Movimiento Relativo

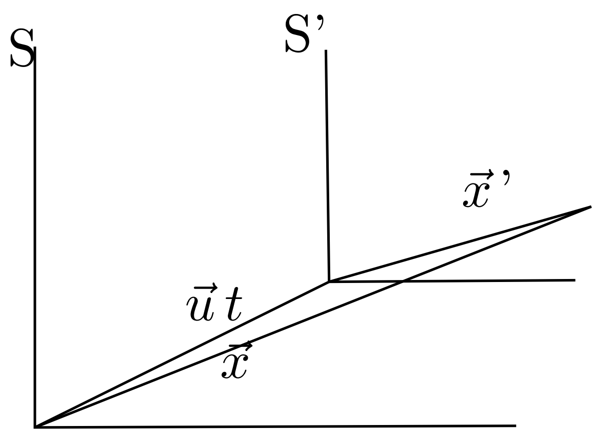
Consideremos un sistema inercial S. El vector posición de una partícula respecto a S es $\vec{x}$.

Queremos describir el movimiento de la partícula relativo a un sistema S' que se mueve respecto a S.

La posición de la partícula en S' está dada por $\vec{x}\,'$

Velocidad relativa constante

En este caso, el origen de S' se mueve respecto a S con velocidad $\vec{u}$, constante.



Transformación de Galileo:

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{u}\,t\,,\, t' = t$$

Velocidad:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{x}\,'}{dt'}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Suma de velocidades de Galileo:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$$

Aceleración:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

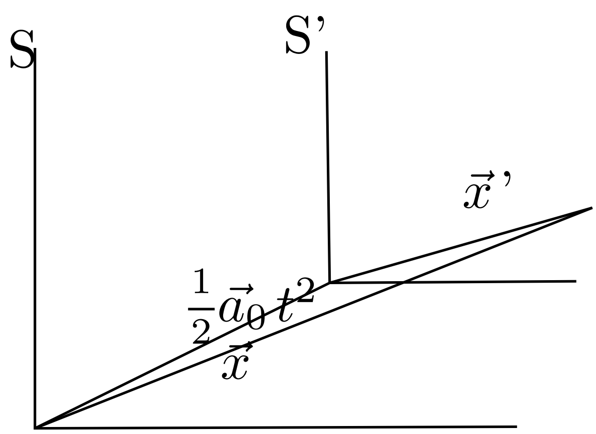
La aceleración no cambia:

$$\vec{a}\,' = \vec{a}$$

Por lo tanto el sistema S' también es inercial y en él son válidas las tres leyes de Newton. Las leyes de la Mecánica de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo.

Aceleración relativa constante

En este caso, el origen de S' se mueve respecto a S con aceleración $\vec{a}_0$, constante. En la figura se asume que en $t = 0$ los orígenes de los dos sistemas coinciden y que $\vec{u} = 0$.



Transformación de coordenadas:

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{u}\,t - \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2\,, t' = t$$

Velocidad:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{x}\,'}{dt'}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Se tiene:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u} - \vec{a}_0 t$$

Aceleración:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración cambia:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

Por lo tanto el sistema S' no es inercial. La segunda ley de Newton debe ser modificada.

Fuerzas Ficticias

Sea $\vec{F}$ la fuerza actuando sobre la artícula en el sistema inercial S. Se tiene:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\vec{a}\,' + m\vec{a}_0$$

En S' la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F}\,' = m\vec{a}\,', \text{con}\, \vec{F}\,' = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

Para poder describir el movimiento de la partícula relativo al sistema no inercial S', debemos agregar a la fuerza externa $\vec{F}$, la fuerza "ficticia" $-m\vec{a}_0$.

