Theta Vacua

René Araneda Gysling

Mayo 2017

Esquema de Presentación

1. Introducción.
   - "Toy Model" para un Instanton.

Esquema de Presentación

1. Introducción.
   - “Toy Model” para un Instanton.
2. Teoría de Yangs-Mills y Homotopía.
   - Clasificación de Homotopía.

Esquema de Presentación

1. Introducción.
   - "Toy Model" para un Instanton.
2. Teoría de Yangs-Mills y Homotopía.
   - Clasificación de Homotopía.
3. Instantones.

Esquema de Presentación

1. Introducción.
   - "Toy Model" para un Instanton.
2. Teoría de Yangs-Mills y Homotopía.
   - Clasificación de Homotopía.
3. Instantones.
4. Formulación θ-vacua.

Esquema de Presentación

1. Introducción.
    - "Toy Model" para un Instanton.
2. Teoría de Yangs-Mills y Homotopía.
    - Clasificación de Homotopía.
3. Instantones.
4. Formulación θ-vacua.
5. Referencias:
   Coleman S. "Aspect of symmety", Rajamaran R. "Solitons and Instantons", Walter D. and Martin R. "Lectures Notes in Physics".

- Un Instantón es una solución clásica de una teoría de campo Euclídea con una acción finita y no nula.

Introducción

- Un Instantón es una solución clásica de una teoría de campo Euclídea con una acción finita y no nula.
- Estas soluciones son las dominantes en la amplitud de dispersión del vacío a vacío,

$$Z \equiv \langle 0|0 \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi,\partial_\mu \phi]},$$

Introducción

- Un Instantón es una solución clásica de una teoría de campo Euclídea con una acción finita y no nula.
- Estas soluciones son las dominantes en la amplitud de dispersión del vacío a vacío,

$$Z \equiv \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi,\partial_\mu \phi]},$$

- Su nombre ('t Hooft) conjuga dos palabras, soliton '-on' e instante '-instant'

Introducción

- Un Instantón es una solución clásica de una teoría de campo Euclídea con una acción finita y no nula.
- Estas soluciones son las dominantes en la amplitud de dispersión del vacío a vacío,

$$Z \equiv \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi,\partial_\mu \phi]},$$

- Su nombre ('t Hooft) conjuga dos palabras, soliton '-on' e instante '-instant'
- Nos permiten entender fenómenos en teorías de campos cuánticos análogos a penetración de barrera potencial.

“Toy Model” para un Instanton

- En modelos simples de mecánica de partículas podemos ver que un Instanton, en el límite semiclásico $\hbar \to 0$, entrega la misma información que el método de WKB, donde

$$|T(E)| = \exp\{-\frac{1}{\hbar}\int_{x1}^{x2} dx\,[2(V-E)]^{1/2}\,[1+\mathcal{O}(\hbar)]\},$$

es la amplitud de transición de una partícula con energía E sobre un potencial V.

“Toy Model” para un Instanton

- En modelos simples de mecánica de partículas podemos ver que un Instanton, en el límite semiclásico $\hbar \to 0$, entrega la misma información que el método de WKB, donde

$$|T(E)| = \exp\{-\frac{1}{\hbar}\int_{x1}^{x2} dx\,[2(V-E)]^{1/2}\,[1+\mathcal{O}(\hbar)]\},$$

  es la amplitud de transición de una partícula con energía E sobre un potencial V.

- Sabemos que la matriz de transición puede ser escrita en espacio Euclídeo, $iS = -S$, como

$$\langle x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i\rangle = \mathcal{N}\int [dx]\, e^{-S/\hbar},$$

  donde en $\hbar \to 0$ la mayor contribución se obtiene de S mínimo.

“Toy Model” para un Instanton

- Supongamos un sistema unidimensional

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x),$$

tal que perturbativamente encontramos,

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int [dx] \, e^{-S(\bar{x})/\hbar} \left[det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $\bar{x}$ minimiza la acción ($\frac{\delta S}{\delta \bar{x}} = 0$).

"Toy Model" para un Instanton

- Supongamos un sistema unidimensional

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x),$$

tal que perturbativamente encontramos,

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \mathcal{N} \int [dx] \, e^{-S(\bar{x})/\hbar} \left[det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $\bar{x}$ minimiza la acción ($\frac{\delta S}{\delta \bar{x}} = 0$).

