Expansión 1/N y QCD en 1+1 dimensiones

Anthonny Freddy Canazas Garay

Mayo 2017

QCD

Es una teoría no abeliana, renormalizable y asintóticamente libre.

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + i\bar{\psi}_f\gamma^\mu D_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f$$

$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$
$A_\mu = A^a_\mu T^a$
$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$
Hay una suma implícita $\sum_{f=1}^{N_F}$, N_F es el número de sabores
$(\psi_f)_j \quad (j = 1, 2, 3)$ Representación fundamental
$A^a_\mu \quad (a = 1, 2, \ldots, 8)$ Representación adjunta

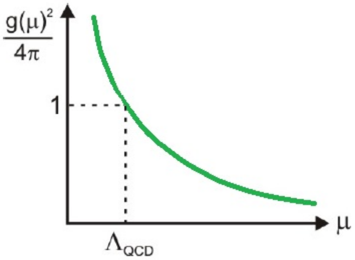
$$\mathrm{tr}(T^aT^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$$

$$\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a = \sum_{ab} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_b\delta^{ab} = 2\mathrm{tr}(\sum_{ab} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_b T^aT^b) = 2\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + i\bar{\psi}_f\gamma^\mu D_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f$$

Búsqueda de un método aproximado para QCD...

□ La constante de acople g no es buen parámetro de expansión en el régimen de bajas energías.



Sugerencias de 't Hooft:

□ Generalizar los tres colores de $SU(3)$ a N_c colores de $SU(N_c)$.
□ Esperar que la teoría se simplifique para N_c grandes.
□ Se obtiene un nuevo parámetro de expansión: $1/N_c$

Expansión 1/N

Puede ser usada en teorías con grupo de simetría $SO(n)$ o $SU(n)$.

Modelo $O(N)\phi^4$
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi^a \phi^a - \frac{1}{8} g^2 (\phi^a \phi^a)^2$

Modelo de Gross-Neveu
$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^a \partial_\mu \gamma^\mu \psi^a + g^2 (\bar{\psi}^a \psi^a)^2$

Modelo $\mathbb{C}P^{N-1}$
$\mathcal{L} = \partial_\mu z^\dagger \partial^\mu z - g^2 j_\mu j^\mu \quad j_\mu = -\frac{i}{2}(z^\dagger \partial_\mu z - (\partial_\mu z^\dagger) z) \quad z^\dagger z = g^{-2}$

re-escalamiento
$Ng^2 = t$, $N \to \infty$, t fijo
$\mathcal{L}_{eff}(\sigma, N) = N\mathcal{L}_{eff}(\sigma, 1)$

Expansión 1/N en QCD

Por comodidad se hace un re-escalamiento

$$t = g^2 N_c \ (t \text{ fijo}), \quad A'_\mu = \sqrt{\frac{N_c}{t}} A_\mu, \quad \psi' = \sqrt{\frac{N_c}{t}} \psi$$

$$\mathcal{L}_{SU(N_c)QCD} = \frac{N_c}{t} \left[-\frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \right]$$

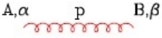
Notar que g ya no aparece en D_μ ni en $F_{\mu\nu}$.

Conteo de potencias

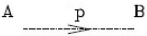
vértices $\propto N_c$
propagadores $\propto N_c^{-1}$

Ahora veamos otro aspecto...

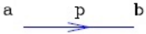
Reglas de Feynman convencionales



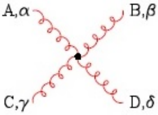
$$\delta^{AB}\ \left[-g^{\alpha\beta}+(1-\lambda)\,\frac{p^{\alpha}p^{\beta}}{p^{2}+i\epsilon}\right]\frac{i}{p^{2}+i\epsilon}$$



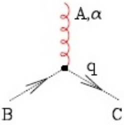
$$\delta^{AB}\ \frac{i}{p^{2}+i\epsilon}$$



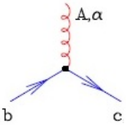
$$\delta^{ab}\ \frac{i}{\not p-m+i\epsilon}$$



