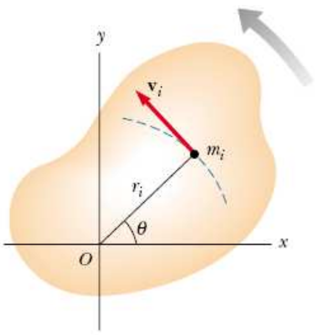
Dinámica del cuerpo rígido: momento de inercia, aceleración angular.

En un sólido rígido las distancias relativas de sus puntos se mantienen constantes.

Los puntos del sólido rígido se mueven con velocidad angular constante

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



Nota 1. $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ es el símbolo de Kronecker

Energía Cinética:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}^{\,2} \vec{r}_i^{\,2} - (\vec{\omega} . \vec{r}_i)^2) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta} -$$
$$r_{i\alpha}r_{i\beta})\omega_\alpha\omega_\beta$$

$$E = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$$

Tensor de inercia:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_i m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha}r_{i\beta})$$

$$\begin{aligned} (A\times B)(C\times D) &= \epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{iln}C_lD_n = \\ (\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl})A_jB_kC_lD_n &= A.\mathrm{C}B.D - A.\mathrm{D}B.C \end{aligned}$$

Momento de Inercia

Rotación alrededor del eje z:

$$E = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

I_3 es el momento de inercia respecto al eje z:

$$I_3 = T_{33} = \sum_i m_i d_i^2, d_i = \text{distancia del punto } i \text{ al eje } z$$

Ejercicio 1. Encontrar I_1 e I_2.

Problema 1. Considere una molécula de Oxígeno (O2) rotando en el plano xy alrededor del eje z. El eje de rotación pasa a través del centro de la molécula, perpendicular a su longitud. La masa de cada átomo de Oxígeno es 2.66 10^{-26} kg, y a temperatura ambiente la separación promedio entre los dos átomos es $d = 1.21\times10^{-10}$m.(Los átomos se suponen puntuales).

(a) Calcule el momento de inercia de la molécula alrededor del eje z. R:1.95×10^{-46}kg $- m^2$.

$$I = m(2d^2/4) = md^2/2 = 2.66x1.21^2x10^{-46}/2$$

(b) Si la velocidad angular de la molécula alrededor del eje z es 4.60×10^{12} rad/s, encuentre la energía cinética de rotación.R:$2.06\times10^{-21}J$

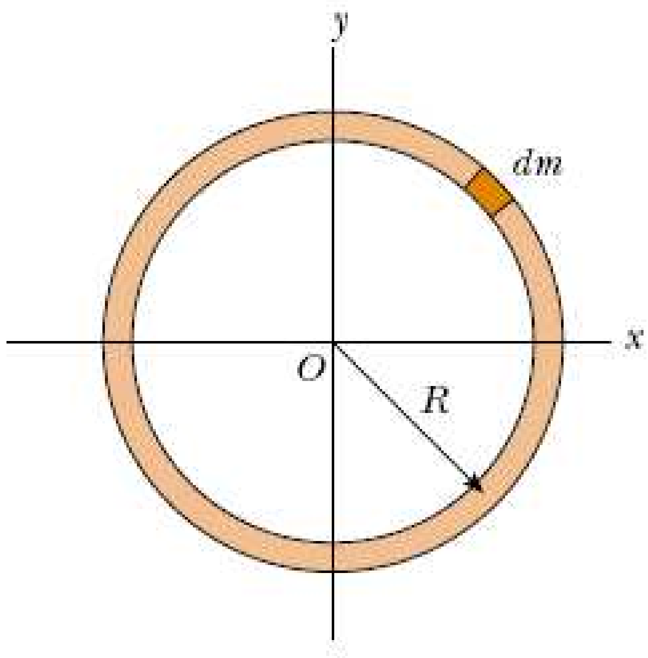
Cálculo de Momentos de Inercia

Consideremos un sólido de densidad ρ, el momento de inercia respecto a un eje fijo es:

$$I = \sum_i \rho(x_i)d(x_i)^2 d^3x_i \rightarrow \int d^3x\rho(\vec{x})d(\vec{x})^2 = \int dm(\vec{x})\, d^2(\vec{x})$$

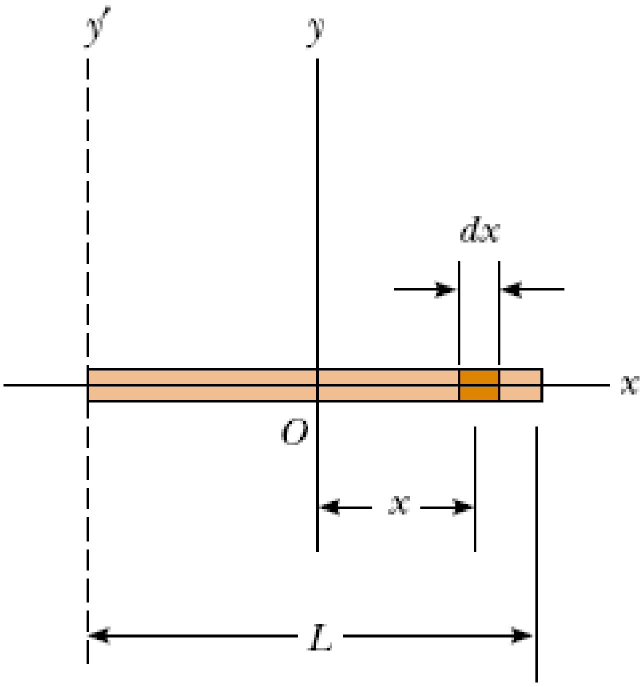
$\vec{x}$ puede ser un vector uni,bi o tridimensional.

Ejercicio 2. Encuentre el momento de inercia de una circunsferencia con masa M, uniformemente distribuida,y radio R, respecto a un eje perpendicular a la circunsferencia que pasa por su centro.



$$I = R^2 \int dm = MR^2$$

Ejercicio 3. Barra uniforme de largo L y masa M.

