Anomalías Quirales

Iván Ignacio Muñoz Sandoval

5 de junio de 2017

Outline

Nivel Clásico

Consideremos una teoría para fermiones acoplados a un campo de gauge $A_\mu(x) = A_\mu$ arbitrario, $A_\mu = A_\mu^a T_a$ con T_a el generador del álgebra de Lie. La parte fermionica de la teoría es dada por el siguiente lagrangeano,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{1}$$

Es fácil demostrar que es invariante bajo transformaciones del tipo $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ y $\psi \to e^{i\beta\gamma_5}\psi$. Las corrientes que se obtienen son,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{2}$$

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{3}$$

Donde llamaremos, j^μ como corriente fermionica y a j_5^μ como corriente axial.

Un calculo directo muestra,

$$\mathcal{D}_\mu j^\mu = 0. \tag{4}$$

Como consecuencia de $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, tendremos

$$D_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{5}$$

Es necesario que los fermiones que consideremos sean sin masa.

El problema de la medida

[4][3] Consideremos el siguiente lagrangeano,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \mathcal{L}_{\text{matería}}, \tag{6}$$

donde consideraremos $\mathcal{L}_{\text{matería}} = -\bar{\psi} \not{D} \psi$. Consideremos una transformación local,

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(x)\psi(x),$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\bar{U}(x), \text{donde } \bar{U}(x) = \gamma^0 U^\dagger \gamma^0.$$

Las medidas de integración transformaran de la siguiente manera,

$$\mathcal{D}\psi \to \mathcal{D}\psi' = (\det \mathcal{U})^{-1} \mathcal{D}\psi, \quad \mathcal{D}\bar{\psi} \to \mathcal{D}\bar{\psi}' = (\det \bar{\mathcal{U}})^{-1} \mathcal{D}\bar{\psi} \tag{7}$$

Entonces podemos ver que la medida transformara de la siguiente manera.

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \to \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}' = (\det \mathcal{U})^{-1} (\det \bar{\mathcal{U}})^{-1} \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}, \tag{8}$$

Transformación no Quirales

Consideremos la transformación unitaria U dada por,

$$U(x) = \exp(i\epsilon^a(x)T_a) \tag{9}$$

donde T_a es el generador del álgebra $T_a^\dagger = T_a$ y que conmuta con las matrices γ^μ. Es directo ver que,

$$\bar{U}(x) = \gamma^0 U^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \exp(-i\epsilon^a T_a)\gamma^0 = \exp(-i\epsilon^a T_a)(\gamma^0)^2 = U^{-1}(x). \tag{10}$$

Entonces, a partir de $\bar{U} = U^{-1}$, podemos verificar que

$$(\det \mathcal{U})^{-1}(\det \bar{\mathcal{U}})^{-1} = 1 \tag{11}$$

Por lo tanto la medida queda invariante y por consiguiente, la integral funcional también.

Transformación Quirales

Consideremos ahora una transformación unitaria quiral dada por,

$$U(x) = \exp(i\epsilon^a(x)T_a\gamma_5), \quad \gamma_5 = \gamma_5^\dagger. \tag{12}$$

De aquí vemos que,

$$\bar{U}(x) = \gamma^0 \exp(-i\epsilon(x)\gamma_5)\gamma^0 = \exp(i\epsilon\gamma_5)(\gamma^0)^2 = \exp(i\epsilon\gamma_5) = U(x). \tag{13}$$

Por lo tanto, ahora tendremos,

$$\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \Rightarrow (\det \mathcal{U})^{-1}(\det \bar{\mathcal{U}})^{-1} = (\det \mathcal{U})^{-2}. \tag{14}$$

Si el determinante no es uno, estaremos en presencia de un termino que nos modifica la integral .

Podemos escribir el determinante usando $\det(A) = \exp(\,\text{tr}\ln(A))$, entonces $(\det\mathcal{U})^{-2} = \exp(-2\,\text{tr}\ln\mathcal{U})$. Veamos entonces,

$$\begin{aligned}
\text{tr}\ln\mathcal{U} &= \int d^4x\langle x|\,\text{tr}\ln\mathcal{U}|x\rangle, \langle x|\mathcal{U}|y\rangle = U(x)\delta(x-y) \\
&= \int d^4x\delta^{(4)}(x-x)\,\text{tr}(\ln U), \quad U(x) = \exp(i\epsilon\gamma_5) \\
&= \int d^4\delta^{(4)}(0)\,\text{tr}(i\epsilon\gamma), \quad \epsilon(x) = \epsilon^a(x)T_a
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\det\mathcal{U})^{-2} &= \exp\left\{-2i\int d^4x\delta^{(4)}(0)\epsilon^a\,\text{tr}(T_a\gamma_5)\right\} \\
&= \exp\left\{i\int d^4x\epsilon^a(x)a_a(x)\right\}
\end{aligned}$$

