Momento magnético anómalo del electrón

Cristóbal Laporte

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile

Profesor : Dr. Jorge Alfaro

31 de Mayo, 2017

De la ecuación de Pauli

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}\right)\psi$$

El último término posee la forma de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo externo. A "leading order" en $\frac{1}{c}$, el electrón se comporta como una partícula que tiene asociado un momento magnético

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{mc}\boldsymbol{S} \quad ; \quad \boldsymbol{S} = \hbar\boldsymbol{s} = \hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$$

Donde el radio giromagnético posee un valor igual a 2.

Ahora consideramos correcciones cuánticas al vértice, y denotaremos a la suma de los diagramas involucrados en las correcciones por $-ie\Lambda^{\mu}(p,p')$ y nos preguntamos cuál será la forma de $-ie\Lambda^{\mu}(p,p')$. A "tree level" $\Lambda^{\mu}(p,p') = \gamma^{\mu}$ y el vértice debe ser una combinación lineal de p, p', γ^{μ} además de constantes m y el escalar permitido q^2, así

$$\Lambda^{\mu} = \gamma^{\mu} A + (p' + p)^{\mu} B + (p' - p) C$$

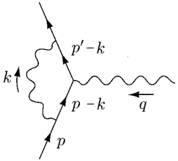
Aplicando la identidad de Ward y haciendo un sandwhich entre $u(\bar{p}')$ y $u(p)$ el término que acompaña a A es igual a 0 y aplicando la ecuación de Dirac el término que acompaña a B se hace 0, por lo tanto C=0. Utilizando la identidad de Gordon (demostrada más adelante)

$$\Lambda^{\mu} = \gamma^{\mu} F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} F_2(q^2)$$

Y el momento magnético anómalo del electrón a un loop lo identificamos como

$$g = 2\left[F_1(0) + F_2(0)\right] = 2 + 2F_2(0)$$

El diagrama involucrado a primer orden en el momento magnético anómalo del electrón está dado por



$$, = -ie\Lambda^{\mu}(p, p')$$

donde $p' = p + q$.

Usando las reglas de Feynman para QED, el vértice posee la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
-ie\Lambda^{\mu}(p,p') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{k^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\nu}) \frac{i(\not{p}'-\not{k}+m)}{(p'-k)^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\mu}) \frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\rho}) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^{\nu}(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma^{\mu}(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_{\nu}}{\left[(p'-k)^2-m^2+i\epsilon\right]\left[(p-k)^2-m^2+i\epsilon\right](k^2+i\epsilon)} i^6 e^3 \\
&= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^{\nu}(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma^{\mu}(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_{\nu}}{\left[(p'-k)^2-m^2+i\epsilon\right]\left[(p-k)^2-m^2+i\epsilon\right](k^2+i\epsilon)}
\end{aligned}
$$

. Con el fin de reordenar esta expresión para obtener el valor de esta integral, utilizamos parámetros de Feynman.

Parámetros de Feynman

Demostramos la siguiente fórmula

$$\left(\prod_{j=0}^{n} A_j\right)^{-1} = \int_0^1 dx_1 ... \int_0^1 dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i A_i\right)^n}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dy_1 ... \int_0^\infty dy_n e^{-A_1 y_1 - ... - A_n y_n} &= \int_0^\infty dy_1 ... \int_0^\infty dy_n \int_0^\infty ds \delta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - s\right) e^{-A_1 y_1 - ... - A_n y_n} \\
&= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dy_1 ... \int_0^\infty dy_n e^{-A_1 y_1 - ... - A_n y_n} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - s\right) \\
&\equiv I
\end{aligned}$$

Realizando la substitución $y_j = s x_j$

$$I = \int_0^\infty ds s^n \int_0^\infty dx_1 ... \int_0^\infty dx_n e^{-(A_1 x_1 + ... + A_n x_n) s} \delta\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) s\right)$$

Parámetros de Feynman

De las propiedades de la función γ, tenemos que $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$, por lo tanto

$$\delta\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) s\right) = \frac{1}{s}\delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

$$\rightarrow I = \int_0^\infty dss^{n-1} \int_0^\infty dx_1 ... \int_0^\infty dx_n e^{-(A_1x_1+...+A_nx_n)s}\delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

Resolviendo

$$\int_0^\infty dss^{n-1}e^{-(A_1x_1+...+A_nx_n)s} = \frac{(n-1)!}{\left(\sum_{j=1}^n x_jA_j\right)^n log(e)^n}$$

Reemplazando

$$I = \int_0^\infty dx_1 ... \int_0^\infty dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{\left(\sum_{j=1}^n x_jA_j\right)^n}$$