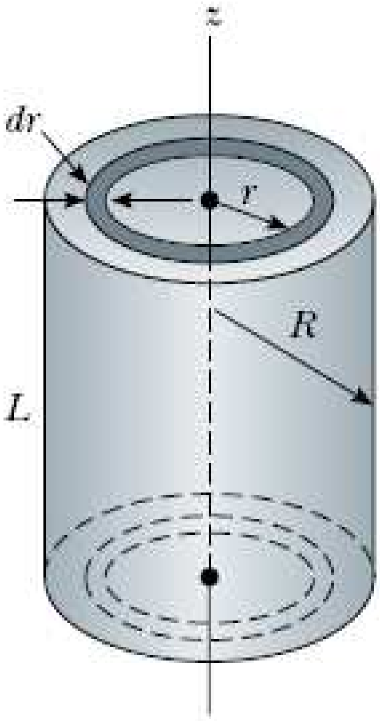


$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \rho x^2 = 2\rho \frac{L^3}{24} = \rho \frac{L^3}{12}$$

$$M = \rho L,\, \rho = \frac{M}{L}$$

$$I = M\frac{L^2}{12}$$

Ejercicio 4. Cilindro uniforme de radio R,masa M y largo L.



$$dm = 2\pi r\,dr\,dz\,\rho,\; I = \rho\int 2\pi r\,dr\,dz\,r^2 =$$

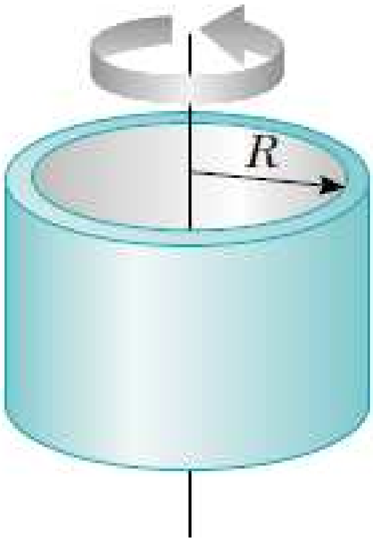
$$2\pi\rho L\int_0^R dr\,r^3 = 2\pi\rho L\frac{R^4}{4}$$

$$M = \int 2\pi r\,dr\,dz\,\rho = 2\pi L\rho\int_0^R dr\,r \;= 2\pi L\rho\frac{R^2}{2}$$

$$M = \pi L\rho R^2$$

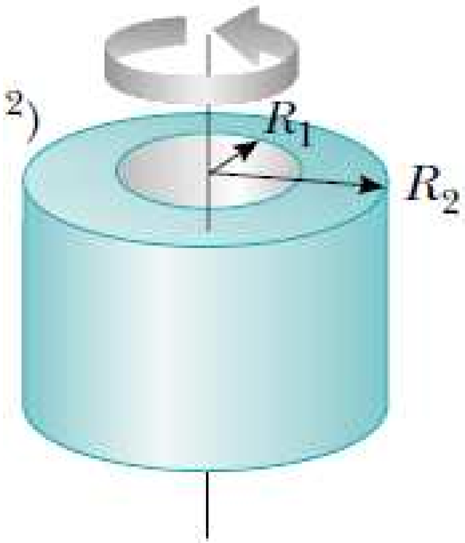
$$I = 2\pi\frac{M}{\pi L R^2}L\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

Ejercicio 5. Casquete cilíndrico



$$I = MR^2$$

Ejercicio 6. Cilindro hueco



$$dm = 2\pi r\,dr\,dz\,\rho, I = \rho \int 2\pi r\,dr\,dz\,r^2 =$$

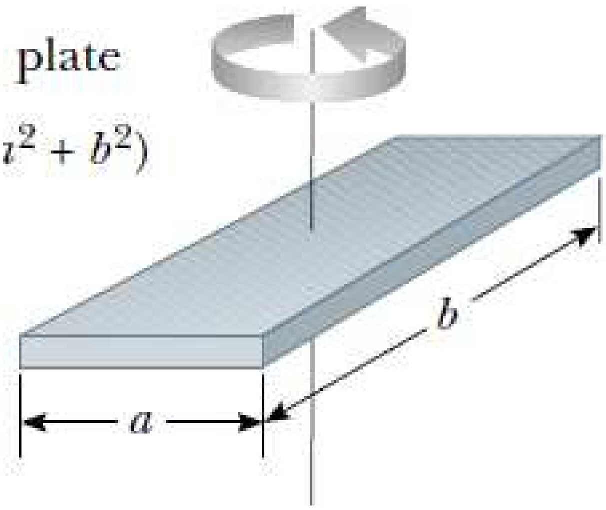
$$2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} dr\,r^3 = 2\pi\rho L \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4}$$

$$M = \int 2\pi r\,dr\,dz\,\rho = 2\pi L\rho \int_{R_1}^{R_2} dr\,r \quad = 2\pi L\rho \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2}$$

$$M = \pi L\rho(R_2^2 - R_1^2)$$

$$I = 2\pi \frac{M}{\pi L\,(R_2^2 - R_1^2)} L \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{1}{2} M\,(R_2^2 + R_1^2)$$

Ejercicio 7. Tablilla rectangular de lados a, b



$$dm = \rho dx dy$$

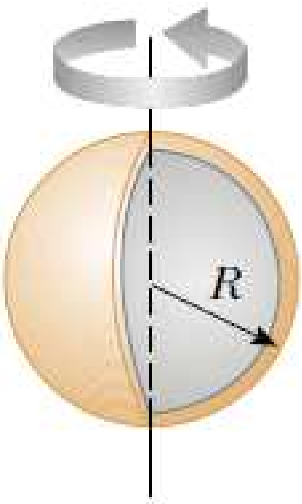
$$I = \rho \int dx dy (x^2 + y^2) = \rho \left(b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx x^2 + a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy y^2 \right) =$$

$$2\rho \left(b \frac{a^3}{24} + a \frac{b^3}{24} \right) = \rho \left(b \frac{a^3}{12} + a \frac{b^3}{12} \right)$$

$$M = \rho a b$$

$$I = \frac{M \left(b \frac{a^3}{12} + a \frac{b^3}{12} \right)}{ab} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Ejercicio 8. Casquete esférico de radio R.



