Cuantización canónica del campo escalar

18 de marzo de 2015

Cuantización canónica

Receta en mecánica cuántica para cuantizar: *partir del formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica*

1. Promover a operadores las coordenadas generalizadas q_a y los momentos conjugados p^a
2. La estructura del bracket de Poisson se transforma en relaciones de anti-conmutación

$$[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$$

$$[q_a, p^b] = i\,\delta_a^b$$

En teoría de campos hacemos lo mismo, ahora para los campos $\phi_a(\vec{x})$ y sus momentos conjugados $\pi^a(\vec{x})$. Así, un campo cuántico es un operador que satisface las siguientes reglas de conmutación:

$$[\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] = [\pi^a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = 0$$

$$[\phi_a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_a^b$$

Notar que estas relaciones se establecen para tiempos iguales en campos y momentos conjugados.

Campos reales

En este caso, estudiaremos una densidad lagrangiana con la siguiente forma:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\Big)$$

Este lagrangiano es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange,

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)\phi(x) = 0$$

Como solución a la ecuación de Klein–Gordon para un campo real, proponemos superposiciones de ondas planas:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Big(f(k)\,e^{-ik\cdot x} + f^*(k)\,e^{ik\cdot x}\Big)$$

La solución planteada es manifiestamente real. Si sustituimos en K–G:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,(m^2-k^2)\Big(f(k)\,e^{-ik\cdot x}+f^*(k)\,e^{ik\cdot x}\Big)=0$$

La ecuación anterior se satisface si:

$$f(k)=2\pi\,\delta(k^2-m^2)\,c(k)\qquad\wedge\qquad f^*(k)=2\pi\,\delta(k^2-m^2)\,c^*(k)$$

Con ello, una solución general a la ecuación de K–G para un campo real es:

$$\phi(x^\mu)=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\,\delta(k^2-m^2)\Big(c(k)\,e^{-ik\cdot x}+c^*(k)\,e^{ik\cdot x}\Big)$$

La delta requiere que:

$$k^2 = k_\mu k^\mu = m^2 \;\rightarrow\; k_0 = \pm\,\omega_k\ , \quad \omega_k \equiv \sqrt{\|\vec{k}\|^2 + m^2}$$

Usando la siguiente propiedad de la delta,

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta({k_0}^2 - {\omega_k}^2) = \frac{\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)}{2\omega_k}$$

podemos realizar explícitamente la integración en k_0:

$$\begin{aligned}\phi(x^\mu) \;&=\; \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \Big(c(\omega_k, \vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c(-\omega_k, \vec{k})\, e^{i(\omega_k t + \vec{k}\cdot x)} \\ &\quad + c^*(\omega_k, \vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c^*(-\omega_k, \vec{k})\, e^{-i(\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{x})}\Big)\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variables $\vec{k} \to -\vec{k}$ en la segunda y cuarta integral:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \Big(c(\omega_k, \vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c(-\omega_k, -\vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c^*(\omega_k, \vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c^*(-\omega_k, -\vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \Big)$$

Podemos definir el siguiente operador:

$$\mathbf{a}(\vec{k}) \equiv c(\omega_k, \vec{k}) + c^*(-\omega_k, -\vec{k})$$

Con ello,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \Big(\mathbf{a}(\vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \mathbf{a}^*(\vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \Big)$$

Cuantización del campo real

En base a lo anterior,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \left(\mathbf{a}(\vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \mathbf{a}^*(\vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

es posible definir un momento conjugado:

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = -i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2} \left(\mathbf{a}(\vec{k})\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \mathbf{a}^*(\vec{k})\, e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

Recordemos la propiedad dual de la transformada de Fourier en tres dimensiones:

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(\vec{x})\} = f(-\vec{k})$$

Promovemos los objetos $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*$ al rango de operadores. Utilizando la propiedad dual, podemos despejar los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}(k) &= i \int d^3\vec{x}\; e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \Big(\pi(x) - i\,\omega_k \phi(x)\Big) \\
\mathbf{a}^\dagger(k) &= -i \int d^3\vec{x}\; e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \Big(\pi(x) + i\,\omega_k \phi(x)\Big)
\end{aligned}
$$