- Por otro lado,

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle,$$

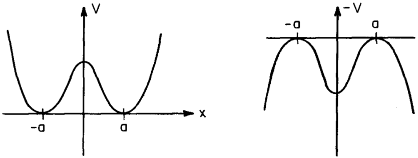
donde $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ y $H|n\rangle = E|n\rangle$.

"Toy Model" para un Instanton

- En el límite $T \to \infty$, donde $x(-\infty) = x_i$ y $x(\infty) = x_f$, podemos identificar E_0 $(< E_1 < E_2 \cdots < E_n)$ con el resultado de $det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))$.

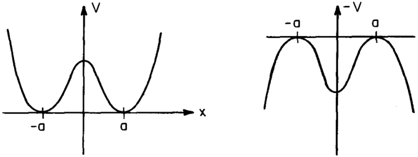
"Toy Model" para un Instanton

- En el límite $T \to \infty$, donde $x(-\infty) = x_i$ y $x(\infty) = x_f$, podemos identificar E_0 $(< E_1 < E_2 \cdots < E_n)$ con el resultado de $det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))$.
- Consideremos el caso del potencial de doble muralla:



"Toy Model" para un Instanton

- En el límite $T \to \infty$, donde $x(-\infty) = x_i$ y $x(\infty) = x_f$, podemos identificar E_0 ($< E_1 < E_2 \cdots < E_n$) con el resultado de $det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))$.
- Consideremos el caso del potencial de doble muralla:



- Tenemos dos soluciones para x que minimizan S, $\bar{x} = -a$ y $\bar{x} = a$, por lo tanto una degenerancia en E_0, $\langle -a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle$.

"Toy Model" para un Instanton

- Existe una tercera solución que corresponde al Instanton. Esta es empezar en $-a$ y terminar en a, sólo posible cuando $E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 - V(\bar{x}) = 0$,

$$\Rightarrow \quad t = t_1 + \int_{-a}^{a} dx \, (2V)^{-\frac{1}{2}} \, .$$

- Existe una tercera solución que corresponde al Instanton. Esta es empezar en $-a$ y terminar en a, sólo posible cuando $E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 - V(\bar{x}) = 0$,

$$\Rightarrow \quad t = t_1 + \int_{-a}^{a} dx\,(2V)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

- Con este tipo de solución tenemos ahora dos autoestados de baja energía con

$$E_\pm = \frac{1}{2}\hbar w \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar},$$

donde $w = v''(\bar{x})$ y $S_0 = \int_{-a}^{a} dx(2V)^{\frac{1}{2}}$.

"Toy Model" para un Instanton

- Existe una tercera solución que corresponde al Instanton. Esta es empezar en $-a$ y terminar en a, sólo posible cuando $E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 - V(\bar{x}) = 0$,

$$\Rightarrow \quad t = t_1 + \int_{-a}^{a} dx\,(2V)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

- Con este tipo de solución tenemos ahora dos autoestados de baja energía con

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar w \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar},$$

donde $w = v''(\bar{x})$ y $S_0 = \int_{-a}^{a} dx(2V)^{\frac{1}{2}}$.

- La degenerancia es rota por una tunelamiento de la barrera proporcional a la amplitud de transición

$$E_+ - E_- = 2\hbar K e^{-S_0/\hbar} = 2\hbar K |T(E)|.$$

Teoría de Yangs-Mills y Homotopía

- El caso más simple de una teoría de gauge no-abeliana es la teoría de gauge $SU(2)$. Esta teoría definida en el espacio Euclideo $\mathbb{R}^4$, cuando no consideramos campos de materia, tiene una acción

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \; Tr\left[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right],$$

en términos del tensor de campo

$$F_{\mu\nu} = g\frac{\sigma^a}{2i}F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Aquí A_μ es la representación matricial del campo de gauge $A^a_\mu(x)$ con $a = 1, 2, 3,$

$$A_\mu(x) \equiv gT^a A^a_\mu = g\frac{\sigma^a}{2i}A^a_\mu(x),$$

donde σ^a son las matrices de Pauli.