$$dm = \rho R^2 \mathrm{sen}\, \theta d\theta d\phi$$

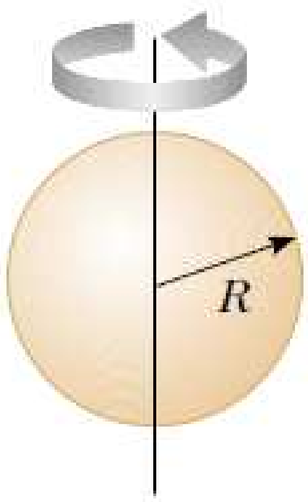
$$I = \rho R^2 \int \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi (R \operatorname{sen}\theta)^2 \;= 2\pi\rho R^4 \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}^3\theta \;=$$

$$2\pi\rho R^4 \int_{-1}^{1} du(1-u^2) = \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \qquad\qquad u = \cos\theta$$

$$M = 4\pi R^2 \rho$$

$$I = \frac{8}{3}\pi \frac{M}{4\pi R^2} R^4 = \frac{2}{3} M R^2$$

Ejercicio 9. Esfera sólida, alrededor del eje z



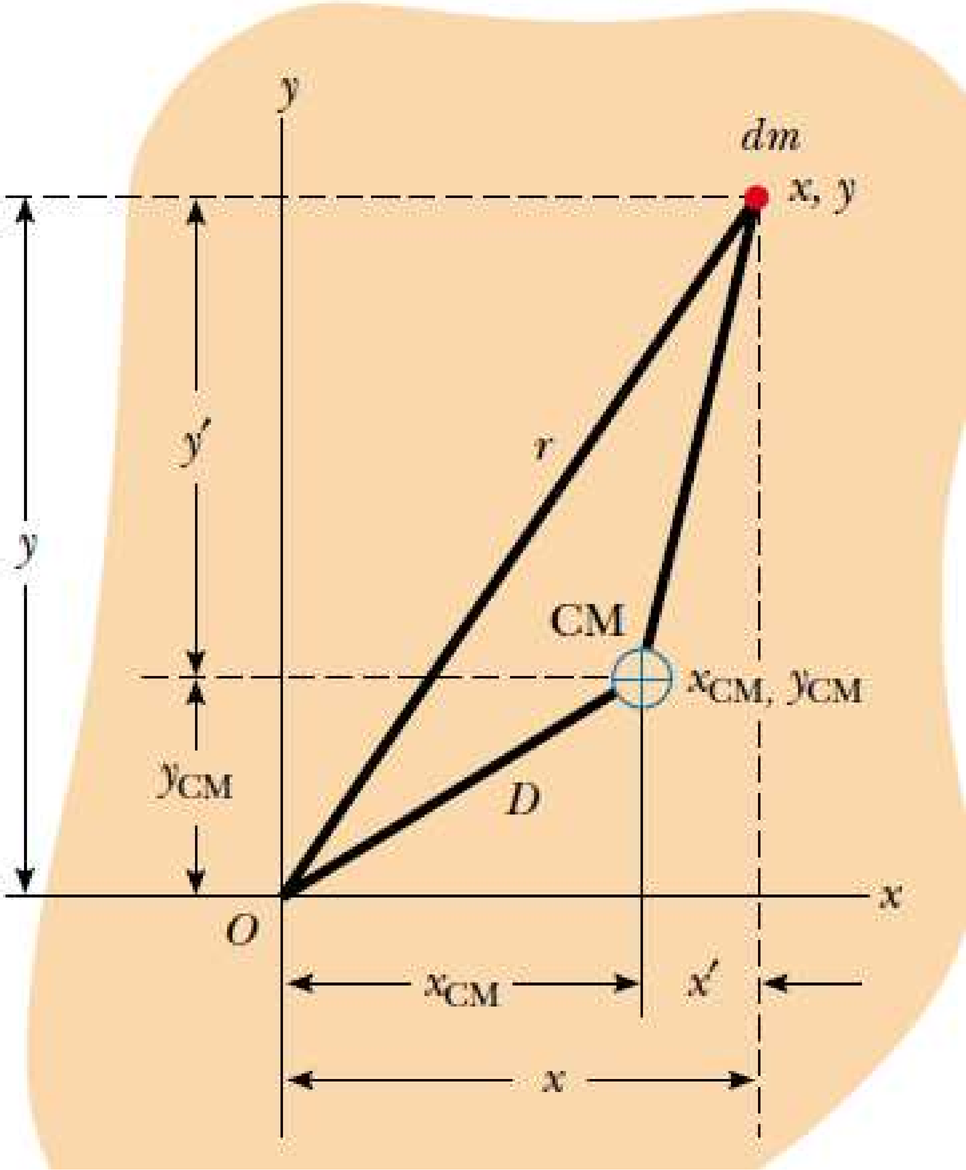
$$I = \frac{2}{3}\rho 4\pi \int_0^R r^2\, dr\, r^2 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5$$

$$M = \rho \int 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$I = \frac{8\pi}{15}\frac{3M}{4\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

Teorema de los ejes paralelos

$$I = I_{\mathrm{CM}} + M D^2$$



$$I = \int dm(x^2 + y^2) \quad x = x_{\mathrm{CM}} + x' \quad y = y_{\mathrm{CM}} + y'$$

$$I = \int dm(x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2)$$

$$+ \int dm\big(x'^2 + y'^2\big) + 2x_{\mathrm{CM}} \int dm x' + 2y_{\mathrm{CM}} \int dm y' =$$
$$MD^2 + I_{\mathrm{CM}} + 0$$

Ejercicio 10. Encuentre el momento de inercia de una barra de largo L y masa M alrededor de un eje perpendicular a la barra que pasa por un extremo.

$$I = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Momento Angular Total:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i v_i \quad = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$\sum_i m_i(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \omega . r_i) \quad = \sum_i m_i(r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta})\omega_\beta$$

$$L_\alpha = T_{\alpha\beta}\omega_\beta$$

$$A \times (B \times C) = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{kln} B_l C_n =$$
$$(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}) A_j B_l C_n =$$
$$B_i A.C - C_i A.B$$

Rotación respecto al eje z

$$L_3 = I_3 \omega_3$$

Ecuación de Movimiento

Los momentos de inercia de un sólido rígido son independientes del tiempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$\dot{L}_3 = I_3 \dot{\omega}_3 = \quad I_3 \alpha_3$$