donde hemos nombrado

$$a_a = -2\delta^{(4)}(0)\ \mathrm{tr}(T_a\gamma_5), \tag{15}$$

la cual llamaremos la "anomalía".
Veamos que $(\det\mathcal{U})^{-2}$ esta mal definido, ya que $\delta^{(4)}(0)$ diverge en UV, mientras que tr$(T_a\gamma_5)$ se anula.
Procederemos a regularizar esta integral, para esto usaremos momentum cut-off. Para hacer esto, diremos que,

$$\int d^4x\epsilon^a a_a(x) = -2\lim_{\Lambda\to\infty}\ \mathrm{tr}\mathcal{T}_\Lambda, \quad \mathcal{T}_\Lambda = \epsilon^a(\hat{x})\gamma_5 T_a f\left(\left(\frac{i\hat{\not{D}}}{\Lambda}\right)^2\right). \tag{16}$$

- $f(0)=1$ y $\lim_{s\to\infty} f(s)=0$
- $sf'(s)=0$ en $s=0$ y $s=\infty$. Ejemplo de funciones como estas son dadas por $f(s)=1/(s+1)$ o $f(s)=e^{-s}$.

Escogemos que el regulador $f(-\hat{\not{D}}^2/\Lambda^2)$ sea invariante de gauge. El operador $\hat{\not{D}}$ satisface, $\langle\chi|\hat{\not{D}}|x\rangle = \not{D}\langle\chi|x\rangle$.

Calculemos entonces la traza en (16),

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\mathcal{T}_\Lambda &= \int d^4x \left\langle x \left| \epsilon^a(\hat{x})\gamma_5 T_a f\left(\left(i\hat{\not{D}}/\Lambda\right)^2\right)\right| x \right\rangle \\
&= \int d^4x \epsilon^a(x) \int d^4p \langle x|p\rangle \ \mathrm{tr}\left(\gamma_5 T_a \langle p| f((i\hat{\not{D}}/\Lambda)^2|x\rangle\right) \\
&= \int d^4x \epsilon^a(x) \int d^4p \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^4} \ \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 T_a \ f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}\left[\gamma^\mu\partial_\mu - i\gamma^\mu A_\mu\right]^2\right)\right. \\
&\quad \left. e^{-ipx}\right\} \\
&= \int d^4x \epsilon^a(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 T_a f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[-i\not{p} + \not{D}]^2\right)\right\}, \quad q = \frac{p}{\Lambda} \\
&= \int d^4x \epsilon^a(x) \Lambda^4 \int \frac{d^4q}{(2pi)^4} \ \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 T_a f\left(-\left[-i\not{q} + \frac{\not{D}}{\Lambda^2}\right]^2\right)\right\}
\end{aligned}$$

De la tercera a cuarta igualdad usamos

$$f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[\gamma^\mu\partial_\mu - i\gamma^\mu A_\mu]^2\right)e^{-ipx} = \\ e^{-ipx} f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu i p_\mu - i\gamma^\mu A_\mu]^2\right)$$

Desarrollaremos la función $f(-[-i\not{q}+\not{D}/\Lambda]^2) = f(q^2+2iq^\mu D_\mu/\Lambda - \not{D}^2/\Lambda^2)$ en una serie de Taylor en torno a q^2. Esta expansión será dada por,

$$f(q^2 + 2iq^\mu D_\mu/\Lambda - \not{D}^2/\Lambda) = f(q^2) + \left(\frac{2iq^\mu D_\mu}{\Lambda} - \frac{\not{D}^2}{\Lambda}\right) f'(q^2) \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{2iq^\mu D_\mu}{\Lambda} - \frac{\not{D}^2}{\Lambda^2}\right)^2 f''(q^2) + \dots$$

Este termino va multiplicado por γ_5 y trazado.

Es por esto que el termino $\gamma_5 f(q^2)$ no aportara ya que tr$(\gamma_5) = 0$, lo mismo ocurrirá con cualquier termino que no incluya γ^μ. Además el termino proporcional a $\gamma_5 \not{D}^2$ también se anulara al aplicar la traza ya que tr$(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$. Por lo tanto nos quedaría solo el termino proporcional a $(\gamma_5 \not{D}^2)^2$. Los siguientes términos en la expansión en Taylor no contribuirán al tomar el limite de $\Lambda \to \infty$, por lo que el termino relevante será,

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \mathrm{tr} \mathcal{T}_\Lambda = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} f''(q^2)\ \mathrm{tr}(\gamma_5 T_a (-\not{D}^2)^2) \quad (17)$$

Para realizar esta integral, pasaremos al espacio euclideo ($\int d^4p f(p_\mu p^\mu) \to i \int d^4p_E f(p_E^2)$).