Teoría de Yangs-Mills

- Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son:

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.$$

Teoría de Yangs-Mills

- Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son:

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.$$

- Bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}, \\ F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}, \end{aligned}$$

tanto la acción como las ecuaciones de campo son invariantes.

Teoría de Yangs-Mills

- Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son:

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.$$

- Bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}, \\ F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}, \end{aligned}$$

  tanto la acción como las ecuaciones de campo son invariantes.
- Con funciones $\Omega(x)$ matrices de 2×2 que representan el espacio $SU(2)$.

Teoría de Yangs-Mills

- Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son:

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.$$

- Bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}, \\ F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}, \end{aligned}$$

  tanto la acción como las ecuaciones de campo son invariantes.
- Con funciones $\Omega(x)$ matrices de 2×2 que representan el espacio $SU(2)$.
- Acción finita $\Rightarrow$ definir al campo A_μ no-divergente e imponer que $F_{\mu\nu} \to 0$, sobre la superficie S^3_∞ en $r = |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2} = \infty$.

- Las ecuaciones de campo derivadas de esta acción son:

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0.$$

- Bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}, \\ F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}, \end{aligned}$$

  tanto la acción como las ecuaciones de campo son invariantes.
- Con funciones $\Omega(x)$ matrices de 2×2 que representan el espacio $SU(2)$.
- Acción finita $\Rightarrow$ definir al campo A_μ no-divergente e imponer que $F_{\mu\nu} \to 0$, sobre la superficie S^3_∞ en $r = |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2} = \infty$.
- La configuración más simple que implica una acción finita es cuando $F_{\mu\nu} = 0$, que se logra tomando $A_\mu = 0$ (condición de puro gauge).

- Esto se extiende para cualquier campo transformado A'_μ construido a partir de $A_\mu = 0$,

$$A'_\mu(x) = \Omega(x)\partial_\mu\Omega^{-1}(x).$$

- Esto se extiende para cualquier campo transformado A'_μ construido a partir de $A_\mu = 0$,

$$A'_\mu(x) = \Omega(x)\partial_\mu\Omega^{-1}(x).$$

- Podemos pedir que esta misma condición se cumpla en la superficie S^3_∞,

$$\lim_{r\to\infty} A_\mu(x) = (A'_\mu(x))_{S^3_\infty} = \Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\partial_\mu\Omega^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

donde α_i son las variables que parametrizan la superficie S^3_∞.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.
- Estas funciones pueden ser clasificadas por consideraciones de homotopía.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.
- Estas funciones pueden ser clasificadas por consideraciones de homotopía.
- $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ representa un mapa entre la superficie S^3_∞ y el grupo $SU(2)$, que es la superficie 3-dimensional S^3 de la esfera unitaria en 4 dimensiones.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.
- Estas funciones pueden ser clasificadas por consideraciones de homotopía.
- $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ representa un mapa entre la superficie S^3_∞ y el grupo $SU(2)$, que es la superficie 3-dimensional S^3 de la esfera unitaria en 4 dimensiones.
- Por lo tanto, existe un número infinito de mapas de S^3_∞ en S^3.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.
- Estas funciones pueden ser clasificadas por consideraciones de homotopía.
- $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ representa un mapa entre la superficie S^3_∞ y el grupo $SU(2)$, que es la superficie 3-dimensional S^3 de la esfera unitaria en 4 dimensiones.
- Por lo tanto, existe un número infinito de mapas de S^3_∞ en S^3.
- Se asocia a cada mapa un número entero que clasifica su homotopía; mapas asociados a un mismo entero pueden ser continuamente deformados entre si.

Clasificación de homotopía

- Existe un número infinito de funciones $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que cumplen con la condición de borde anterior.
- Estas funciones pueden ser clasificadas por consideraciones de homotopía.
- $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ representa un mapa entre la superficie S^3_∞ y el grupo $SU(2)$, que es la superficie 3-dimensional S^3 de la esfera unitaria en 4 dimensiones.
- Por lo tanto, existe un número infinito de mapas de S^3_∞ en S^3.
- Se asocia a cada mapa un número entero que clasifica su homotopía; mapas asociados a un mismo entero pueden ser continuamente deformados entre si.
- Tenemos $\Pi_3(S(2)) = \Pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$

Clasificación de homotopía

- En nuestro caso el entero que clasifica las funciones $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el índice de Pontryagin (Número winding o de vueltas),

$$q \equiv \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \; Tr[F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}],$$

con $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ el dual del tensor de campo.