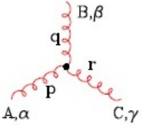
$$-ig^{2}\ f^{XAC}f^{XBD}\ [g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}-g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}]$$
$$-ig^{2}\ f^{XAD}f^{XBC}\ [g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}-g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}]$$
$$-ig^{2}\ f^{XAB}f^{XCD}\ [g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}-g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}]$$



$$g\ f^{ABC}q^{\alpha}$$



$$-ig\ (t^{A})_{cb}\ \gamma^{\alpha}$$

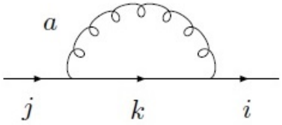


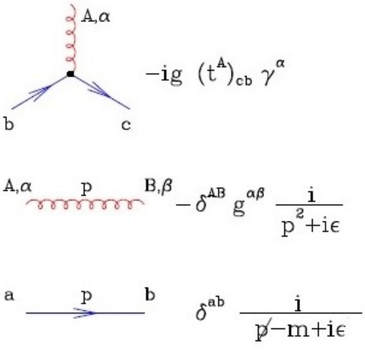
$$-g\ f^{ABC}[(p-q)^{\gamma}g^{\alpha\beta}+(q-r)^{\alpha}g^{\beta\gamma}+(r-p)^{\beta}g^{\gamma\alpha}]$$

(all momenta incoming)

Doble línea

Es difícil (en general) seguir el rastro de los indices.
Por ejemplo



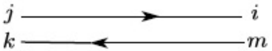


$$= (-ig(T^b)_i^m)(-i\delta^{ab})(-ig(T^a)_k^j)(i\delta_m^k)[\ldots]$$
$$= (-ig)^2(T^a)_i^k(T^a)_k^j[\ldots]$$
$$= -g^2\frac{N_c^2-1}{2N_c}\delta_i^j[\ldots]$$

Importante notar! $\sum \delta_k^k = N_c$

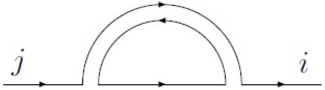
Este resultado se obtiene más fácil si previamente se escribe

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle = \delta^{ab} D_{\mu\nu}$$
$$\langle A_\mu^a (T^a)_k^j A_\nu^b (T^b)_i^m \rangle = \delta^{ab} (T^a)_k^j (T^b)_i^m D_{\mu\nu}$$
$$\langle (A_\mu)_k^j (A_\nu)_i^m \rangle = (T^a)_k^j (T^a)_i^m D_{\mu\nu}$$
$$\langle (A_\mu)_k^j (A_\nu)_i^m \rangle = (T^a)_k^j (T^a)_i^m D_{\mu\nu}$$
$$\langle (A_\mu)_k^j (A_\nu)_i^m \rangle = \frac{1}{2} (\delta_i^j \delta_k^m - \frac{1}{N_c} \delta_k^j \delta_i^m) D_{\mu\nu}$$



$$\delta_i^j \delta_k^m$$

El índice al inicio es el mismo que el índice al final. Con esta notación, el diagrama se ve como:



$$= \frac{1}{2} N (ig)^2 \delta_i{}^j \cdot [\cdots] \ .$$

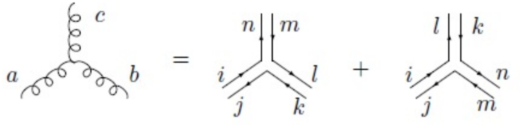
Importante notar! Cada loop de índice es un factor N_c

Vértice cúbico de gluones

$= -gf^{abc}$

$= 2ig\text{tr}(T^a[T^b, T^c])$

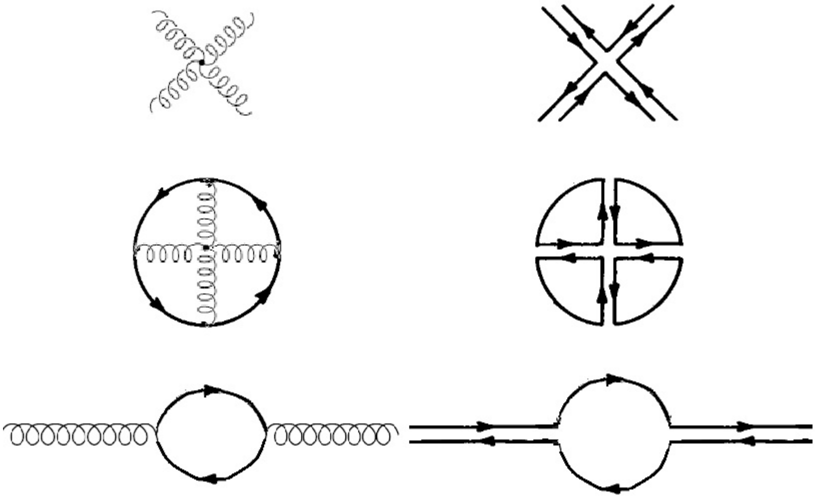
$= 2ig[\delta^i_n \delta^k_j \delta^m_l - \delta^i_l \delta^m_j \delta^k_n](T^a)^j_i (T^b)^j_k (T^c)^n_m$