Con ello se puede probar que:

$$[\mathbf{a}(k_1), \mathbf{a}(k_2)] = [\mathbf{a}^\dagger(k_1), \mathbf{a}^\dagger(k_2)] = 0$$

$$[\mathbf{a}(k_1), \mathbf{a}^\dagger(k_2)] = (2\pi)^3 (2\omega_{k_1})\, \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$

Ahora, recordando que $\pi(x) = \partial_0\phi(x)$, entonces el hamiltoniano del sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\left(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$$

Escrito en término de los operadores de creación y destrucción, luego de integrar sobre todo el espacio,

$$\mathbf{H} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\,\frac{\omega_k}{2}\left(\mathbf{a}^\dagger(k)\mathbf{a}(k) + \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^\dagger(k)\right)$$

Estructura del vacío

Como en el caso de oscilador armónico en QM, definimos el estado vacío $|0\rangle$ a través de la condición de ser aniquilado por todos los operadores $\mathbf{a}(k)$:

$$\mathbf{a}(k)|0\rangle = 0\ , \quad \forall k$$

Con esta definición,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}|0\rangle &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\ \frac{\omega_k}{2}\Big(\mathbf{a}^\dagger(k)\mathbf{a}(k) + \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^\dagger(k)\Big)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\ \frac{\omega_k}{2}\Big(2\mathbf{a}^\dagger(k)\mathbf{a}(k) + [\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^\dagger(k)]\Big)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\ \frac{\omega_k}{2}\Big((2\pi)^3 2\omega_k\, \delta^{(3)}(0)\Big)|0\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E_{vacuum} = \langle 0|\mathbf{H}|0\rangle = \delta^{(3)}(0)\left[\int d^3\vec{k}\ \frac{\omega_k}{2}\right]$$

La expresión anterior tiene dos problemas:

1. *El espacio es infinitamente grande.* Una forma de aislar este infinito es imponer PBC en el campo,

$$(2\pi)^3\,\delta^{(3)}(0) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L/2}^{L/2} d^3\vec{x}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\Big|_{\vec{k}=\vec{0}} = V$$

y definir una densidad de energía:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E_{vacuum}}{V} = \int d^3\vec{k}\ \frac{\omega_k}{2}$$

2. *La densidad de energía sigue divergente.* Para solucionar este problema, podemos "recalibrar" nuestros niveles de energía (mediante una constante infinita) removiendo del hamiltoniano la energía del vacío:

$$:\mathbf{H}: \equiv \mathbf{H} - \langle 0|\mathbf{H}|0\rangle$$

Con ello,

$$:\mathbf{H}: = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\; \omega_k[\mathbf{a}^\dagger(k)\mathbf{a}(k)]$$

que corresponde al orden normal de un operador: *colocar los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción, cuando se refieren al mismo momentum*.

Estados de una partícula

En analogía con el caso del QHO, el hamiltoniano ordenado normal y los $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger$ obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{a}(k)] = -\omega_k \mathbf{a}(k) \qquad \wedge \qquad [\mathbf{H}, \mathbf{a}^\dagger(k)] = \omega_k \mathbf{a}^\dagger(k)$$

Estas relaciones implican que es posible construir autoestados de energía haciendo actuar $\mathbf{a}^\dagger$ sobre el vacío. Definimos:

$$|k\rangle \equiv \mathbf{a}^\dagger(k)|0\rangle$$

Usando las relaciones de conmutación antes descritas, es posible definir la normalizacion de estos estados:

$$
\begin{aligned}
\langle k_1|k_2\rangle &= \langle 0|\mathbf{a}(k_1)\mathbf{a}^\dagger(k_2)|0\rangle = \langle 0|[\mathbf{a}(k_1)\mathbf{a}^\dagger(k_2)]|0\rangle \\
&= (2\pi)^3 2\omega_{k_1}\,\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)
\end{aligned}
$$

El nuevo estado que construimos posee una energía dada por:

$$
\mathbf{H}|k\rangle = E_k|k\rangle = \omega_k|k\rangle
$$

y, de acuerdo a la definición de ω_k, interpretamos al estado $|k\rangle$ como el autoestado de momentum de una partícula de masa m.