Clasificación de homotopía

- En nuestro caso el entero que clasifica las funciones $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el índice de Pontryagin (Número winding o de vueltas),

$$q \equiv \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \;\; Tr[F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

  con $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ el dual del tensor de campo.

- Esta cantidad es invariante de gauge y Lorentz, y no es considerada en la parte cinética de la acción porque es puramente una derivada total,

$$q = \frac{g^2}{8\pi G} \int d^4x \partial_\mu J^\mu,$$

  donde $J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Tr[A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2g}{3i} A_\nu A_\alpha A_\beta]$

Clasificación de homotopía

- En nuestro caso el entero que clasifica las funciones $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el índice de Pontryagin (Número winding o de vueltas),

$$q \equiv \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \;\; Tr[F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

  con $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ el dual del tensor de campo.
- Esta cantidad es invariante de gauge y Lorentz, y no es considerada en la parte cinética de la acción porque es puramente una derivada total,

$$q = \frac{g^2}{8\pi G} \int d^4x \partial_\mu J^\mu,$$

  donde $J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Tr[A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2g}{3i} A_\nu A_\alpha A_\beta]$
- Podemos demostrar que para los $A_\mu \rightarrow \Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\partial_\mu \Omega^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en S^3_∞,

$$q = n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Instantones

- No es directo encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Yangs-Mills.

Instantones

- No es directo encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Yangs-Mills.
- Otra forma de encontrar soluciones que mínimizan la acción ($\delta S = 0$) y es usar la identidad

$$\int d^4x \ Tr[(F_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu})^2] \geq 0.$$

Instantones

- No es directo encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Yangs-Mills.
- Otra forma de encontrar soluciones que mínimizan la acción ($\delta S = 0$) y es usar la identidad

$$\int d^4x \ Tr[(F_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu})^2] \geq 0.$$

- Tomando la expansión del binomio, tal que

$$\begin{aligned}
\left(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}\right)^2 &= F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \mp F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\phi} - \delta_{\alpha\phi}\delta_{\beta\gamma}\right] F_{\alpha\beta}F_{\gamma\phi} \mp 2\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= 2\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right).
\end{aligned}$$

Instantones

- No es directo encontrar soluciones a las ecuaciones de campo de Yangs-Mills.
- Otra forma de encontrar soluciones que mínimizan la acción ($\delta S = 0$) y es usar la identidad

$$\int d^4x \;\; Tr[(F_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu})^2] \geq 0.$$

- Tomando la expansión del binomio, tal que

$$\begin{aligned}
\left(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}\right)^2 &= F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \mp F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\phi} - \delta_{\alpha\phi}\delta_{\beta\gamma}\right] F_{\alpha\beta}F_{\gamma\phi} \mp 2\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= 2\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right).
\end{aligned}$$

- Es posible escribir

$$S = \int d^4x \;\; Tr[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \geq \pm\frac{1}{2}\int d^4x \;\; Tr[\tilde{F_{\mu\nu}}F_{\mu\nu}].$$

Instantones

- Lo anterior es equivalente a escribir (Belavin, Tyupkin, Polyakov y Schwartz),

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|.$$

Instantones

- Lo anterior es equivalente a escribir (Belavin, Tyupkin, Polyakov y Schwartz),

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|.$$

- Claramente configuraciones de anti-auto dualidad,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \pm F_{\mu\nu},$$

implican un mínimo de la acción ($S = \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|$).

Instantones

- Lo anterior es equivalente a escribir (Belavin, Tyupkin, Polyakov y Schwartz),

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|.$$

- Claramente configuraciones de anti-auto dualidad,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \pm F_{\mu\nu},$$

  implican un mínimo de la acción ($S = \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|$).

- Soluciones a la condición de auto dualidad son soluciones a las ecuaciones de campo y por lo tanto instantones.

Formulación del θ-vacua

- Insantones conectan vacíos clásicos de la teoría.