Pero $I = \prod_{j=1}^n \int_0^n dy_j e^{-A_jy_j} = \left(\prod_{j=1}^n A_j\right)^{-1}$, por lo tanto la fórmula queda demostrada

Cálculo del denominador

Nuestra fórmula para los parámetros de Feynman se ven de la siguiente forma

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3(1-x-y)]^3}$$

donde (colocando $p'^2 = p^2 = m^2$)

$$\begin{aligned}
A_1 &= (p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon = p'^2 - 2p'k + k^2 - m^2 + i\epsilon = k^2 - 2p'k + i\epsilon \\
A_2 &= (p-k)^2 - m^2 + i\epsilon = p^2 - 2pk + k^2 - m^2 + i\epsilon = k^2 - 2pk + i\epsilon \\
A_3 &= k^2 + i\epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el denominador (denotado como D) quedará como

$$\begin{aligned}
D &= A_1 x + A_2 y + A_3(1-x-y) \\
&= (k^2 - 2p'k + i\epsilon)x + (k^2 - 2pk + i\epsilon)y + (k^2 + i\epsilon)(1-x-y) \\
&= k^2x - 2p'kx + i\epsilon x + k^2 y - 2pky + i\epsilon y + k^2 - k^2 y - k^2 x + i\epsilon - xi\epsilon - yi\epsilon \\
&= k^2 - 2(p'x + py)k + i\epsilon = k^2 - 2p'kx - 2pky + i\epsilon \\
&= \left(k - (p'x + py)\right)^2 - (p'x + py)^2 + i\epsilon
\end{aligned}$$

Cálculo del denominador

$$D = \big(k - (p'x + py)\big)^2 - (p'x + py)^2 + i\epsilon$$

Realizamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} k' &= k - p'x - py \\ D &= k'^2 - p'^2x^2 - 2xypp' - y^2p^2 + i\epsilon \\ &= k'^2 - (x^2 + y^2)m^2 - 2xypp' + i\epsilon \end{aligned}$$

Por último, expresamos el denominador en términos de q. Recordando que

$$p' = p + q \Rightarrow q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 - 2pp' + p^2 \Rightarrow pp' = m^2 - \frac{q^2}{2}$$
$$\Rightarrow D = k'^2 - (x^2 + y^2)m^2 + xyq^2 + i\epsilon$$

Cálculo del numerador

Ahora trabajaremos el numerador

$$N = \gamma^{\nu}(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^{\mu}(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_{\nu}$$

Escribiendo el numerador en términos de nuestra variable k'

$$\begin{aligned} N &= \gamma^{\nu}(\not{p}' - \not{k}' - x\not{p}' - y\not{p} + m)\gamma^{\mu}(\not{p} - \not{k}' - x\not{p}' - y\not{p} + m)\gamma_{\nu} \\ &= \gamma^{\nu}\left(\not{p}'(1-x) - y\not{p} + m\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}(1-y) - x\not{p}' + m\right)\gamma_{\nu} + \gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma_{\nu} \\ &= m^2\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu} + m\gamma^{\nu}\left[(1-x)\not{p}'\gamma^{\mu} - y\not{p}\gamma^{\mu} + (1-y)\gamma^{\mu}\not{p} - x\gamma^{\mu}\not{p}'\right]\gamma_{\nu} + \gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma_{\nu} \\ &+ \gamma^{\nu}\left[(1-x)(1-y)\not{p}'\gamma^{\nu}\not{p} - x(1-x)\not{p}'\gamma^{\mu}\not{p}' - y(1-y)\not{p}\gamma^{\mu}\not{p} + yx\not{p}\gamma^{\mu}\not{p}'\right]\gamma_{\nu} \end{aligned}$$

Usando algunas propiedades del álgebra de Clifford

$$\alpha\gamma^{\mu}\not{a}\gamma_{\mu} = a^{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma^{\mu} = a^{\alpha}(2g_{\mu\alpha} - \gamma_{\alpha}\gamma_{\mu})\gamma^{\mu} = 2a^{\alpha}g_{\mu\alpha}\gamma^{\mu} - a^{\alpha}\gamma_{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = 2\not{a} - 4\not{\alpha} = -2\not{a}$$

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu} = -2\gamma^{\nu}$$

$$\gamma_{\mu}\not{a}\not{b}\gamma^{\mu} = 4ab$$

$$\begin{aligned} N &= -2m^2\gamma^{\nu} + 4m\left[(1-x)p'^{\mu} + (1-y)p^{\mu} - yp^{\mu} - xp'^{\mu}\right] \\ &+ \gamma^{\nu}\left(\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right)\gamma_{\nu} + \gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma_{\nu} \end{aligned}$$