Aceleración angular:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$$

Nota 2. En general

$$\dot{L}_a = T_{ab}\alpha_b$$

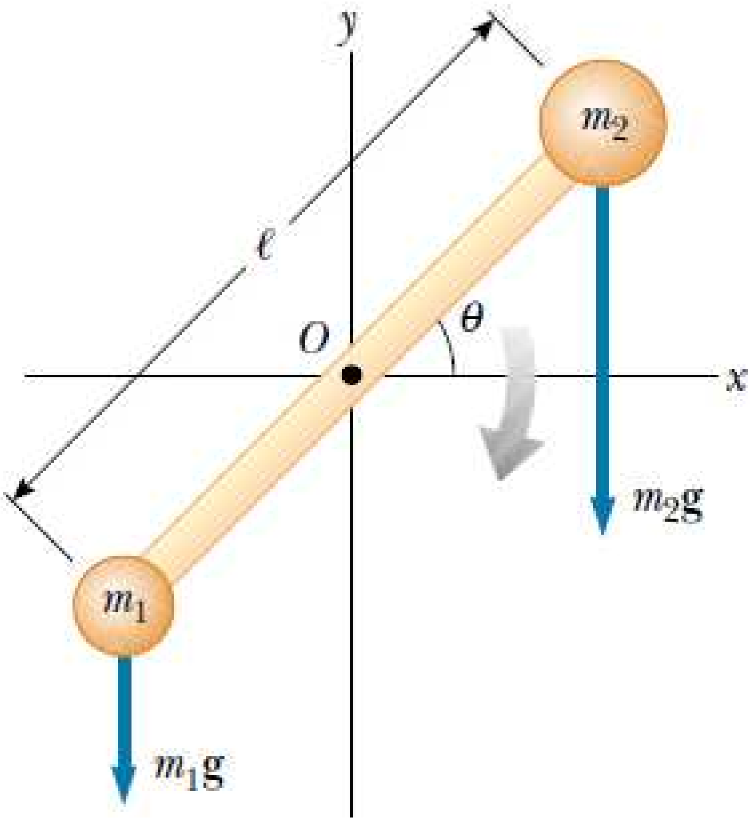
Ejercicio 11. Una varilla rígida de masa M y longitud l rota sin fricción alrededor de su centro (Fig.). Dos partículas de masas m_1 y m_2 se pegan a sus extremos. La combinación rota en un plano vertical con velocidad angular ω.

(a) Encontrar la magnitud del momento angular del sistema.

$$L = I\omega$$

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

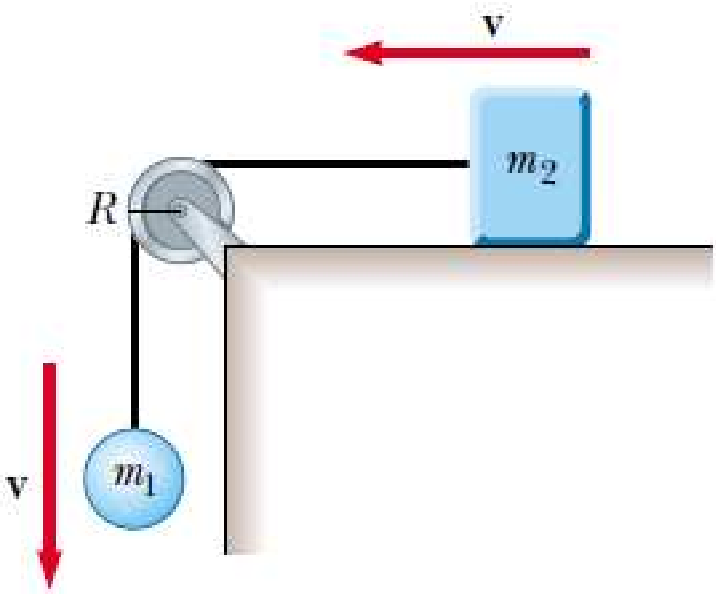
(b) Encontrar la aceleración angular del sistema cuando la varilla hace un ángulo θ con la horizontal.



$$\tau = (m_2 - m_1)g\,\frac{l}{2}\cos\theta + Mg \times 0$$

$$\alpha = \frac{(m_2 - m_1) g \cos\theta}{\frac{l}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}$$

Ejercicio 12.



$$L = m_1 v R + m_2 v R + I\frac{v}{R}$$

$$(\text{torque externo}) m_1 g R = \frac{dL}{dt} \quad = (m_1 + m_2) R a + I\,\frac{a}{R}$$

$$a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}$$

Ejercicio 13. Una estrella rota alrededor de un eje que pasa por su centro con un período de 30 días. Después que la estrella se transforma en supernova, su centro de 10^4km.colapsa para formar una estrella de neutrones, de radio 3 km. Cuál es el período de rotación de la estrella de neutrones?

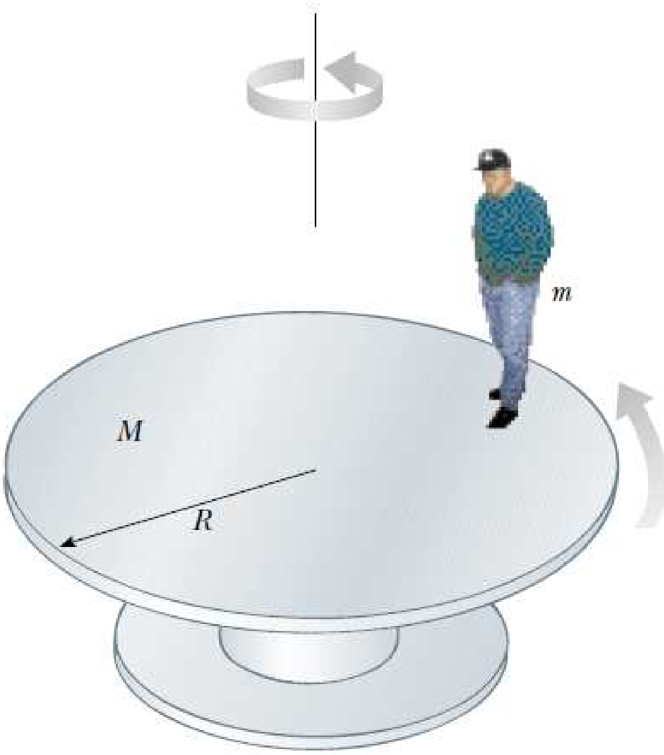
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I_i = \frac{2}{5} M R_i^2 \qquad\qquad I_f = \frac{2}{5} M R_f^2$$

$$\frac{2\pi}{T_i} I_i = \frac{2\pi}{T_f} I_f \quad T_f = T_i \frac{I_f}{I_i} = T_i \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2$$

$$T_f = .23s$$

Ejercicio 14. Una plataforma horizontal con forma de disco de radio $R = 2m$. y masa $M = 100$kg, rota en un plano horizontal sin roce alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un estudiante de masa $m = 60$kg. camina desde el borde de la plataforma hasta una distancia $r_f = 0.50m$ del centro. Si la velocidad angular de la plataforma cuando el estudiante estaba en el borde era 2 rad/s, encuentre la velocidad angular al final.