Ejemplo 1. Una masa M se encuentra atada al extremo de un resorte de constante k. Si el resorte y la masa están sobre un carro que acelera hacia la derecha con aceleración a_0, encuentre la compresión del resorte L a partir de su posición de equilibrio para que la masa esté en reposo respecto al carro.
Escojamos los dos ejes coordenados en S y S', apuntando hacia la derecha. Notar que en S' la fuerza ficticia apunta hacia la izquierda.

$$F' = 0 = kL - ma_0 \quad , L = \frac{ma_0}{k}$$

Ejemplo 2. Ascensor en caída libre.
Un astronauta cae junto con un ascensor en caída libre. Determine la fuerza que actúa sobre el astronauta, relativa al ascensor.
Tomemos el eje y dirigido verticalmente hacia la Tierra.

$$a_0 = g, F' = mg - mg = 0$$

El astronauta experimenta la ingravidez al interior del ascensor.

Sistema fijo a la Tierra

Sea S un sistema inercial con ejes coordenados I,J,K. S' está atado a la Tierra, con ejes coordenados I',J',K'. Tomemos K y K' coincidentes con el eje de rotación de la Tierra. ϕ es el ángulo de rotación de S' respecto a S.

Transformación de coordenadas:

$$
\begin{aligned}
I' &= I\cos\phi + J\,\mathrm{sen}\,\phi \\
J' &= -I\,\mathrm{sen}\,\phi + J\cos\phi \\
K' &= K
\end{aligned}
$$

Las derivadas temporales son:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}' = (-I\,\mathrm{sen}\,\phi + J\cos\phi)\dot{\phi} &= \dot{\phi}J' \\
\dot{J}' = (-I\cos\phi - J\,\mathrm{sen}\,\phi)\dot{\phi} &= -\dot{\phi}I'
\end{aligned}
$$

Consideremos una partícula fija a la Tierra

$$\vec{x}_0 = x_0'\,I' + y_0'\,J' + z_0\,'K'$$

Velocidad

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{x}\,'}{dt'}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Se tiene:

$$\vec{v}_0 = x_0'\dot{\phi}J' - y_0'\dot{\phi}I' = \vec{D}\times\vec{x}_0$$

Vector de Darboux:

$$\vec{D} = \dot{\phi}K'$$

$\dot{\phi}$ es la velocidad angular de rotación de la Tierra. Todos los puntos sobre ella, excepto los polos giran hacia el Este.

Consideremos ahora una partícula que se desplaza sobre la Tierra

$$\vec{x} = x'\,I' + y'\,J' + z\,'K'$$

Velocidad

$$\vec{v} = \dot{x}' I' + \dot{y}' J' + \dot{z}' K' + \vec{D} \times \vec{x} = \vec{v}' + \vec{D} \times \vec{x}$$

Aceleración:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración cambia:

$$\vec{a} = \ddot{x}' I' + \ddot{y}' J' + \ddot{z}' K' + 2\vec{D} \times \vec{v} + \vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right) =$$
$$\vec{a}' + 2\vec{D} \times \vec{v} + \vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right)$$

Por lo tanto el sistema S' no es inercial. La segunda ley de Newton debe ser modificada.

Fuerzas Ficticias

Sea $\vec{F}$ la fuerza actuando sobre la artícula en el sistema inercial S. Se tiene:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\vec{a}' + 2m\vec{D} \times \vec{v} + m\vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right)$$

En S' la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F}' = m\vec{a}', \text{con } \vec{F}' = \vec{F} - 2m\vec{D} \times \vec{v} - m\vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right)$$

Para poder describir el movimiento de la partícula relativo al sistema no inercial S', debemos agregar a la fuerza externa $\vec{F}$, la fuerza "ficticia" $-2m\vec{D} \times \vec{v} - m\vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right)$.

$\vec{a}_{\text{co}} = -2\vec{D} \times \vec{v}$ se llama Aceleración de Coriolis.
$\vec{a}_c = -\vec{D} \times \left(\vec{D} \times \vec{x}\right)$ es la Aceleración Centrífuga.