Cálculo del numerador

Tomando en cuenta que

$$\gamma^\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

y aplicando esto en el penúltimo y último término del numerador

$$N = -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(1-x)p'^\mu + (1-y)p^\mu - yp^\mu - xp'^\mu\right]$$
$$- 2\left(\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right)\gamma^\mu\left(\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right) - 2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x) &= p^\mu - xp^\mu - yp^\mu + p'^\mu - xp'^\mu - yp'^\mu + yp'^\mu \\ &\quad - xp'^\mu - yp^\mu + xp^\mu \\ &= (1-x)p'^\mu + (1-y)p^\mu - yp^\mu - xp'^\mu\end{aligned}$$

Reemplazando en nuestra expresión para el numerador:

$$N = -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x)\right] - 2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'$$
$$- 2\left[\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right]\gamma^\mu\left[\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right]$$

Cálculo del numerador

$$N = -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x)\right] - 2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'$$
$$-\,2\left[\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right]\gamma^\mu\left[\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right]$$

Analizamos el último término. Haciendo $\not{p} = \not{p}' - \not{q}$ en el primer paréntesis cuadrado y $\not{p}' = \not{p} + \not{q}$ en el segundo paréntesis cuadrado. Así para el último término

$$\begin{aligned}\left[\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right]\gamma^\mu\left[\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right] &= \left[\not{p}'(1-x-y) - \not{q}(1-y)\right]\gamma^\mu\left[\not{p}(1-x-y) + \not{q}(1-x)\right]\\ &= (1-x-y)^2\not{p}'\gamma^\mu\not{p} + (1-x-y)(1-x)\not{p}'\gamma^\mu\not{q}\\ &- (1-x-y)(1-y)\not{q}\gamma^\mu\not{p} - (1-x)(1-y)\not{q}\gamma^\mu\not{q}\end{aligned}$$

Como $\not{p}u(p) = mu(p)$ y $\bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p')$

$$\begin{aligned}\left[\not{p}(1-y) - x\not{p}'\right]\gamma^\mu\left[\not{p}'(1-x) - y\not{p}\right] &= m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - (1-x)(1-y)\not{q}\gamma^\mu\not{q}\\ &+ m(1-x-y)\left[(1-x)\gamma^\mu\not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu\right]\end{aligned}$$

Reemplazando esto en el numerador

Cálculo del numerador

$$\begin{aligned} N =& -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x)\right] - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}' \\ & - 2m(1-x-y)\left[(1-x)\gamma^\mu\not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu\right] + 2(1-x)(1-y)\not{q}\gamma^\mu\not{q} \end{aligned}$$

Notando que $\not{q}\gamma^\mu\not{q} = 2\not{q}q^\mu - \not{q}\not{q}\gamma^\mu$

$$\begin{aligned} N =& -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x)\right] - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}' \\ & - 2m(1-x-y)\left[(1-x)\gamma^\mu\not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu\right] - 2(1-x)(1-y)\not{q}\not{q}\gamma^\mu + 4(1-x)(1-y)\not{q}q^\mu \end{aligned}$$

Además $\not{k}'\gamma^\mu\not{k}' = 2\not{k}'k'^\mu - \not{k}'\not{k}'\gamma^\mu$, por lo tanto

$$\begin{aligned} N =& -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y) + (p'-p)^\mu(y-x)\right] - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 4\not{k}'k'^\mu \\ & - 2m(1-x-y)\left[(1-x)\gamma^\mu\not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu\right] - 2(1-x)(1-y)\not{q}\not{q}\gamma^\mu + 4(1-x)(1-y)\not{q}q^\mu \\ & + 2k'^2\gamma^\mu \end{aligned}$$

pero

$$\bar{u}(p')\not{q}u(p) = \bar{u}(p')(\not{p}' - \not{p})u(p) = 0$$

Cálculo del numerador

así

$$
\begin{aligned}
N = & -2m^2\gamma^\nu + 4m\left[(p+p')^\mu(1-x-y)\right] - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 4\not{k}'k'^\mu \\
& -2m(1-x-y)\left[(1-x)\gamma^\mu\not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu\right] - 2(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu + 2k'^2\gamma^\mu
\end{aligned}
$$

Con el fin de simplificar lo anterior, dentro de la integral

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 4k'^\mu k'^\nu\gamma_\nu = \gamma^\mu k'^2 \\
&\Rightarrow k'^2\gamma^\mu = 2k'^2\gamma^\mu - 4\not{k}'k'^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N = & \gamma^\mu\left[-2m^2 - 2m^2(1-x-y)^2 - 2(1-x)(1-y)q^2 + k'^2\right] + 4m(1-x-y)(p+p')^\mu \\
& + 4m(1-x-y)\left[1 - \frac{1}{2}(x+y)\right] i\sigma^{\mu\nu}q_\nu
\end{aligned}
$$

