Método de Cuantización de Dirac

Luis Mora Lepin[1]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de física

May 29, 2017

Índice de contenidos

Índice de contenidos

- Para entender la teoría de las interacciones subatómicas se deben considerar los distintos campos que participan en estos procesos
- Se hace necesario entonces encontrar una formulación para la teoría cuántica de campos relativista a partir de los principios clásicos
- Acción clásica $\rightarrow$ Lagrangeano $\rightarrow$ Hamiltoniano $\rightarrow$ QFT
- El último paso se hace con lo que se conoce como método canónico de cuantización o 2da cuantización
- Existen algunos sistemas físicos con problemas en esta secuencia por lo que se hace necesario modificar las ecuaciones clásicas de Hamilton y así poder generalizar el procedimiento

Índice de contenidos

Acción clásica

$S = \int L(q, \dot{q})dt$ Invariante relativista

Ecuaciones de Euler Lagrange

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

Hamiltoniano

$H(q, p) = p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j)$

Ecuaciones de Hamilton

$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\qquad$ $-\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}$

Índice de contenidos

Definición

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

Propiedades

- $\{af_1 + bg_1, cf_2 + g_2\} = ac\{f_1, f_2\} + ad\{f_1, g_2\} + bc\{g_1, f_2\} + bd\{g_1, g_2\}$
- $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- $\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$
- $\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$

Ecuación de movimiento de F

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Índice de contenidos

Modificaciones a la formulación de Hamilton

Un Lagrangeano en problemas!

- Consideramos el Lagrangeano de una partícula que se mueve en un campo magnético uniforme:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{qB_0}{2c}V(x, y)$$

- Considerando que multiplicar el Lagrangeano por una constante no altera las eqs de movimiento tenemos lo siguiente:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \eta(x\dot{y} - y\dot{x}) - \eta V(x, y) \text{ con } \eta = \frac{qB_0}{2mc}$$

- Asumimos que η es muy grande, que en terminos físicos se traduce en que tenemos un campo magnético fuerte o una masa muy pequeña, por lo que nuestro lagrangeano tiene la siguiente forma:

$$L = \eta(x\dot{y} - y\dot{x}) - \eta V(x, y)$$

- Consideramos los momentos canónicos que son no invertibles:

$$p_x = -\eta y \qquad p_y = \eta x$$

- Con esto podemos obtener el Hamiltoniano y sus eqs de movimiento:

$$H = \eta V(x,y) \Rightarrow \qquad \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

- En discordancia con las ecuaciones de movimiento del Lagrangeano:

$$L = \eta(x\dot{y} - y\dot{x}) - \eta V(x,y) \qquad \dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}$$

- El problema es que existen ligaduras entre las coordenadas y los momentos las cuales no han sido tomadas en cuenta al hacer las variaciones que originan el Hamiltoniano

Índice de contenidos

- Vínculo entre las coordenadas y los momentos determinados por las restricciones primarias: $\phi(q,p)_m = 0$
- Teniendo en consideración esto se obtiene un Hamiltoniano nuevo: $H' = H + c_m(q,p)\phi_m$
- Así obtenemos unas nuevas ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q}$$

- Usando los Corchetes de Poisson podemos escribir de manera sencilla la ecuación para una función $g(q,p)$

$$\dot{g} = \{g, H\} + u_m\{g, \phi_m\}$$

- Considerando que $\phi_m = 0$ podemos escrbir el siguiente corchete :

$$\{g, u_m\phi_m\} = u_m\{g, \phi_m\}$$

- Así obtenemos la siguiente expresión:

$$\dot{g} = \{g, H + u_m\phi_m\} = \{g, H\} + u_m\{g, \phi_m\}$$

- Para continuar, consideramos lo siguiente:

$$\phi_m \approx 0 \to \text{ecuación débil}$$
$$H_T = H + u_m\phi_m \to \text{Hamiltoniano total}$$
$$g = \phi_m \to \dot{g} = \dot{\phi}_m = 0$$

