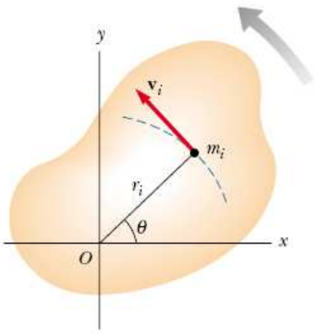
Dinámica del cuerpo rígido: momento de inercia, aceleración angular.

En un sólido rígido las distancias relativas de sus puntos se mantienen constantes.

Los puntos del sólido rígido se mueven con velocidad angular constante

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



Energía Cinética:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} . \vec{r}_i)^2) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha}r_{i\beta})\omega_\alpha\omega_\beta$$

$$E = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$$

Tensor de inercia:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_i m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha}r_{i\beta})$$

$$\begin{aligned}(A\times B)(C\times D) &= \epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{iln}C_lD_n = \\ (\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl})A_jB_kC_lD_n &= A.\mathrm{C}B.D - A.\mathrm{D}B.C\end{aligned}$$

Momento de Inercia

Rotación alrededor del eje z:

$$E = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

I_3 es el momento de inercia respecto al eje z:

$$I_3 = T_{33} = \sum_i m_i d_i^2,\, d_i = \text{distancia del punto } i \text{ al eje } z$$

Ejercicio 1. Encontrar I_1 e I_2.

Problema 1. Considere una molécula de Oxígeno (O2) rotando en el plano xy alrededor del eje z. El eje de rotación pasa a través del centro de la molécula, perpendicular a su longitud. La masa de cada átomo de Oxígeno es 2.66 10^{-26} kg, y a temperatura ambiente la separación promedio entre los dos átomos es $d = 1.21 \times 10^{-10}$m.(Los átomos se suponen puntuales).

(a) Calcule el momento de inercia de la molécula alrededor del eje z. R:1.95×10^{-46}kg $- m^2$.

$$I = m(2d^2/4) = md^2/2 = 2.66x1.21^2x10^{-46}/2$$

(b) Si la velocidad angular de la molécula alrededor del eje z es 4.60×10^{12} rad/s, encuentre la energía cinética de rotación.R:$2.06 \times 10^{-21} J$

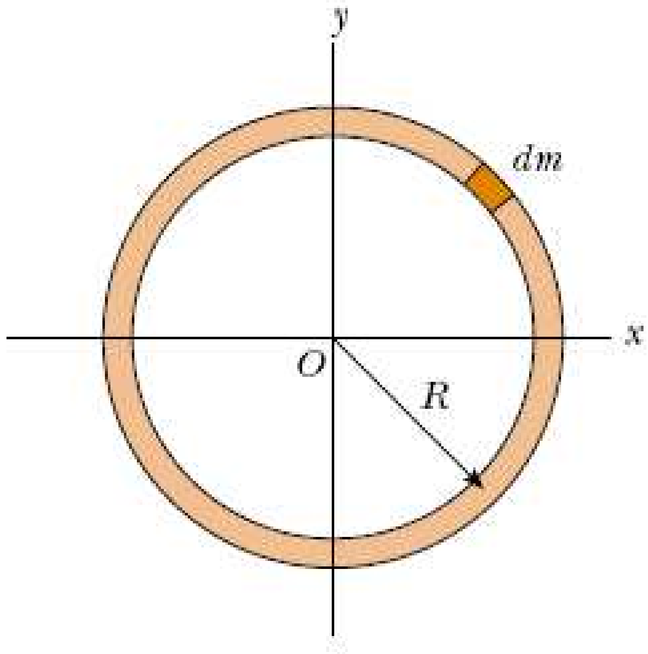
Cálculo de Momentos de Inercia

Consideremos un sólido de densidad ρ, el momento de inercia respecto a un eje fijo es:

$$I = \sum_i \rho(x_i) d(x_i)^2 d^3 x_i \rightarrow \int d^3 x \rho(\vec{x}) d(\vec{x})^2 = \int dm(\vec{x})\, d^2(\vec{x})$$