$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i\left(\frac{I_i}{I_f}\right)$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

$$\omega_f = 2\frac{(50\times 4 + 60\times 4)}{50\times 4 + 60\times 0.25} = 2\frac{440}{215} = 4.1\text{rad}/s$$

Ejercicio 15. Rueda en rotación

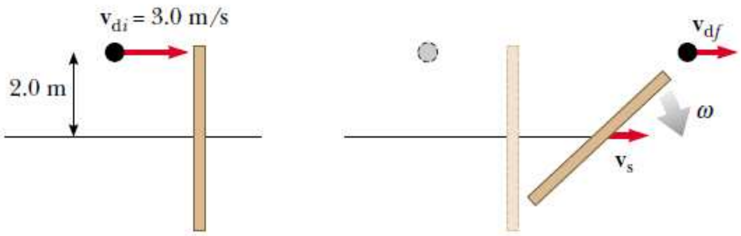
$$L_i = L_f = L_{\text{rueda}}$$
$$L_f = L_{\text{estudiante}} - L_{\text{rueda}}$$
$$L_{\text{estudiante}} = 2 L_{\text{rueda}}$$

Ejercicio 16. Descomponga la energía cinética de un cuerpo rígido en energía cinética de traslación del CM y energía cinética de rotación alrededor del CM.

$$\begin{aligned} K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}_i{}')^2 &= \\ \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^{\,2} + K' + \vec{v}_{\text{CM}} . \sum_i m_i \vec{v}_i{}' &= \\ \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^{\,2} + K' & \\ K' = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta & \end{aligned}$$

Ejercicio 17. Disco y palo. Un disco de masa $m_d = 2$kg. impacta un palo de masa $m_p = 1$kg. que reposa sobre una superficie de hielo sin roce, con una velocidad $v_{di} = 3m/s$. Suponga que el choque es elástico.

Encuentre la velocidad de traslación del disco, del palo y la velocidad de rotación del palo después del choque.$I_p = 1.33\text{kg} - m^2$ alrededor de su centro de masa. La longitud del palo es $l = 4m$.



$$
\begin{aligned}
m_d v_{di} &= m_p v_s + m_d v_{df} \\
\frac{1}{2} m_d v_{di}^2 &= \frac{1}{2} m_d v_{df}^2 + \frac{1}{2} m_p v_s^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \\
-m_d v_{di} \frac{l}{2} &= -m_d v_{df} \frac{l}{2} + I_p \omega \\
v_{\text{df}} &= 2.3m/s \quad v_s = 1.3m/s \\
\omega &= -2\text{rad}/s
\end{aligned}
$$

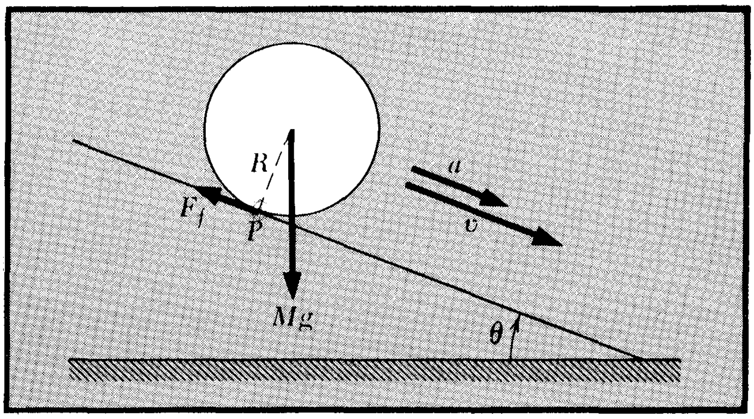
Problema 2. Teorema de los ejes perpendiculares.

El momento de inercia de una lámina rígida y plana respecto a un eje normal a su plano es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares situados en el plano que se cortan en el eje normal.

$$I_3 = \int dm(x^2 + y^2) = \int dm x^2 + \int dm y^2$$

Ejercicio 18. Giro sin deslizamiento. Consideremos, como indica la fig, el giro hacia abajo por un plano incli- nado de un objeto de periferia circular y una distribu- ción simétrica de masa alrededor de su centro. (Puede tratarse de un cilindro sólido, un cilindro hueco, una esfera, etc.)

Rotación alrededor del punto instantáneo de contacto. En cualquier instante el movimiento consiste en una rotación alrededor de P, punto de contacto con la superficie inclinada. La dirección del eje de rotación es constante, aunque su posición avanza a lo largo del plano. La aceleración en el movimiento del cuerpo que rueda se calcula teniendo en cuenta que instantáneamente el movimiento es simplemente una rotación alrededor de un punto en la periferia del objeto. El momento de la fuerza respecto de P debe ser igual a la variación respecto al tiempo del momento cinético alrededor de P (véase figura).



El carácter del movimiento de un cuerpo rodando es, en cualquier Instante, la rotación alrededor del punto instantáneo de contacto P.

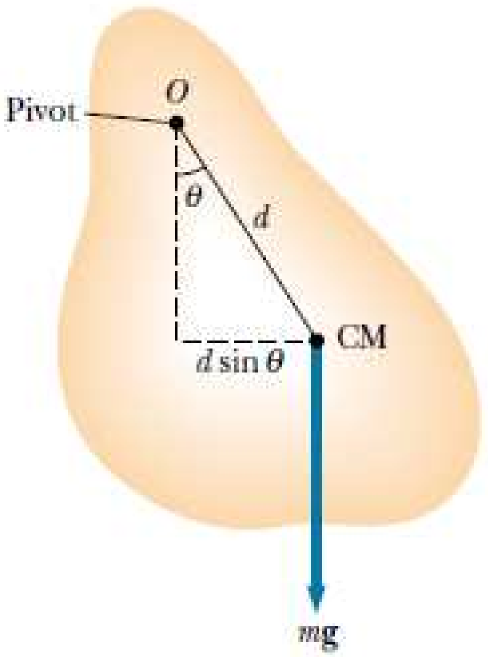
$$L = (MR^2 + I)\omega \;= (MR^2 + I)\frac{v}{R}$$

$$\tau = MgR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{L} = \frac{MR^2 + I}{R}a = MgR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{MR^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Ejercicio 19. Péndulo físico



$$\tau = -m g d \,\mathrm{sen}\theta = I_o \ddot{\theta} \qquad\qquad I_o = I_{\mathrm{CM}} + M d^2$$
$$I_o \ddot{\theta} = -m g d \theta \quad \theta \ll 1$$
$$\omega = \sqrt{\frac{m g d}{I_o}}$$

Permite determinar empíricamente I_o.