Explicitamente tendremos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}f''(q^2) &= \frac{1}{2(2\pi)^4}\int dq_0 dq_1 dq_2 dq_3 f''(q^2) \\
&= \frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4q f''(q^2) \\
&= \frac{i}{2(2\pi)^4}\mathsf{Vol}(S^3)\int_0^\infty dq q^3 f''(q^2), \quad \xi = q^2 \\
&= \frac{i}{2(2\pi)^4}\frac{1}{2}\pi^2 2\int_0^\infty d\xi \xi f''(\xi) \\
&= \frac{i}{32\pi^2}\left(\xi f'(\xi)\,|_0^\infty - \int_0^\infty f'(\xi)d\xi\right)
\end{aligned}$$

Dado que $sf'(s) = 0$ para $s = 0$ y $s \to \infty$, el primer termino se anula. Debido a $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}f''(q^2) = \frac{i}{32\pi^2} \tag{18}$$

Para estudiar la traza, veamos el termino dado por,

$$
\begin{aligned}
\not{D}^2 &= \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu \\
&= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu) D_\mu D_\nu \\
&= \frac{1}{2}(2\eta^{\mu\nu} + \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^m u) D_\mu D_\nu \\
&= D^\mu D_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^n u D_\mu D_\nu - \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu D_\mu D_\nu \\
&= D^\mu D_\mu - \frac{i}{4}\gamma^\mu\gamma^\nu i(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) + \frac{i}{4}\gamma^\nu\gamma^\mu i(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \\
&= D^\mu D_\mu - \frac{i}{4}\gamma^\mu\gamma^\nu [D_\mu, D_\nu] + \frac{i}{4}\gamma^\nu\gamma^\mu i[D_\mu, D_\nu], \quad i[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} \\
&= D^\mu D_\mu - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la traza será,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\gamma_5 T_a(-\not{D}^2)^2) = & \ \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 T_a \left(D_\mu D^\mu - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}\right)^2\right\} \\ = & \left(-\frac{i}{4}\right)^4 \ \mathrm{tr}(\gamma_5 T_a [\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\alpha, \gamma^\beta] F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Es importante decir que, hasta ahora, hemos usado $\mathrm{tr}(\ldots)$ indistintamente para la traza sobre las matrices de Dirac y sobre los generadores del álgebra, pero ahora hay que tener en cuenta que son dos trazas que actúan sobre objetos distintos.
En el calculo anterior hemos usado que $\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0$. Usando ahora $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.
Finalmente tendremos,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mathrm{tr}\mathcal{T}_\Lambda = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^a \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ \mathrm{tr}(T_a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \tag{19}$$

Finalmente,

$$\int d^4x \epsilon^a(x) a_a = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \epsilon^a(x) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ tr}(T_a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \qquad (20)$$

donde podemos ver que la anomalía es ,

$$a_a(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ tr}(T_a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \qquad (21)$$

donde recordemos que $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a$, por lo que la traza no se anula.

Anomalía quiral abeliana

Veamos que sucede con el termino que llamamos anomalía si el grupo de simetría es abeliano.

$$U(x) = \exp(i\epsilon(x)T\gamma_5), \quad T = T^\dagger, \quad [T, T_a] = 0, \quad [T, \gamma_5] = 0. \tag{22}$$

Nos interesa saber el valor de expectación de la derivada de corriente bajo una transformación quiral dada por (22). Consideremos la integral funcional,

$$Z[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp(iS_{\text{materia}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]) \tag{23}$$

Hemos visto que bajo una transformación quiral, la medida de integración no es invariante y la acción nos entrega un corriente.

$$Z[\psi,\bar{\psi},A_\mu] = \int \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}\prime \exp(iS_{\text{materia}}[\psi',\bar{\psi}\prime,A_\mu])$$

$$= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\Bigg(iS_{\text{materia}}[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int d^4x\epsilon(x)\partial_\mu J_5^\mu$$

$$+i\int d^4x\epsilon(x)a(x)\Bigg)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp(iS_{\text{materia}}[\psi,\bar{\psi},A_\mu])\,[1+$$

$$i\int d^4x\epsilon(x)\,(a(x)+\partial_\mu J_5^\mu)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Bigg]$$