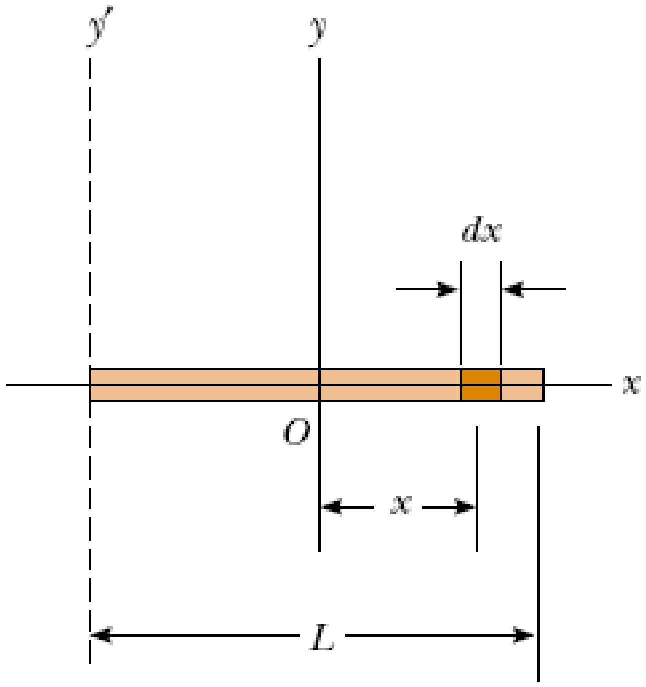
$\vec{x}$ puede ser un vector uni,bi o tridimensional.

Ejercicio 2. Encuentre el momento de inercia de una circunsferencia con masa M, uniformemente distribuida,y radio R, respecto a un eje perpendicular a la circunsferencia que pasa por su centro.



$$I = R^2 \int dm = MR^2$$

Ejercicio 3. Barra uniforme de largo L y masa M.

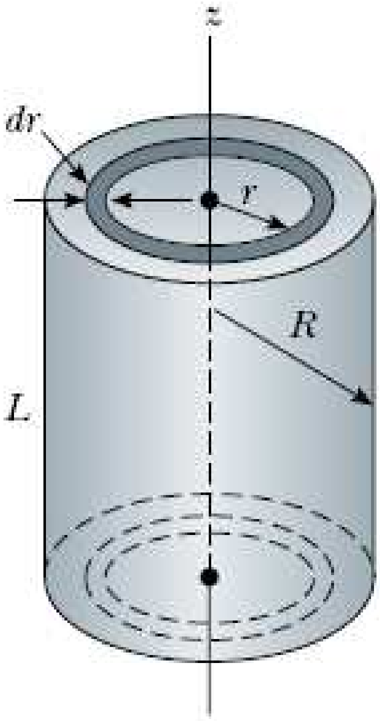


$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \rho x^2 = 2\rho \frac{L^3}{24} = \rho \frac{L^3}{12}$$

$$M = \rho L, \, \rho = \frac{M}{L}$$

$$I = M\frac{L^2}{12}$$

Ejercicio 4. Cilindro uniforme de radio R,masa M y largo L.



$$dm{=}2\pi r\,dr\,dz\,\rho, I = \rho\int\ 2\pi r\,dr\,dz r^2 =$$

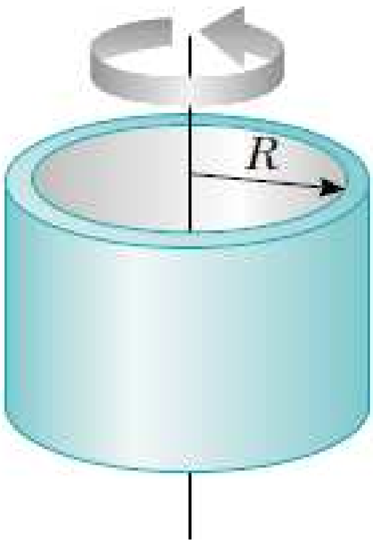
$$2\pi\rho L\int_0^R\ dr r^3 = 2\pi\rho L\frac{R^4}{4}$$

$$M = \int\ 2\pi r\,dr\,dz\,\rho = 2\pi L\rho\int_0^R\ dr r\ \ {=}2\pi L\rho\frac{R^2}{2}$$

$$M = \pi L\rho R^2$$

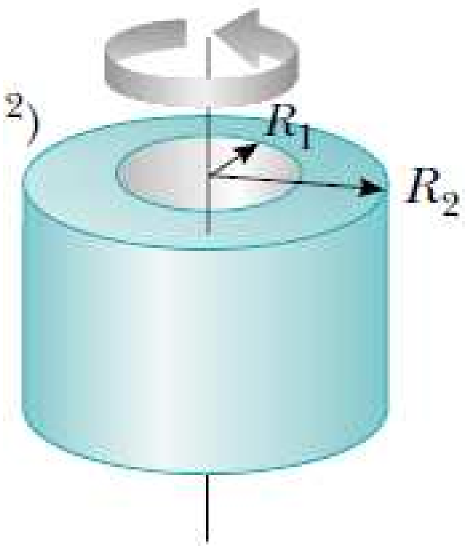
$$I = 2\pi\frac{M}{\pi L R^2}L\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