Ejemplo 3. Una partícula de masa m y velocidad v cae verticalmente sobre un punto de la superficie de la Tierra de colatitud θ.

a) Encuentre la magnitud y dirección de la aceleración de Coriolis experimentada por la partícula.

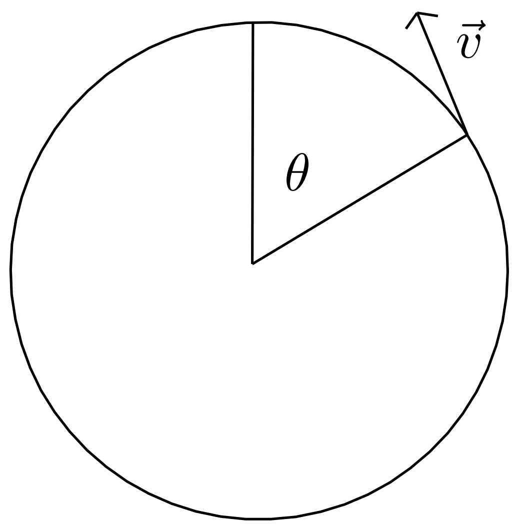
R:

$$|\vec{a}_{\text{co}}| = 2\dot{\phi} v \operatorname{sen}\theta \qquad \text{, apunta hacia el este}$$

b) Si $v = 10m/s$,evalúe la aceleración de Coriolis en el Ecuador.

$\dot{\phi} = \dfrac{2\pi}{86400}\text{rad}/s = 7.3 \times 10^{-5}\text{rad}/s$, $|\vec{a}_{\text{co}}| = 1.5 \times 10^{-3} m/s^2$

Ejemplo 4. Una partícula de masa m se mueve paralela a la superficie de la Tierra con rapidez v y colatitud θ.



a) Encuentre la magnitud y dirección de la aceleración de Coriolis experimentada por la partícula.

R:

$$|\vec{a}_{\mathrm{co}}| = 2\dot{\phi} v \cos\theta \quad ,$$

apunta hacia la derecha en el hemisferio norte(HN)

y hacia la izquierda en el HS

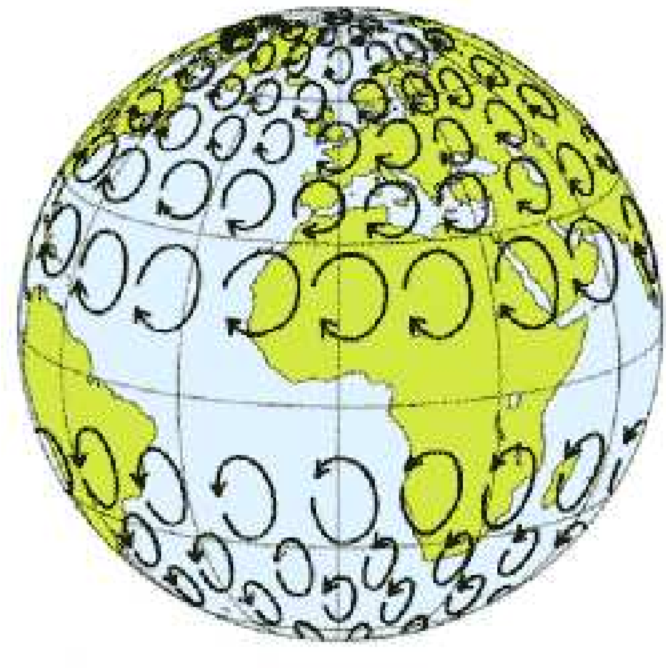


Figura 1. La tendencia de giro varía según el hemisferio considerado. La ilustración muestra el patrón para los anticiclones(el aire está a mayor presión que el entorno). Las borrascas(ciclones) giran en sentido opuesto.

b) Si $v = 10m/s$,evalúe la aceleración de Coriolis en el polo norte.