Formulación del θ-vacua

- Insantones conectan vacíos clásicos de la teoría.
- En el espacio de Minkowski las soluciones de vacío cumplen con $F_{\mu\nu}^{vac} = 0$

Formulación del θ-vacua

- Insantones conectan vacíos clásicos de la teoría.
- En el espacio de Minkowski las soluciones de vacío cumplen con $F_{\mu\nu}^{vac} = 0$
- Tomando el gauge temporal $A_0^a = 0$, tenemos una familia de soluciones determinada desde

$$A_i(\vec{x}) = -\frac{i}{g}\left(\partial_i \Omega(\vec{x})\Omega^{-1}(\vec{x})\right),$$

Formulación del θ-vacua

- Insantones conectan vacíos clásicos de la teoría.
- En el espacio de Minkowski las soluciones de vacío cumplen con $F_{\mu\nu}^{vac} = 0$
- Tomando el gauge temporal $A_0^a = 0$, tenemos una familia de soluciones determinada desde

$$A_i(\vec{x}) = -\frac{i}{g}\left(\partial_i \Omega(\vec{x})\Omega^{-1}(\vec{x})\right),$$

- Queremos $F_{\mu\nu}$ finito, entonces $\Omega(\vec{x}) \to 1$ cuando $|\vec{x}| \to \infty$. Esta condición exige que cualquier punto $x \in R^3 U\{\infty\}$ este identificado en $SU(2)$, es decir

$$R^3 U\{\infty\} \cong S^3.$$

Formulación del θ-vacua

- Nuevamente, existen infinitas funciones que cumplen con la condición asintótica anterior y que pueden ser agrupadas homotópicamente según un entero n,

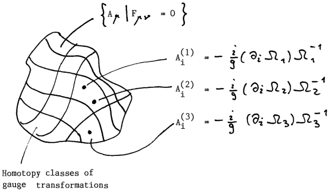
$$n \quad \in \quad \Pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$$

Formulación del θ-vacua

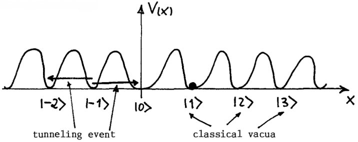
- Nuevamente, existen infinitas funciones que cumplen con la condición asintótica anterior y que pueden ser agrupadas homotópicamente según un entero n,

$$n \quad \in \quad \Pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$$

- Tenemos "*n*-vacíos aparentes"



$\Rightarrow$



Formulación del θ-vacua

- Dentro de los vacíos de la teoría existe $n = 0$, esto corresponde al caso en que $\Omega(\vec{x}) = \Omega_0(\vec{x}) = \mathbb{1}$.

Formulación del θ-vacua

- Dentro de los vacíos de la teoría existe $n = 0$, esto corresponde al caso en que $\Omega(\vec{x}) = \Omega_0(\vec{x}) = \mathbb{1}$.
- Cualquier función $\Omega(\vec{x})$ que no puede ser continuamente deformada a la identidad tiene clase de homotopía $n \neq 0$.

Formulación del θ-vacua

- Dentro de los vacíos de la teoría existe $n = 0$, esto corresponde al caso en que $\Omega(\vec{x}) = \Omega_0(\vec{x}) = \mathbb{1}$.
- Cualquier función $\Omega(\vec{x})$ que no puede ser continuamente deformada a la identidad tiene clase de homotopía $n \neq 0$.
- Equivalente al caso Euclídeo la cantidad topológica que denota la clase de homotopía es la densidad

$$Q_T(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3\vec{x} J_0(\vec{x}, t) = n,$$

a t fijo y con $J_0 = \delta_{0\mu} J_\mu$.

- Asumiendo que $\vec{J} \to 0$ cuando $r \to \infty$ podemos relacionar Q_T con q,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\;\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\left(\partial_o J^0 + \partial_i J^i\right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\partial_0 \int d^3\vec{x} J_0 = Q_T(\infty) - Q_T(-\infty). \end{aligned}$$

Formulación del θ-vacua

- Asumiendo que $\vec{J} \to 0$ cuando $r \to \infty$ podemos relacionar Q_T con q,

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\;\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\left(\partial_o J^0 + \partial_i J^i\right) \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\partial_0 \int d^3\vec{x} J_0 = Q_T(\infty) - Q_T(-\infty).
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow q = m - n \in \mathbb{Z}$.