Ejercicio 5. Casquete cilíndrico



$$I = MR^2$$

Ejercicio 6. Cilindro hueco



$$dm = 2\pi r\,dr\,dz\,\rho, I = \rho\int 2\pi r\,dr\,dz\,r^2 =$$

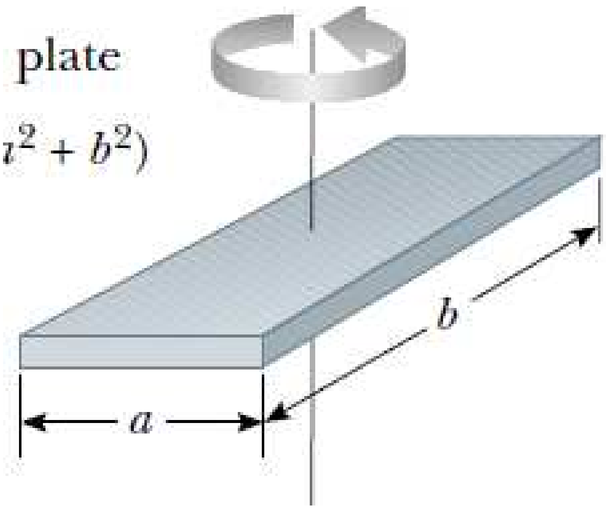
$$2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2} dr\,r^3 = 2\pi\rho L\frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4}$$

$$M = \int 2\pi r\,dr\,dz\,\rho = 2\pi L\rho\int_{R_1}^{R_2} dr\,r \;= 2\pi L\rho\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2}$$

$$M = \pi L\rho(R_2^2 - R_1^2)$$

$$I = 2\pi\frac{M}{\pi L\,(R_2^2 - R_1^2)}L\frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{1}{2}M\,(R_2^2 + R_1^2)$$

Ejercicio 7. Tablilla rectangular de lados a, b



$$dm = \rho dx dy$$

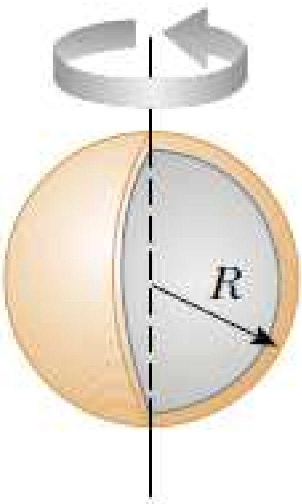
$$I = \rho \int dx dy (x^2 + y^2) = \rho \left(b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx x^2 + a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy y^2 \right) =$$

$$2\rho \left(b \frac{a^3}{24} + a \frac{b^3}{24} \right) = \rho \left(b \frac{a^3}{12} + a \frac{b^3}{12} \right)$$

$$M = \rho a b$$

$$I = \frac{M \left(b \frac{a^3}{12} + a \frac{b^3}{12} \right)}{ab} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Ejercicio 8. Casquete esférico de radio R.



$$dm = \rho R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$$

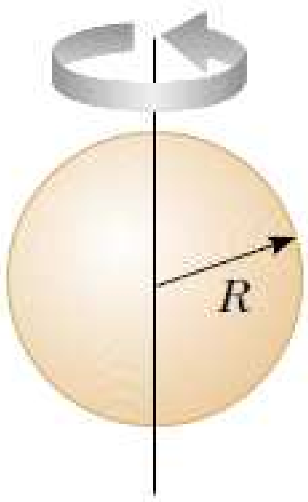
$$I = \rho R^2 \int \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi (R \operatorname{sen}\theta)^2 \;= 2\pi\rho R^4 \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}^3\theta \;=$$

$$2\pi\rho R^4 \int_{-1}^{1} du(1-u^2) = \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \qquad\qquad u = \cos\theta$$