Momentos y productos de inercia:Ejes principales y ecuación de Euler

El tensor de inercia es, visto como matriz:

$$T = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Como ya sabemos, los elementos diagonales se llaman momentos de inercia.

Los elementos no diagonales son los productos de inercia.

En todo sólido rígido, podemos encontrar un conjunto de ejes(ejes principales) donde T es diagonal.

El momento angular del sólido respecto a los ejes principales es:

$$\vec{L} = I_1\omega_1\hat{x} + I_2\omega_2\hat{y} + I_3\omega_3\,\hat{z}$$

Los ejes principales están atados al cuerpo y dependen del tiempo(Movimiento relativo).

$$\dot{\vec{L}} = I_1\alpha_1\hat{x} + I_2\alpha_2\hat{y} + I_3\alpha_3\,\hat{z} + I_1\omega_1\dot{\hat{x}} + I_2\omega_2\dot{\hat{y}} + I_3\omega_3\,\dot{\hat{z}}$$

Recordemos que el cambio temporal de un vector en rotación es:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\dot{\hat{x}} = \vec{\omega} \times \hat{x}$$
$$\dot{\hat{y}} = \vec{\omega} \times \hat{y}$$
$$\dot{\hat{z}} = \vec{\omega} \times \hat{z}$$

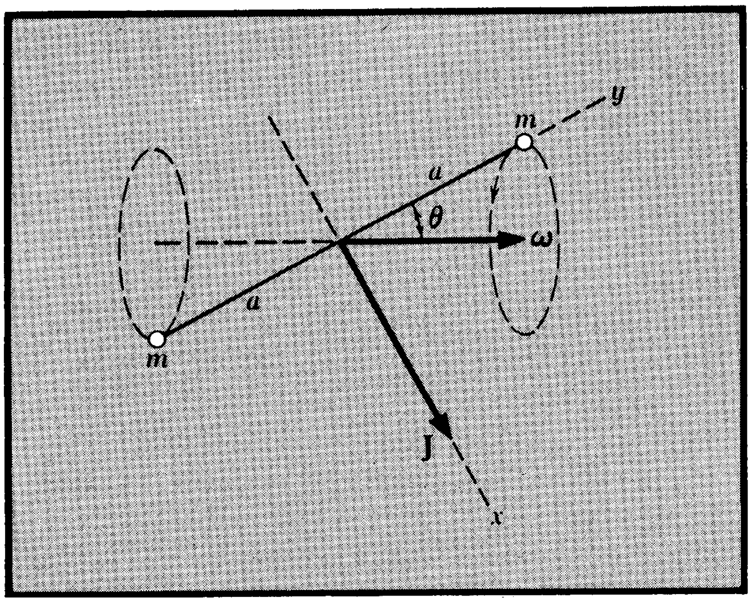
Ecuaciones de Euler:

$$\dot{\vec{L}} = I_1\alpha_1\hat{x} + I_2\alpha_2\hat{y} + I_3\alpha_3\,\hat{z} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$:torque respecto a los ejes principales.

$$\tau_1 = I_1\alpha_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$\tau_2 = I_2\alpha_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1$$
$$\tau_3 = I_3\alpha_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

Ejercicio 20. Rotor rígido de dos partículas. Ejes fijos. Volvamos al sistema de dos masas puntuales unidas por una barra sin peso, que giran alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masas, según un ángulo arbitrario. Consideraremos el problema usando los ejes principales con referencia a la fig. Elegiremos el eje y que coincida con la barra y origen en el centro de masas. El eje x es perpendicular a la barra en el plano determinado por la barra y ω.
El eje z (no indicado) en el instante representado está dirigido hacia el observador. Con esta elección de ejes resulta



$$I_x = 2ma^2$$
$$I_y = 0$$
$$I_z = 2ma^2$$
$$\omega_y = \omega\cos\theta$$
$$\omega_x = \omega\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\omega_z = 0$$
$$J = m a^2 \omega \operatorname{sen}\theta \hat{x}$$

Para mantener la velocidad angular constante debemos aplicar un torque:

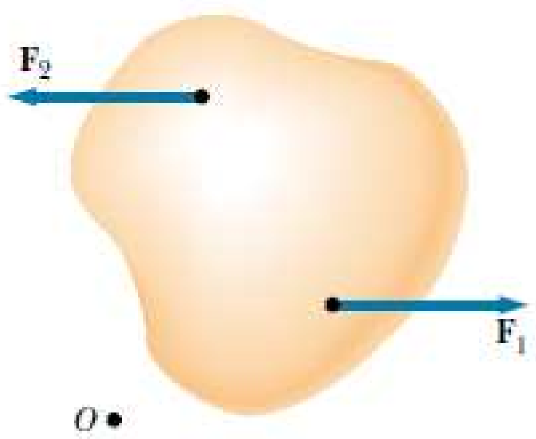
$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{J}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0 \\ \tau_2 &= 0 \\ \tau_3 = -2m a^2 \omega \operatorname{sen}\theta \omega \cos\theta &= \\ -2m a^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta & \end{aligned}$$

Ejercicio 21. Disco circular

Ejercicio 22. Trompo o giróscopo

Equilibrio estático



Condiciones de equilibrio:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{equilibrio traslacional} \tag{1}$$
$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0} \quad \text{respecto a cualquier eje.} \quad \text{equilibrio rotacional}$$

equilibrio translacional:CM se mueve con velocidad $\vec{v}_{\rm cm}$ constante respecto a un sistema inercial.