- Con esto en mano establecemos las condiciones de consistencia:

$$\{\phi_{m'}, H\} + u_m\{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0$$

- La condición anterior puede dar origen a cuatro posibles resultados:
  1.- Una inconsistencia : $1 = 0$

  2.- Ecuación que se cumple como identidad $0 = 0$, en la cual solo se hace uso de las restricciones primerias

  3.- Una restricción secundaria $\chi(q, p)$ que es independiente de los u_m

  4.- Una ecuación que nos permita determinar los u_m

- En el caso de obtener una restricción secundaria consideramos que $g = \chi$ y $\dot{\chi} \approx 0$ se repite el proceso anterior añadiendo esta nueva restricción generando una ecuación de consistencia nueva:

$$\{\chi, H\} + u_m\{\chi, \phi_m\} \approx 0$$

- Etiquetando a las restricciones secundarias como ϕ_m , las sumamos a nuestro Hamiltoniano total como lo hicimos con las primarias Tenemos entonces un conjunto de ecuaciones que pueden ser resueltas (debido a la consitencia del Lagrangeano):

$$\{\phi_j, H\} + u_m\{\phi_j, \phi_m\} = 0$$

- Existen entonces una serie de soluciones que resuelven la versión homogénea de la ecuación anterior y una solución partícular:

$$V_m\{\phi_j, \phi_m\} = 0$$
$$u_m = U_m(q, p)$$
$$u_m = U_m + v_a V_{a,m}$$

- De este modo, el Hamiltoniano total se puede escribir de la siguiente forma

$$H_T = H' + v_a \phi_a \text{ con } \phi_a = V_{a,m}\phi_a$$

- Para complementar lo que hemos obtenido incluímos una nueva clasificación: Sea una variable dinámica $R(q, p)$

$$\{R, \phi_j\} \approx 0 \ \forall j \text{ decimos que } R \text{ es de primera clase.}$$
$$\text{OBS: Si } R \text{ es de primera clase: } \{R, \phi_j\} = r_{j,j'}\phi_{j'}$$

- De los resultados anteriores obtuvimos unos nuevos parámetros $v_a(t)$ que dependen del tiempo solamente; Estas cantidades corresponden a la simetría de Gauge escondida y por lo tanto se pueden fijar bajo ciertos procedimientos. Estos son tantos como cantidad de restricciones de primarias de 1ra clase tengamos.
- Las restricciones ϕ_a en palabras de Dirac son generadoras de transformaciones de contacto infenitésimales. En terminos del curso, son generadores de transformaciones de Gauge

Índice de contenidos

- Para continuar y poder aplicar el método de cuantización canónica a nuestra teoría es necesario establecer una definición de Corchete de Poisson que no genere inconsistencias al promoverlos a conmutadores
- El número de restricciones primarias de 1ra clase es igual al número de grados de libertad no físicos del sistema; Además estas generan transformaciones de Gauge del sistema
- Obtenemos el Hamiltoniano extendido añadiendole al Hamiltoniano total las restricciones secundarias de primera clase $\phi_{a'}$ acompañada de un factor arbitrario $v_{a'}$:

$$H_E = H_T + v_{a'}\phi_{a'}$$

- Pero... ¿ Qué ocurre con las restricciones de segunda clase?

$$\{\phi_i, \phi_j\} \neq 0 \text{ Para alguna restricción } \phi_j$$

- Supongamos que tenemos una restricción ϕ_1 de segunda clase tal que al tomar el Corchete de Poisson con ϕ_2:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = c \text{ Con } c \text{ un valor constante}$$