$$M = 4\pi R^2 \rho$$

$$I = \frac{8}{3}\pi \frac{M}{4\pi R^2} R^4 = \frac{2}{3} M R^2$$

Ejercicio 9. Esfera sólida, alrededor del eje z



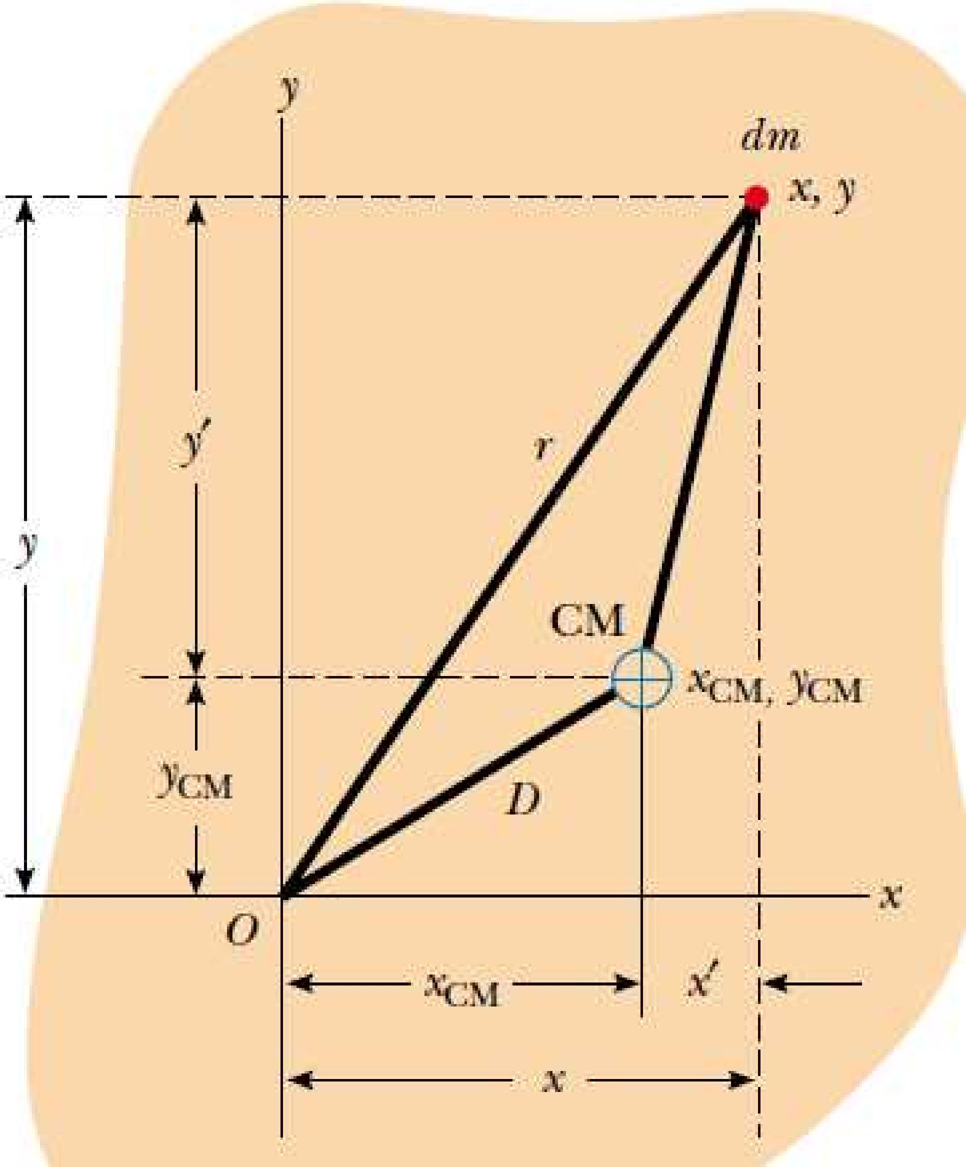
$$I = \frac{2}{3}\rho 4\pi \int_0^R r^2\, dr\, r^2 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5$$

$$M = \rho \int 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$I = \frac{8\pi}{15}\frac{3M}{4\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