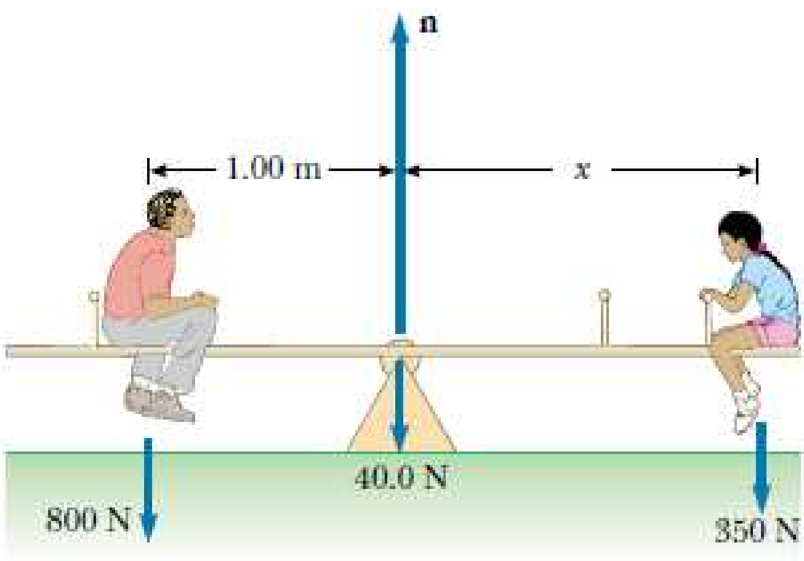
equilibrio rotacional: El cuerpo rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante, respecto a cualquier eje.
Equilibrio estático:$\vec{v}_{\rm cm} = \vec{0} = \vec{\omega}$
Si (1) se satisface, entonces el torque total no depende del punto O.
Sea $\vec{R}$ el vector posición de O' respecto a O.

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{\tau}\,'$$

Ejercicio 23. Balancín
Una tabla uniforme que pesa 40N soporta a un padre y a su hija que pesan 800N y 350N respectivamente. El pivote está bajo el centro de gravedad de la tabla.
Si el padre está a 1m del pivote
(a) Encuentre la fuerza normal que el pivote ejerce sobre la tabla.

$$n - 40 - 800 - 350 = 0$$
$$n = 1190N$$

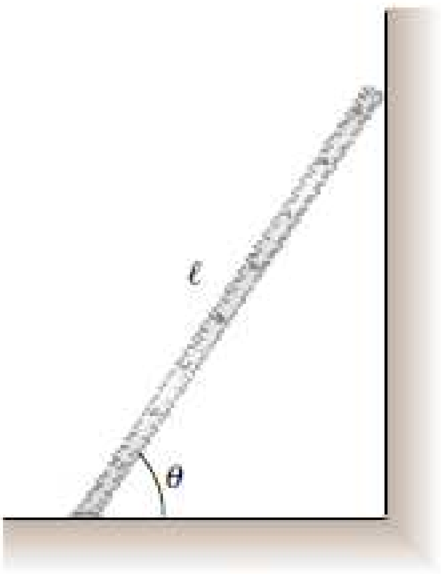


(b) Encuentre donde la niña debe sentarse para equilibrar el balancín.

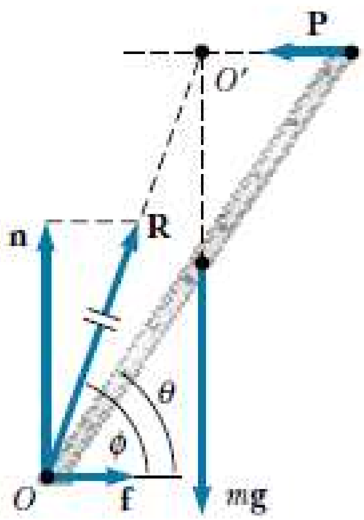
$$800 \times 1 - 350 \times d = 0$$
$$d = \frac{800}{350}m \quad = 2.29m$$

Ejercicio 24. Escalera inclinada

Una escalera uniforme de largo l y peso $mg = 50$N se apoya sobre una pared vertical suave. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y la escalera es $\mu = .4$, encuentre el ángulo mínimo θ_0 para que la escalera no deslice.



(a)



(b)

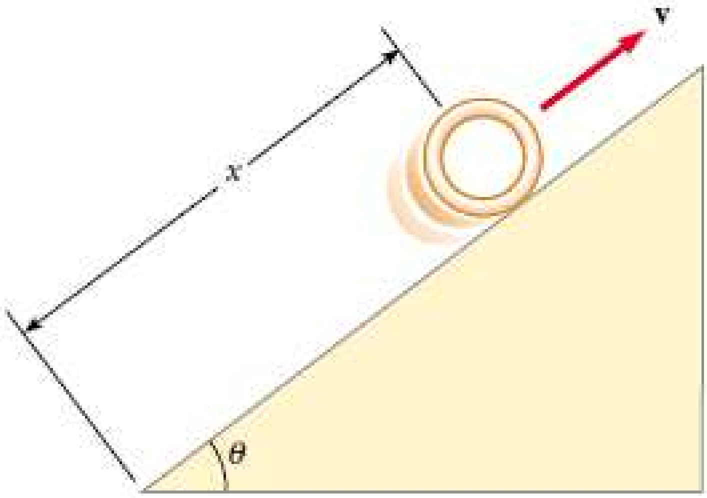
$$mg - n = 0$$
$$\mu n - P = 0 \qquad\qquad f_r \leqslant \mu n$$
$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - Pl\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$
$$\tan\theta = \frac{mg}{Pl} \quad = \frac{1}{2\mu} \quad = 1.25$$
$$\theta_0 = 51^\circ$$

Ejercicio 25. p357

Un anillo plano de masa $M = 2.40$ kg, radio interior $R_i = 6.00$ cm, y radio exterior $R_e = 8.00$ cm rueda(sin deslizarse) subiendo un plano inclinado que hace un ángulo $\theta = 36.9°$(Fig.). Cuando el anillo está en la posición $x = 2.00$ m sobre el plano, su velocidad $v = 2.80$ m/s. El anillo sigue su ascenso y luego se devuelve, sin salirse del plano inclinado.