$\dot{\phi} = \dfrac{2\pi}{86400}\mathrm{rad}/s = 7.3 \times 10^{-5}\mathrm{rad}/s, \ |\vec{a}_{\mathrm{co}}| = 1.5 \times$

$10^{-3} m/s^2$

Ejemplo 5. Encuentre la magnitud y dirección de la aceleración centrífuga en un punto de la Tierra con latitud θ.

$\vec{a}_c = -\vec{D} \times (\vec{D} \times \vec{x}) = -(\vec{D}.\vec{x})\vec{D} + (\vec{D}.\vec{D})\vec{x} = \dot{\phi}^2 R(\hat{r} - \cos\theta K')$

$$\vec{a}_c.K' = 0, \quad |\vec{a}_c| = \dot{\phi}^2 R\sqrt{1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta} = \dot{\phi}^2 R\, |\mathrm{sen}\, \theta|$$

Ejemplo 6. Considere una masa de 10 kg. Cuánto pesa a) En el Ecuador b) En el Polo Sur.?

a)

$P = m(g - \dot{\phi}^2 R) = 10(9.8 - 7.3^2 \times 10^{-10} \times 6.4 \times 10^6) = 97.7\, N$

b)

$$P = mg = 98\, N$$

Ejemplo 7. **Ultracentrifugadora**

La ultracentrifugadora es una centrifugadora optimizada para girar su rotor a velocidades muy elevadas, capaces de generar una aceleración tan alta como de 1 000 000 g (9,800 km/s^2).

Consideremos una molécula suspendida en un líquido, en la cámara de un centrifugadora, distante 10cm. del eje de rotación y aquella gira a 1000 revoluciones/s.

Se tiene:

$$\omega = 2\pi \times 10^3 = 6.3 \times 10^3 \mathrm{rad}/s$$
$$a_c = 6.3^2 \times 10^6 \times 10^{-1} m/s^2 \ = 4 \times 10^6 m/s^2$$

Ejemplo 8. Péndulo de Foucault

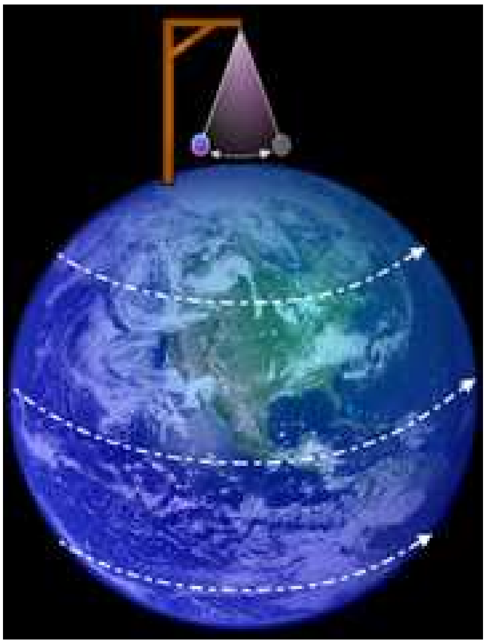


Figura 2. Péndulo de Foucault en el Polo Norte. El péndulo oscila en un plano constante en el espacio, mientras que la Tierra gira por debajo de él.