Teorema de los ejes paralelos

$$I = I_{\mathrm{CM}} + M D^2$$



$$I = \int dm(x^2 + y^2) \quad x = x_{\text{CM}} + x' \quad y = y_{\text{CM}} + y'$$

$$I = \int dm(x_{\text{CM}}^2 + y_{\text{CM}}^2)$$

$$+ \int dm\big(x'^2 + y'^2\big) + 2x_{\text{CM}} \int dm x' + 2y_{\text{CM}} \int dm y' =$$

$$MD^2 + I_{\text{CM}} + 0$$

Ejercicio 10. Encuentre el momento de inercia de una barra de largo L y masa M alrededor de un eje perpendicular a la barra que pasa por un extremo.

$$I = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Momento Angular Total:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i v_i \quad = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$\sum_i m_i(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \omega . r_i) \; = \sum_i m_i(r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta})\omega_\beta$$

$$L_\alpha = T_{\alpha\beta}\omega_\beta$$

$$A \times (B \times C) = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{kln} B_l C_n =$$

$$(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}) A_j B_l C_n =$$

$$B_i A.C - C_i A.B$$

Rotación respecto al eje z

$$L_3 = I_3 \omega_3$$

Ecuación de Movimiento

Los momentos de inercia de un sólido rígido son independientes del tiempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$\dot{L}_3 = I_3 \dot{\omega}_3 = \; I_3 \alpha_3$$

Aceleración angular:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$$

Nota 1. En general

$$\dot{L}_a = T_{ab} \alpha_b$$

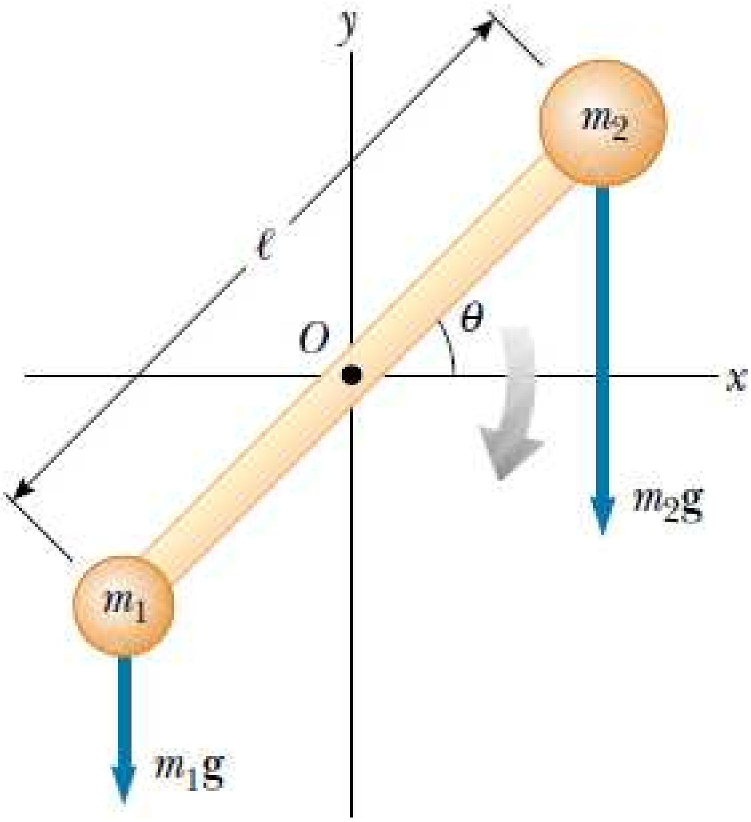
Ejercicio 11. Una varilla rígida de masa M y longitud l rota sin fricción alrededor de su centro (Fig.). Dos partículas de masas m_1 y m_2 se pegan a sus extremos. La combinación rota en un plano vertical con velocidad angular ω.

(a) Encontrar la magnitud del momento angular del sistema.

$$L = I\omega$$

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

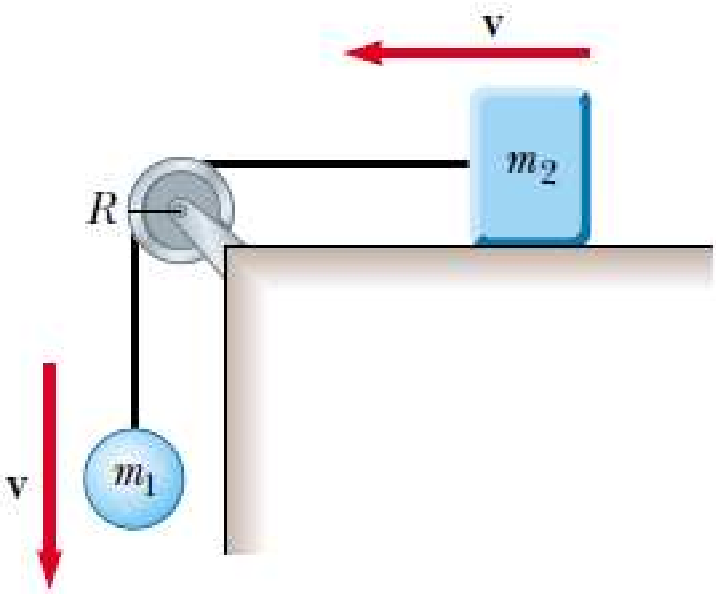
(b) Encontrar la aceleración angular del sistema cuando la varilla hace un ángulo θ con la horizontal.