El mismo análisis se puede generalizar a otros diagramas

$$A_\mu = A^a_\mu T^a = (A_\mu)^i_j e^j_i$$

$$\begin{matrix} A^a_\mu \\ a = 1, \dots N_c^2 - 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (A_\mu)^i_j \\ i, j = 1, \dots N_c \end{matrix}$$



Es fácil seguir el rastro de los índices a lo largo de la línea de gluones.

Topologia

Amplitudes vacío-a-vacío

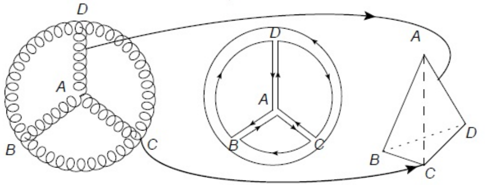
L : número de loops de índice

P : número de propagadores (quark o gluón)

V : número de vértices

Entonces $$N_c^{V-P+L} = N_c^{\chi}$$

Se construye superficies orientables para el diagrama en doble linea



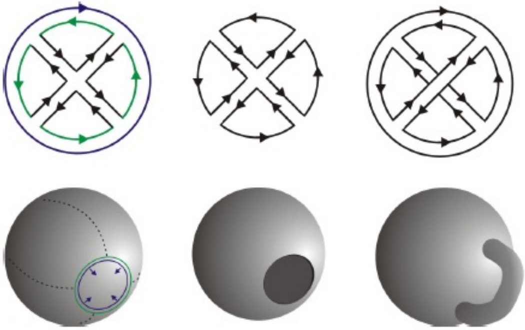
Cada loop de índice representa una cara (polígono)

Cada propagador representa una arista

Cada interacción representa un vértice

$$\chi = 2 - 2H - B$$

Toda superficie orientable es topológicamente equivalente a una 2-esfera con asas (H) y bordes (B).



$H = 0 \Leftrightarrow$ planar , $B = 0 \Leftrightarrow$ no hay loops de quarks. $H = 0 \Leftrightarrow$ planar , $B = 1 \Leftrightarrow$ hay un loop de quarks en el borde exterior.

$$N_c^{\chi} = N_c^{2-2H-B}$$

Primer Resultado: Los diagramas vacío-a-vacío dominantes son de orden N_c^2. Son gráficos planares hechos solo de gluones.

Segundo Resultado: Los diagramas vacío-a-vacío con lineas de quark dominantes son de orden N_c. Son gráficos planares con borde.

Para crear un mesón: aplicar al vacío un bilineal de quark B

$$B : \bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$$

Agregar a la acción: $S \to S + N_c \sum J_{B_i} B_i$
Los diagramas dominantes que contribuyen son digramas planares con inserciones en el loop de quarks.
$\langle B_1 \ldots B_n \rangle = \frac{1}{(iN_c)^n} \frac{\partial^n W}{\partial J_{B_1} \ldots \partial J_{B_n}} |_{J_{B_i}=0} \quad \propto N_c^{-n} \times N_c$
$\langle B_1 \ldots B_n \rangle \ \propto N_c^{1-n}$
Para tener estados normalizados $B_i' = N_c^{1/2} B_i$
$\langle B_1' \ldots B_n' \rangle \ \propto N_c^{\frac{2-n}{2}}$
Hay resultados interesantes también para operadores de gluones.

Lo importante es entender que los polos de $\langle BB \rangle$ son las masas de los mesones.

En 1+1 dimensiones $F_{\mu\nu}$ solo tiene una componente no nula: $F_{01} = -F_{10}$.