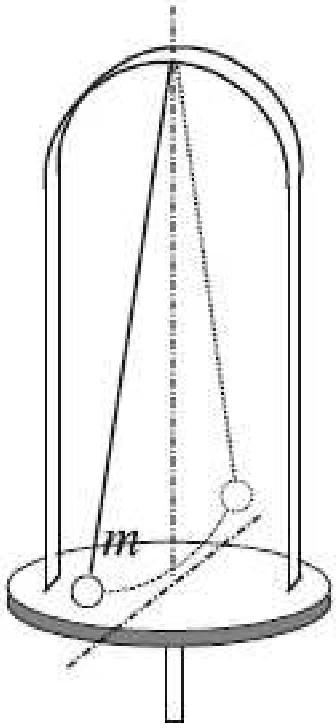
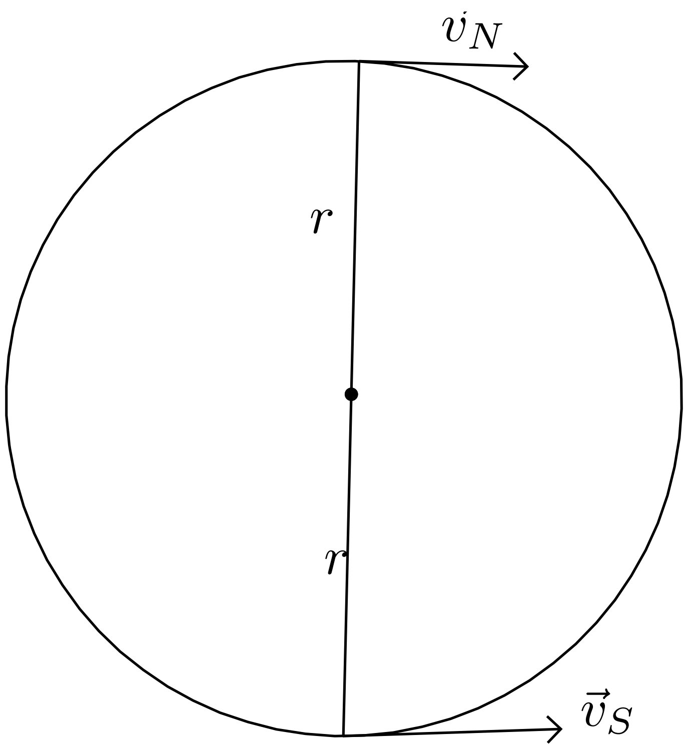


Figura 3. Esquema de un dispositivo para ilustrar el fundamento del péndulo de Foucault

El plano de movimiento del péndulo no es “arrastrado” por la Tierra.

Esta propiedad de la inalterabilidad del plano de las oscilaciones del péndulo fue utilizada por el físico francés Bernard León Foucault (1819-68) para comprobar el movimiento de rotación de la Tierra en torno a su eje y demostrar que la Tierra no constituye una referencial inercial. Foucault realizó públicamente su experiencia en 1851, bajo la cúpula del Panteón de París, utilizando una masa de 28 kg suspendida de un hilo de 70 m de longitud. El período de un péndulo de esa longitud es de unos 17 s. La suspensión del extremo superior del hilo permitía al péndulo oscilar con igual libertad en todas las direcciones. Alrededor del punto del suelo que estaba directamente debajo del punto de suspensión se dispuso una balsa circular, llena de arena, de unos 3 m de radio, de modo que una aguja metálica colocada en la parte inferior de la masa pendular barría la arena en cada oscilación. Se vio con toda claridad que, en oscilaciones sucesivas, el plano de oscilación del péndulo rotaba en el sentido de las agujas del reloj. En una hora el plano de oscilación del péndulo giraba unos 11°, y la circunferencia se completaba en algo más de 32 horas.

Miremos en un instante dado el plano del péndulo teniendo como centro la colatitud de París.



La arena que está al Norte está girando con velocidad

$$v_N = \dot{\phi}\, R \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{r}{R}\right) \approx \dot{\phi}\, R \operatorname{sen}\theta - \dot{\phi}\, r \cos\theta$$

La arena que está al Sur está girando con velocidad

$$v_S = \dot{\phi}\, R \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{r}{R}\right) \approx \dot{\phi}\, R \operatorname{sen}\theta + \dot{\phi}\, r \cos\theta$$

Desde el punto de vista del sistema inercial atado al péndulo, la arena está girando con velocidad angular ω

$$\omega = \dot{\phi} \cos\theta$$

El período T de rotación de la arena es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{24}{\cos\theta}\text{horas}$$

En el Ecuador,$\theta = \frac{\pi}{2}$, el período es infinito.