- Si queremos promoveer esto a un conmutador obtendremos que $[\widehat{\phi_1}, \widehat{\phi_2}] = i\hbar c$; Pero ϕ_1 y ϕ_2 se anulan en el espacio de fases, esto nos lleva a una inconsistencia
- Definimos la matriz invertible (se puede demostrar que es así!) que consta de tomar los Corchetes de Poisson entre todas las restricciones de segunda clase:

$$M_{a,b} = \{\phi_a, \phi_b\}$$

- Con la ayuda de esta Matriz se define el Corchete de Dirac el cual se puede demostrar que cumple con las propiedades de los Corchetes de Poisson y además tiene el prodigio de dar cuenta de las restricciones que ocurren en nuestro sistema, por lo cual es posible aplicar la cuantización canónica utilizando esta nueva definición:

$$\{f,g\}_{DB} = \{f,g\} - \{f,\phi_a\}M^{-1}_{a,b}\{\phi_b,g\}$$

- Cualquier ecuación débil antes definida ahora puede ser evaluada pues este corchete respeta las restricciones que estan impuestas en el sistema

Índice de contenidos

- Retomamos el ejemplo del inicio para ver como la formulación de los nuevos conceptos nos ayuda a resolver el problema; Recordamos que teníamos lo siguiente:

$H = \eta V(x, y)$ y los momentos canónicos $p_x = -\eta y$; $p_y = \eta x$

- Tenemos entonces las siguientes restricciones primarias:

$$\phi_1 = \eta y + p_x \approx 0 \text{ junto con } \phi_2 = \eta x - p_y \approx 0$$

- Así podemos generar el Hamiltoniano total de este sistema

$$H_T = \eta V(x, y) + u_1(\eta y + p_x) + u_2(\eta x - p_y)$$

Ejemplos de aplicación

Arreglo del lagrangeano en problemas

- Aplicamos las condiciones de consistencia a estas restricciones primarias $\{\phi_j, H_T\} \approx 0$ y obtenemos lo siguiente:

$$\{\phi_1, H_T\} = -\eta(\frac{\partial V}{\partial x} + 2u_2) \approx 0$$
$$\{\phi_2, H_T\} = \eta(\frac{\partial V}{\partial y} + 2u_1) \approx 0$$

- Notamos que las ecuaciones anteriores imponen condiciones sobre u_m por lo que no es necesario agregar ninguna restricción secundaria al Hamiltoniano. A continuación verificamos si esque son de primera o segunda clase:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -\{\phi_2, \phi_1\} = -2\eta$$

- Este resultado nos dice que estas restricciones son de segunda clase, generamos entonces la matriz M:

$$M = 2\eta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y su inversa } M^{-1} = \frac{1}{2\eta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de aplicación

Arreglo del lagrangeano en problemas

- Con la matriz anterior y considerando que podemos escribir $M_{i,j}^{-1} = \frac{1}{2\eta}\epsilon_{i,j}$ definimos el Corchete de Dirac de este sistema:

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\} - \frac{\epsilon_{i,j}}{2\eta}\{A, \phi_1\}\{\phi_j, B\}$$

- Finalmente, podemos calcular las ecuaciones de movimiento de este sistema:

$$\dot{x} = \{x, H_T\}_{DB} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dot{y} = \{y, H_T\}_{DB} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H_T\}_{DB} = -\frac{1}{2}\eta\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H_T\}_{DB} = -\frac{1}{2}\eta\frac{\partial V}{\partial y}$$

- De los resultados anteriores notamos en primer lugar que estas ecuaciones de movimiento cumplen con las restricciones iniciales pues:

$$\dot{p}_x = -\eta \dot{y} \;\; \dot{p}_y = \eta \dot{x}$$

- Tenemos además las siguientes relaciones que pueden ser promovidas sin ningún problema a conmutadores en una teoría cuántica:

$$\{x, y\}_{DB} = -\frac{1}{2\eta}$$

$$\{x, p_x\}_{DB} = \frac{1}{2}$$

$$\{y, p_y\}_{DB} = \frac{1}{2}$$

$$\{x, p_y\}_{DB} = \{y, p_x\}_{DB} = 0$$

Índice de contenidos

- Comenzamos con el lagrangeano de los campos de Maxwell en ausencia de fuentes:

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

- Calculamos los momentos canónicos a partir de la densidad lagrangeana

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} = -F^{0i} = -E^i$$

- Hasta este punto es posible notar que el hecho de que $\pi^0 = 0$ impone una restricción primaria en todos los puntos del espacio, el resto de los momentos conjugados son simplemente las componentes del campo Eléctrico

- Buscamos una expresión para las 'velocidades' de nuestras variable dinámica que en este caso es el cuadripotencial A^μ

$$\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0$$

$$\partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0$$

- Con lo anterior podemos escribir el Hamiltoniano de esta teoría utilizando la transformada de Legendre

$$H = \int d^3x[\pi^\mu \partial_0 A_u + \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$$

$$H = \int d^3x[-\tfrac{1}{2}\pi^i\pi_i + \tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0(\partial_i\pi^i) + \pi^0\partial_0 A_0]$$

- Algunas consideraciones sobre la expresión anterior es que los primeros dos terminos corresponden a la energía electromagnética usual $\vec{E}^2 + \vec{B}^2$. Si aplicamos la restricción de que $\pi^0 = 0$ y considerando la ecuación de movimiento para esta componente obtenemos que $\partial_i \pi^i = 0$ que es nada más y nada menos que la Ley de Gauss.

- Tenemos entonces que la ley de Gauss es una condición de consistencia para la restricción primaria en $\pi^0 = 0$. Además como el término A_0 es arbitrario hacemos la analogía con lo visto anteriormente y lo reemplazamos por un $v(t)$ mientras que la ley de gauss $\partial_i \pi^i$ es la restricción secundaria $\chi = 0$
- Es posible comprobar además que ambas restricciones son de primera clase, razón por la cual son generadoras de transformaciones de contacto (gauge) en base a lo visto anteriormente; Verifiquemos esto:

$$\delta_\epsilon A_\mu = \{A_\mu, \int d^3x \epsilon \pi^0\} = \delta^0_\mu \epsilon$$

$$\delta_\eta A_\mu = \{A_\mu, \int d^3x \eta \partial_i \pi^i\} = -\delta^i_\mu \partial_i \eta$$

$$\delta \pi = 0$$

- De las ecuaciones anteriores debido a la arbitrariedad de los coeficientes podemos considerar $\epsilon = -\partial_0 \eta$ lo cual revela lo a estas alturas inevitable: Ambas restricciones generan las transformaciones de Gauge usuales conocidas desde el curso de electromagnetismo:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \eta$$

- Una consecuencia notable de lo anterior es que bien es sabido que los campos de la teoría de Maxwell tienen solo dos grados de libertad físicos (polarizaciones) y sin embargo el cuadripotencial considerado como variable dinámica posee cuatro componentes por punto del espacio. Las restricciones antes encontradas son entonces un par de grados de libertad no físicos quedándonos así con los dos grados de libertad que conocíamos

Discusiones adicionales

- Un ejercicio propuesto que utiliza este formalismo se puede encontrar en el libro de Peskin y Schroeder 9.2d en el cual se utiliza un lagrangeano con variables de tipo Grassmann, vealo si quiere ejercitar
- Existe toda una discusión topológica y matematica (muy interesante!) al respecto de cómo intervienen las restricciones de los distintos tipos en el espacio de fases. Es así, que se pueden emplear métodos matemáticos tales como la fijación de Gauge o la cuantización de BRST para obtener un " buen gauge " de nuestra teoría. En el caso del electromagnetismo el primero nos daría por ejemplo el Gauge de Coulomb, mientras que el Gauge de Lorentz no queda completamente determinado por el método de fijación y se necesita algo más (BRST)

Bibliografía I

Paul A.M. Dirac
Lectures on Quantum Mechanics.
Snowball Publishing.

Ganashyam Date
Lectures on Constrained Systems
https://arxiv.org/pdf/1010.2062.pdf

Steven Avery
Dirac Brackets
Belfer Graduate School of Science Monographs Series number two (1964)

Ingemar Bengtsson
Constrained Hamiltonian Systems
http://www.fysik.su.se/ ingemar/Nr13.pdf