Donde hemos puesto $\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \not{q}] = \sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Por último demostramos y utilizamos la identidad de Gordon

Identidad de Gordon

$$-2i\sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma^\nu - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu) = 2\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}$$
$$\Rightarrow i\sigma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu$$

Realizando el mismo proceso pero trabajando con el primer término del conmutador

$$i\sigma^{\mu\nu} = \gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu}$$

Entonces calculamos el término:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)u(p) &= \bar{u}(p')\left[(\gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu})p'_\nu - (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu\right]u(p) \\
&= \bar{u}(p')\left[\gamma^\nu p'_\nu\gamma^\mu - p'^\mu - p^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu\right]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\not{p}'\gamma^\mu - (p' + p)^\mu + \gamma^\mu\not{p}]u(p)
\end{aligned}$$

Usando la ecuaación de Dirac y su versión conjugada

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \Rightarrow \not{p}u(p) = mu(p)$$
$$\bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0 \Rightarrow \bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$$

Reemplazando

$$\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)u(p) = \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - (p' + p)^\mu]u(p) \Rightarrow (p' + p)^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

Cálculo del numerador

Insertando $(p' + p)^\mu$ en el numerador

$$N = \gamma^\mu \left[-2m^2 - 2m^2(1-x-y)^2 + 8m^2(1-x-y) - 2q^2(1-x)(1-y) + k'^2\right] \\ - 4m(1-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 4m(1-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu - 2m(1-x-y)(x+y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

Luego la forma del vértice queda como

$$\Lambda^\mu(p,p') = -2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{\gamma^\mu \left[-2m^2 - 2m^2(1-x-y)^2 + 8m^2(1-x-y) - 2q^2(1-x)(1-y)\right]}{[k'^2 - (x^2+y^2)m^2 + xyq^2 + i\epsilon]^3} \\ - 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{\gamma^\mu k'^2 - 2m(1-x-y)(x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{[k'^2 - (x^2+y^2)m^2 + xyq^2 + i\epsilon]^3} = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \\ \Rightarrow \frac{F_2(q^2)}{2m} = 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{2m(1-x-y)(x-y)}{[k'^2 - (x^2+y^2)m^2 + xyq^2 + i\epsilon]^3}$$

haciendo uso de la integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - (x+y)^2m^2 + xyq^2 + i\epsilon]^3} = \frac{-i\Gamma(1)}{(4\pi)^2\Gamma(3)[(x+y)^2m^2 - xyq^2]}$$

y reemplazando en la integral sobre k tenemos que el factor de forma $F_2(q^2 = 0)$ es

Momento magnético anómalo del electrón

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - x - y}{x + y}$$

Resolviendo por partes la última integral

$$\int_0^{1-x} dy \frac{1 - x - y}{x + y} = x - ln(x) - 1$$

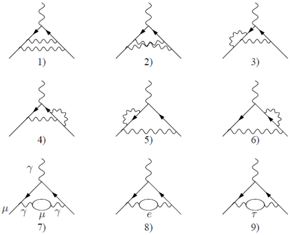
Por lo que el valor numérico de $F_2(q^2 = 0)$ es

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} - 1 + 1 \right] = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614$$

Lo que corresponde a nuestro momento magnético anómalo

Más loops y comparación de resultado teórico con el actual

A un loop hay sólo un diagrama para analizar, pero a 2 loops tendremos que los diagramas involucrados serán



mientras a 3 loops hay 72 diagramas y a 4 loops ... 891 diagramas!. Hasta orden 4, el valor teórico que tenemos del momento magnético anómalo a 4 loops es

$$a = 0.00115965218279(771)$$

mientras que el resultado experimental es

$$a = 0.00115965218073(28)$$

Cabe mencionar que el momento magnético anómalo del electrón es la predicción teórica más precisa que se ha logrado en todas las teorías físicas

Bibliografía

[1] Gross (2004), Relativistic quantum field theory
[2] Peskin and Schroeder, An introduction to quantum field theory
[3] S. Laporta, E. Remiddi. The analytical value of the electron (g-2) at order α^3 in QED. Phys.Lett. B379 (1996) 283-291
[4] T. Kinoshita and M. Nio. Improved α^4 term of the electron anomalous magnetic moment. Phys. Rev. D 73, 013003
[5] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio. Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron
[6] D. Hanneke,S. Fogwell Hoogerheide,G. Gabrielse (2011). Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment