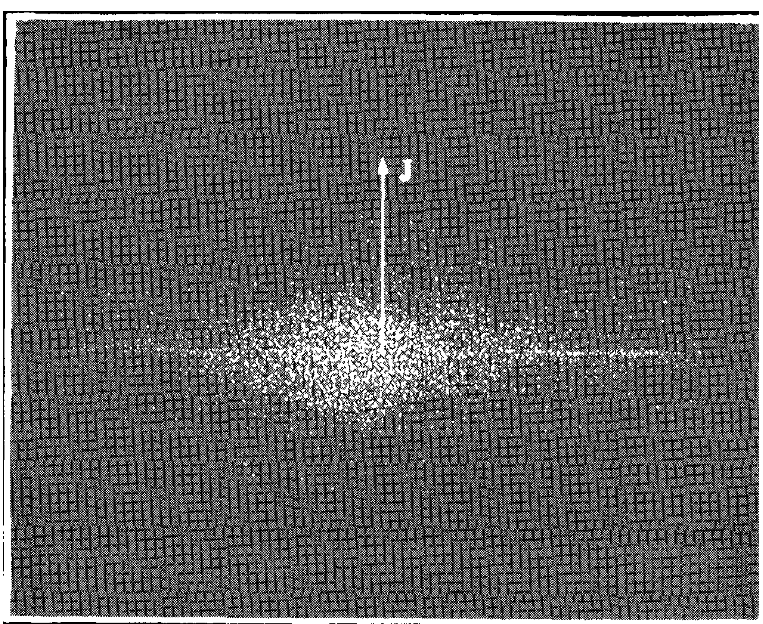
$$W = \Delta K = -\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(-1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(-1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)$$

El momento angular actúa sobre el movimiento radial como una energía potencial repulsiva efectiva: tendremos que realizar un trabajo extra sobre la partícula al llevarla desde distancias grandes hasta otras más pequeñas si se exige la conservación del momento angular en el proceso.

Ejemplo 7. *Forma de la galaxia.* Consideremos una masa muy grande M de gas provista inicialmente de un momento angular determinado (Ver Fìg.) El gas se contrae bajo su peso.



Al contraerse, debido a la conservación del momento angular, gira más rápido y además, pierde energía por radiación (la nube se calienta). El resultado es la forma aplanada que se muestra más abajo.



Andrómeda

Ejercicio 4. La Tierra en su perihelio está a una distancia de 147 millones de km. del Sol y lleva una velocidad de 30,3 km/s. ¿Cuál es la velocidad de la Tierra en su afelio, si dista 152 millones de km. del Sol?

La fuerza es central. Se conserva el momento angular:

$$v_P r_P = v_A r_A$$
$$v_A = v_P \frac{r_P}{r_A} = 30.3 \times \frac{147}{152} \mathrm{km}/s = 29.3\,\mathrm{km}/s$$