$$\tau = (m_2 - m_1)g\,\frac{l}{2}\cos\theta + Mg \times 0$$

$$\alpha = \frac{(m_2 - m_1) g \cos\theta}{\frac{l}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}$$

Ejercicio 12.



$$L = m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}$$

$$m_1 g R = \frac{dL}{dt} = (m_1 + m_2) R a + I \frac{a}{R}$$

$$a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}$$

Ejercicio 13. Una estrella rota alrededor de un eje que pasa por su centro con un período de 30 días. Después que la estrella se transforma en supernova, su centro de 10^4km.colapsa para formar una estrella de neutrones, de radio 3 km. Cuál es el período de rotación de la estrella de neutrones?

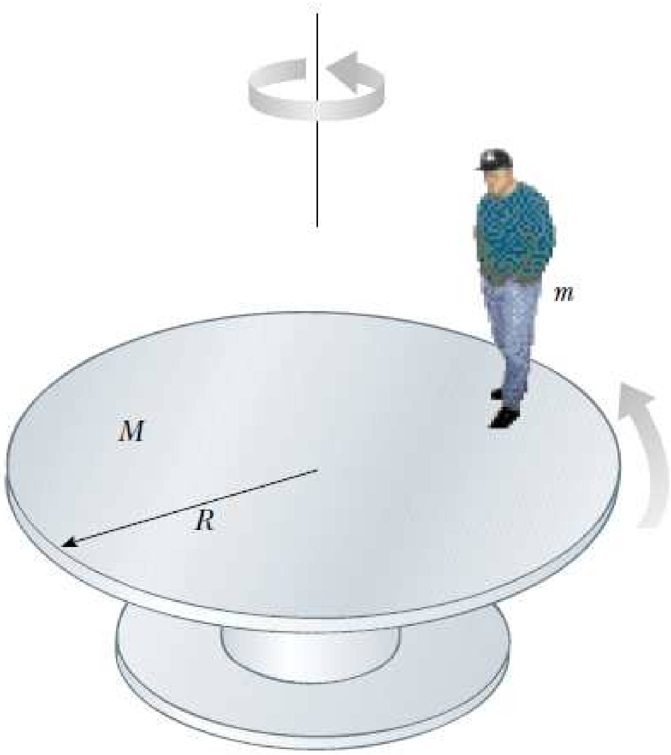
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I_i = \frac{2}{5} M R_i^2 \qquad I_f = \frac{2}{5} M R_f^2$$

$$\frac{2\pi}{T_i} I_i = \frac{2\pi}{T_f} I_f \quad T_f = T_i \frac{I_f}{I_i} = T_i \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2$$

$$T_f = .23s$$

Ejercicio 14. Una plataforma horizontal con forma de disco de radio $R = 2m$. y masa $M = 100$kg, rota en un plano horizontal sin roce alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un estudiante de masa $m = 60$kg. camina desde el borde de la plataforma hasta una distancia $r_f = 0.50m$ del centro. Si la velocidad angular de la plataforma cuando el estudiante estaba en el borde era 2 rad/s, encuentre la velocidad angular al final.



$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{I_i}{I_f} \right)$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + m r^2$$

$$\omega_f = 2 \frac{(50 \times 4 + 60 \times 4)}{50 \times 4 + 60 \times 0.25} = 2 \frac{440}{215} = 4.1 \text{rad}/s$$

Ejercicio 15. Rueda en rotación

$$
\begin{aligned}
L_i = L_f &= L_{\text{rueda}} \\
L_f = L_{\text{estudiante}} &- L_{\text{rueda}} \\
L_{\text{estudiante}} &= 2L_{\text{rueda}}
\end{aligned}
$$