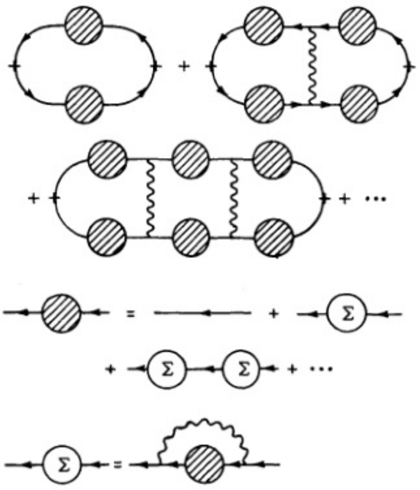
Gauge Axial $A_1 = 0$

Los términos no lineales en F_{01} son proporcionales a $A_0 A_1$, se anulan en el gauge axial. Se ha eliminado el autoacople de gluones. Se puede eliminar A_0 y escribir el lagrangiano de quarks

$$L_F = L_{F0} + \frac{g^2}{N} \int j^b_{0a}(x^0, x^1)|x^1 - y^1| j^a_{0b}(x^0, y^1)$$

Con lo que obtiene el propagador

$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{2}\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} \int d^2 x e^{ik\cdot x}|x^1 \delta(x^0)| = i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} \frac{\mathrm{P}}{(k_1)^2}$



El álgebra de matrices γ^{μ} se simplifica considerablemente si se pasa al gauge cono de luz, además es un gauge covariante (en 1+1 dimensiones).

Se define:

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$$

La métrica es $ds^2 = 2dx^+dx^-$, lo cual implica
$g_{+-} = g_{-+} = g^{+-} = g^{-+} = 1$
También se tiene $(\gamma^+)^2 = (\gamma^-)^2 = 0$, $\{\gamma^+, \gamma^-\} = 2$

$$F^{+-} = F^{01}\frac{\partial x^+}{\partial x^0}\frac{\partial x^-}{\partial x^1} + F^{10}\frac{\partial x^+}{\partial x^1}\frac{\partial x^-}{\partial x^0} = F^{10}$$

Gauge cono de luz $\qquad A_- = A^+ = 0$
solo aparece γ^+

$$\gamma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \\ \gamma^- \end{pmatrix} \gamma^+ = 2\gamma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para el propagador del gluón se usa la prescripción del valor principal

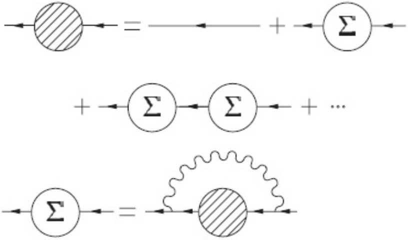
$$D_{\mu\nu}(k) = i\delta_{\mu+}\delta_{\nu+}\frac{\mathsf{P}}{(k_-)^2}$$

$$D_{++}(k) = i\frac{\mathsf{P}}{(k_-)^2}$$

Obviando γ^+, γ^- se puede escribir:

$$\frac{-ig\gamma^+}{\sqrt{N}} = \frac{-2ig}{\sqrt{N}}$$

$$S_0(p) = i\frac{p_+\gamma^+ + p_-\gamma^- + m}{2p_+p_- - m^2 + i\varepsilon} = \frac{ip_-}{2p_+p_- - m^2 + i\varepsilon}$$



Serie geométrica

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)(-i\Sigma(p))S_0(p) + S_0(p)[(-i\Sigma(p))S_0(p)]^2 + \dots$$

$$S(p) = \frac{S_0(p)}{1 + i\Sigma(p)S_0(p)} \times \frac{ip_-/S_0(p)}{ip_-/S_0(p)}$$

$$S(p) = \frac{ip_-}{2p_+p_- - m^2 + i\varepsilon - p_-\Sigma(p)}$$

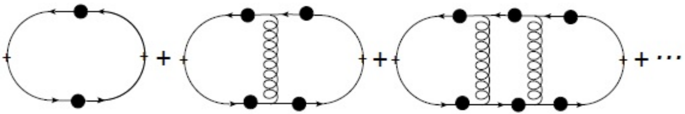
$$-i\Sigma(p) = -4ig^2 \int S(p-q) \frac{\mathsf{P}}{(k_-)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

$$\Sigma(p) = -\frac{g^2}{\pi p_-} \; , \quad M^2 = m^2 - \frac{g^2}{\pi}$$

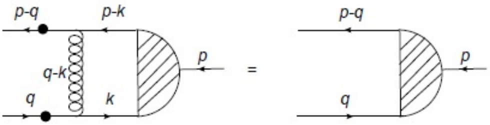
$$S_0(p) = \frac{ip_-}{2p_+p_- - m^2 + i\varepsilon}$$

$$S(p) = \frac{ip_-}{2p_+p_- - m^2 + i\varepsilon - p_-\Sigma(p)}$$

$$S(p) = \frac{ip_-}{2p_+p_- - M^2 + i\varepsilon}$$



Si hay un polo correspondiente a un mesón se tiene (Bethe-Salpeter):