(a) Encuentre el momento de inercia del anillo

(b) Encuentre la distancia x_f de máximo recorrido.



$$I = \int dm r^2 = 2\pi\rho \int_{R_i}^{R_e} dr r^3 = \frac{\pi}{2}\rho(R_e^4 - R_i^4)$$
$$M = \pi\rho(R_e^2 - R_i^2)$$
$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}M(R_e^2 + R_i^2)$$

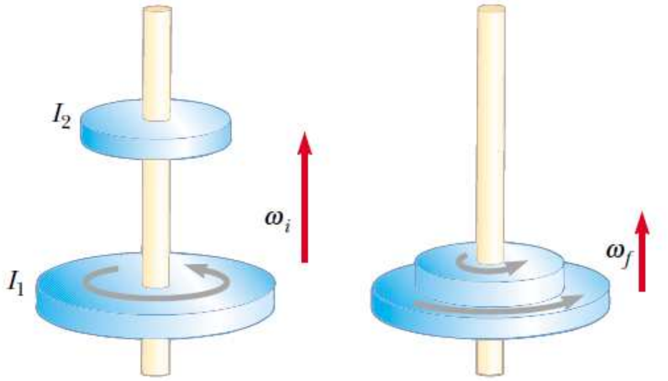
$$(b)\ L = I\omega = (I_{\mathrm{CM}} + MR_e^2)\frac{v}{R_e}$$
$$(I_{\mathrm{CM}} + MR_e^2)\frac{a}{R_e} = Mg \operatorname{sen}\theta R_e$$
$$v = v_0 - at$$
$$t_f = \frac{v_0}{a}$$
$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$
$$x_f = x_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

Ejercicio 26. p360

Un cilindro con momento de inercia I_1 rota alrededor de un eje vertical sin fricción, con velocidad angular ω_i . Un segudo cilindro con momento de inercia I_2 y que inicialmente no rota cae sobre el primer cilindro (Fig.). Debido a la fricción entre las superficies de contacto, los dos cilidros finalmene alcanzarán la misma volocidad angular ω_f .

(a) Calcule ω_f.

(b) Muestre que la energía cinética del sistema decrece con esta interacción y calcule el cuociente entre la energía cinética final y la energía cinética inicial.



Sólo hay torques internos. Se conserva el momentum angular:

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$(a)\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

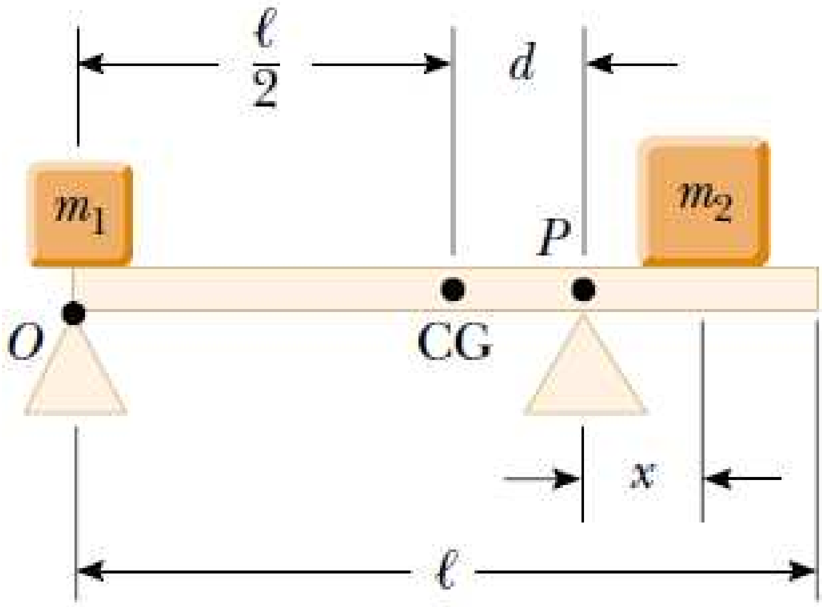
$$(b)K_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 \qquad K_i = \frac{1}{2}I_1\omega_i^2$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

Ejercicio 27. p385

Una barra uniforme de masa m_b y longitud l soporta bloques de masas m_1, m_2 en dos posiciones, como se muestra en la figura. La barra se sostiene en dos puntos.

Para cuál valor de x la barra se encontrará balanceada en P tal que la fuerza normal en O se anula?



Fuerzas:

$$n_O + n_P - m_b g - m_1 g - m_2 g = 0$$

Torques:

$$m_2 g x - m_b g d - m_1 g\left(\frac{l}{2} + d\right) + n_O\left(\frac{l}{2} + d\right) = 0 \qquad n_O = 0$$

$$x = \frac{m_b d + m_1\left(\frac{l}{2} + d\right)}{m_2}$$

Ejercicio 28. p423

Un péndulo físico en la forma de un cuerpo plano realiza un movimiento armónico simple con frecuencia $f =$ 0.450 Hz. Si el péndulo tiene masa $m =$ 2.20 kg y el pivote está a una distancia $d = 0.350$ m del CM, encuentre el momento de inercia I del péndulo.

$$I\ddot{\theta} = -mgd \operatorname{sen}\theta \sim -mgd\theta \qquad \theta \ll 1$$

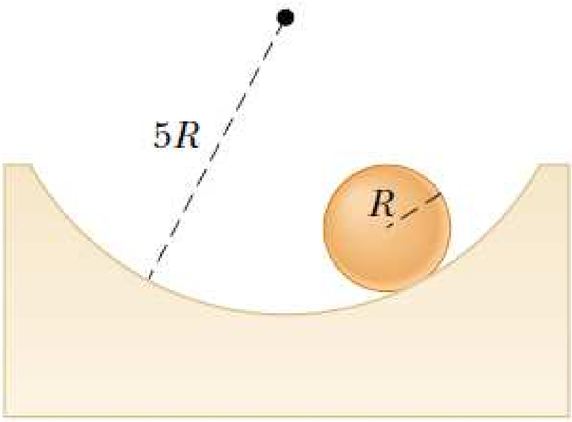
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = 2\pi f$$

$$I = \frac{mgd}{4\pi^2 f^2}$$

$$I = \frac{2.2x9.8x.35}{4x3.14^2x.45^2} = \frac{7.55}{7.99} = 0.95$$

Ejercicio 29. p425

Una esfera sólida de radio R rueda sin deslizamiento en un agujero cilíndrico de radio R_c=5R, como se muestra en la Figure P13.56. Muestre que, para pequeños desplazamientos desde el punto de equilibrio, perpendiculares a la longitud del agujero, la esfera tiene un movimiento armónico simple con período $T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$.



$$L = I\frac{v}{R} = (I_{\text{CM}} + MR^2)\frac{v}{R}$$
$$\tau = -MgR\,\text{sen}\,\theta = -MgR\theta$$
$$(I_{\text{CM}} + MR^2)\frac{a}{R} = -MgR\theta$$
$$a = 4R\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR}{4(I_{\text{CM}} + MR^2)}\theta$$
$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{28R}\theta$$
$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = \frac{2\pi}{T}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$