Formulación del θ-vacua

- Asumiendo que $\vec{J} \to 0$ cuando $r \to \infty$ podemos relacionar Q_T con q,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\ \partial_\mu J^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int d^3\vec{x}\left(\partial_o J^0 + \partial_i J^i\right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\partial_0 \int d^3\vec{x} J_0 = Q_T(\infty) - Q_T(-\infty). \end{aligned}$$

- $\Rightarrow q = m - n \in \mathbb{Z}$.
- x_0 es el parametro de interpolación, quien conecta las soluciones $A_\mu(t = \pm\infty, \vec{x})$ a través de $A_\mu(xo, \vec{x})$. Es decir, los Instantones conectan los "n-vacíos aparentes" en Minkowski (análogo a efecto tunel).

Formulación del θ-vacua

- En el espacio de Hilbert,

$$n \rightarrow |n\rangle$$

$$\Omega(\vec{x}) \rightarrow G : \quad G|n\rangle = |n+1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |n\rangle = G^n|0\rangle$$

$$Q_T \rightarrow \hat{Q}_T : \quad Q_T|n\rangle = n|n\rangle$$

Formulación del θ-vacua

- En el espacio de Hilbert,

$$n \rightarrow |n\rangle$$

$$\Omega(\vec{x}) \rightarrow G : \quad G|n\rangle = |n+1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |n\rangle = G^n|0\rangle$$

$$Q_T \rightarrow \hat{Q}_T : \quad Q_T|n\rangle = n|n\rangle$$

- El vacío $|n\rangle$ no es físico, pero a través de una transformación de Fourier lo llega a ser,

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n\rangle, \quad \theta \quad \in \quad [0, 2\pi].$$

Formulación del θ-vacua

- $|\theta\rangle$ es el vacío físico de la teoría (θ-vacua) que cumple con

$$G|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \quad \text{y} \quad \langle\theta|\theta'\rangle = 2\pi\delta(\theta-\theta')$$

Formulación del θ-vacua

- $|\theta\rangle$ es el vacío físico de la teoría (θ-vacua) que cumple con

$$G|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \quad \text{y} \quad \langle\theta|\theta'\rangle = 2\pi\delta(\theta - \theta')$$

- Los instantones rompen la degeneracia $E_n = 0$ de los "n-vacíos aparentes". El θ-vacua implica una energía $E(\theta)$ en términos de $\mathcal{L}_{eff}$.

Formulación del θ-vacua

- $|\theta\rangle$ es el vacío físico de la teoría (θ-vacua) que cumple con

$$G|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \quad \text{y} \quad \langle\theta|\theta'\rangle = 2\pi\delta(\theta-\theta')$$

- Los instantones rompen la degeneracia $E_n = 0$ de los "n-vacíos aparentes". El θ-vacua implica una energía $E(\theta)$ en términos de $\mathcal{L}_{eff}$.
- Esto viene de,

$$\begin{aligned}
\langle\theta'|e^{-HT}|\theta\rangle &= \sum_{n,n'}\langle\theta'|n\rangle\langle n|e^{-HT}|n'\rangle\langle n'|\theta\rangle \\
&= \sum_n e^{-E_nT}\langle\theta|n\rangle\langle n|\theta'\rangle \\
\Rightarrow E_0 &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}ln\{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\frac{\langle\theta'|e^{-HT}|\theta\rangle}{\langle\theta'|0\rangle\langle 0|\theta\rangle}\}.
\end{aligned}$$

Formulación del θ-vacua

- Por otro lado, como $T \to \infty$ y ya que $[H, G] = 0 \Leftrightarrow H = GHG^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
\langle \theta' | e^{-HT} | \theta \rangle &= \sum_{n, m+n} e^{i(n\theta - m\theta' - n\theta')} \langle m + n | e^{-HT} | n \rangle \\
&= \sum_{n} e^{in(\theta - \theta')} \sum_{m} e^{-im\theta'} \langle m | e^{-HT} | 0 \rangle \\
&= 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_{m} e^{-im\theta'} \int [dA]_m e^{-\int d^4x \mathcal{L}},
\end{aligned}
$$

pero $q = m + n - n = m$, entonces

$$
E_0 = -\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} ln\{2\pi \int [dA] e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{eff}}\},
$$

con

$$
\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + i\theta \frac{g^2}{16\pi^2} Tr[F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}].
$$

Gracias