Bethe-Salpeter equation

$$\psi(p,q) = -4ig^2 S(p-q)S(-q)\int \frac{\mathsf{P}}{(k_- - q_-)^2}\psi(p,k)\frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

Ecuación de 't Hooft

$$\psi(p,q) = -4ig^2 S(p-q)S(-q)\int \frac{\mathsf{P}}{(k_- - q_-)^2}\psi(p,k)\frac{d^2k}{(2\pi)^2}$$

Se debe integrar $\phi(p,q_-) = \int \psi(p,q)dq_+$

$$\left[2p_+ - \frac{M_1^2}{q_-} - \frac{M_2^2}{p_- - q_-}\right]\phi(p,q_-) = -\frac{g^2}{\pi}\int_0^{p_-}\frac{\mathsf{P}}{(k_- - q_-)^2}\phi(p,k_-)dk_-$$

Usando $\mu^2 = 2p_+p_-$, $q_- = xp_-$ y $k_- = yp_-$

$$\mu^2\phi(x) = \left(\frac{M_1}{x} + \frac{M_2}{1-x}\right)\phi(x) - \frac{g^2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathsf{P}\phi(y)dy}{(x-y)^2}$$

Espectro de mesones

't Hooft usa una aproximación para la integral

$$\int_0^1 \frac{\phi(y)dy}{(x-y)^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)dy}{(x-y)^2}$$

además de asumir periodicidad. Para una función periódica se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega y}dy}{(x-y)^2} = -\pi|\omega|e^{i\omega x}$$

Aplicando a $\sin(\pi n x) = \frac{e^{i\pi n x} - e^{-i\pi n x}}{2i}$ y despreciando los otros términos, se tiene:

$$\phi_n(x) = \sin(\pi n x) \quad , \quad \mu_n^2 = g^2 \pi n$$

Comparación con partícula en una caja

Coleman sugiere reinterpretar la ecuación. Posición x, y momentum p. Con la misma aproximación anterior, la integral actúa como el operador $|p|$, que es proporcional al hamiltoniano (energía) de una partícula sin masa.
Partícula sin masa en un potencial y restringida a una caja (intervalo [0,1]):

$$\mu^2\phi(x) = \left[\frac{M_1}{x} + \frac{M_2}{1-x} + g^2|p|\right]\phi(x)$$

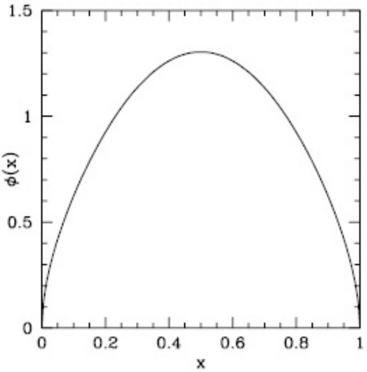
Para estados suficientemente excitados se desprecia el potencial

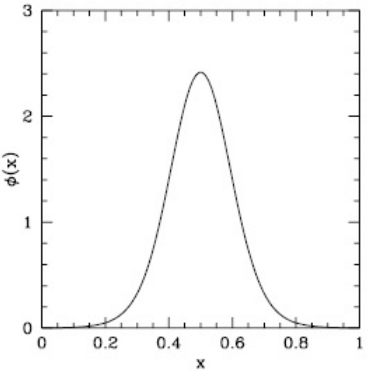
$$\mu^2\phi(x) = g^2|p|\phi(x)$$

$$\phi_n(x) = \sin(\pi n x) \quad , \quad \mu_n^2 = g^2\pi n$$

Ground State

Para estados donde no se puede hacer esa aproximación se puede resolver númericamente usando una transformación de Multhopp. A. Manohar, Large N QCD, arXiv:hep-ph/9802419v1





$M_1 = M_2 = 1 \ , \ \mu^2 = 2.7$ $\quad$ $M_1 = M_2 = 10 \ , \ \mu^2 = 20.55$

masas en unidades de $g/\sqrt{2\pi}$