De donde podemos ver que,

$$-\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle = a(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \text{tr}(tF_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \tag{24}$$

Identidades de Ward anomalas

Queremos obtener el valor de expectación de las corriente $J^{\alpha\mu} = \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha}\mathcal{L}_{\text{matería}}$. Estos valores se pueden obtener tomando sucesivas derivadas con respecto a A_μ^α de la acción efectiva $W[A]$ definida como,

$$e^{iW[A]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\left(\int d^4x\mathcal{L}_{\text{matería}}[\psi,\bar{\psi}]\right). \qquad (25)$$

Se sigue de la definición de $W[A]$ que,

$$\frac{\delta}{\delta A_{\mu_1}^{\alpha_1}(x)}\cdots\frac{\delta}{\delta A_{\mu_n}^{\alpha_n}(x)}W[A]\bigg|_{A=0} = i^{n-1}\langle J_{\alpha_1}^{\mu_1}(x_1)\ldots J_{\alpha_n}^{\mu_n}(x_n)\rangle. \qquad (26)$$

Consideremos la funcional de los diagramas OPI, $i\Gamma[A]$, cuyas funciones de vértices de $n-$puntos $\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n)$ es el valor de expectación de los n factores de $\mathcal{L}_{\text{int}} = iJ^{\mu}_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu}$

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) = i^{n-1} \langle J^{\mu_1}_{\alpha_1}(x_1) \ldots J^{\mu_n}_{\alpha_n}(x_n) \rangle. \tag{27}$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta}{\delta A^{\alpha_1}_{\mu_1}(x)} \cdots \frac{\delta}{\delta A^{\alpha_n}_{\mu_n}(x)} W[A] \bigg|_{A=0} \tag{28}$$

Consideremos ahora la anomalía abeliana dada por,

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu(x) \rangle = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ \mathrm{tr}(tF_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}), \tag{29}$$

donde el campo de gauge posee simetría $U(1)$Entonces para la anomalía,

$$a(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ \mathrm{tr}(tF_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \tag{30}$$

tendremos

$$\frac{\delta}{\delta A\nu(y)} \frac{\delta}{A_\rho(z)} a(x) = \frac{1}{\pi^2} \ \mathrm{tr}(ttt) \epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \delta^{(4)}(y-x) \right) \frac{\partial}{\partial z^\sigma} \delta^{(4)}(z-x)$$

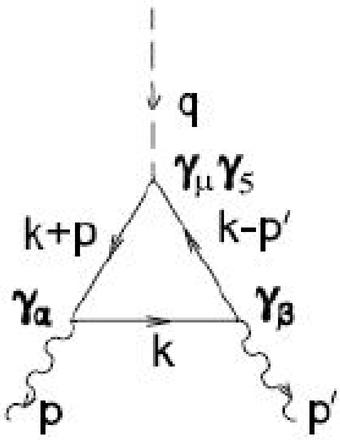
Pero esto debe ser igual a

$$-\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta}{\delta A_\rho(z)}\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle\Big|_{A=0} = \partial_\mu\langle J_5^\mu(x)J^\nu(y)J^\rho(z)\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle J_5^\mu(x)J^\nu(y)J^\rho(z)\rangle = -\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(x,y,z) \tag{31}$$

El correlador de tres corrientes corresponde a un diagrama triangular a 1-loop.



Vida media π^0

Un ejemplo donde la anomalía es relevante: Vida media de $\pi^0 \to 2\gamma$ es $\tau(\pi^0) \approx 10^{-16}s$. Antes de las anomalías

- Usando Partially Conserved Axial-Vector (PCAC), $\partial^\mu J_{5\mu} = F_\pi m_\pi^2 \phi_\pi$, la vida media es $\tau(\pi^0) \approx 10^{-13}s$.

En 1969, Adler, Bell & Jackiw mostraron que los diagramas triangulares modifican la divergencia de la corriente axial. Es necesario incluir el termino de anomalia en la PCAC para obtener la vida media correcta del π^0

Referencias I

S. L. Adler.
Axial vector vertex in spinor electrodynamics.
Phys. Rev., 177:2426–2438, 1969.

J. S. Bell and R. Jackiw.
A pcac puzzle: $\pi \to \gamma\gamma$ in the σ-model.
Il Nuovo Cimento A (1965-1970), 60(1):47–61, 1969.

A. Bilal.
Lectures on Anomalies.
2008.

Referencias II

K. Fujikawa.
Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories.
Phys. Rev. Lett., 42:1195–1198, Apr 1979.