Consideremos ahora al momentum lineal total como un operador normalmente ordenado,

$$
\mathbf{P} = -\int d^3\vec{x}\;\pi\,\nabla\phi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_p}\;\vec{p}\,\mathbf{a}^\dagger(p)\mathbf{a}(p)
$$

Con ello, podemos comprobar la aseveración realizada anteriormente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}|p\rangle &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3\, 2E_q}\; \vec{q}\,\mathbf{a}^\dagger(q)\mathbf{a}(q)\mathbf{a}^\dagger(p)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3\, 2E_q}\; \vec{q}\,\mathbf{a}^\dagger(q)\Big((2\pi)^3 2E_p\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) + \mathbf{a}^\dagger(p)\mathbf{a}(q)\Big)|0\rangle \\
&= \vec{p}\,|p\rangle
\end{aligned}
$$

Estados de muchas partículas

Haciendo actuar muchas veces el operador de creación sobre el vacío, podemos crear estados de muchas partículas. Interpretamos el estado

$$|p_1, \ldots, p_n\rangle = \mathbf{a}^\dagger(p_1)\cdots\mathbf{a}^\dagger(p_n)|0\rangle$$

como un estado de $n-$partículas. Dado que $[\mathbf{a}^\dagger(p_i), \mathbf{a}^\dagger(p_j)] = 0$, entonces los estados son simétricos ante permitación de dos partículas:

$$|p, q\rangle = \mathbf{a}^\dagger(p)\mathbf{a}^\dagger(q)|0\rangle = \mathbf{a}^\dagger(q)\mathbf{a}^\dagger(p)|0\rangle = |q, p\rangle$$

Esto significa que las partículas correspondientes a la teoría K–G real son *bosones*.

Dado que tenemos muchas partículas, tiene sentido contar el número n de ellas en un estado dado. Esta operación se realiza a través del operador de número:

$$\mathbf{N} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)\,2E_p}\;\mathbf{a}^\dagger(p)\mathbf{a}(p)$$

con la propiedad

$$\mathbf{N}|p_1, \ldots, p_n\rangle = n|p_1, \ldots, p_n\rangle$$

Además, se puede probar que el operador de número conmuta con el hamiltoniano, para este caso correspondiente a una teoría libre.

Cuantización de un campo escalar complejo

Ahora suponemos que $\phi(x) \in \mathbb{C}$. Las correspondientes densidades lagrangianas y hamiltoniananas son:

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \ , \quad \mathscr{H} = \pi^* \pi + (\nabla \phi^*) \cdot (\nabla \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

Las ecuaciones de movimiento para ambos campos son:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi^* &= 0 \end{aligned}$$

Después de reemplazar los campos clásicos por operadores, la cuantización canónica se puede realizar de forma análoga al caso de un campo escalar real:

$$[\phi(x), \pi(y)] = [\phi^\dagger(x), \pi^\dagger(y)] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$
$$[\phi(x), \pi^\dagger(y)] = 0$$

con:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_p}\,\left(\mathbf{a}_+(p)\,e^{-ip\cdot x} + \mathbf{a}_-{}^\dagger(p)\,e^{ip\cdot x}\right)$$
$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_p}\,\left(\mathbf{a}_-(p)\,e^{-ip\cdot x} + \mathbf{a}_+{}^\dagger(p)\,e^{ip\cdot x}\right)$$

Como en el caso del campo escalar real, es posible invertir estas relaciones y calcular los conmutadores para $\mathbf{a}_\pm(p)$ y $\mathbf{a}_\pm{}^\dagger(p)$. El único no nulo que se encuentra de esta forma es:

$$[\mathbf{a}_\pm(p), \mathbf{a}_\pm{}^\dagger(q)] = (2\pi)^3 2E_p\,\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

Las relaciones anteriores implican que hay dos conjuntos de operadores de creación y destrucción, $\mathbf{a}_-{}^\dagger(p), \mathbf{a}_-(p)$ y $\mathbf{a}_+{}^\dagger(p), \mathbf{a}_+(p)$. En consecuencia, tenemos dos tipos de estados:

$$|p,+\rangle = \mathbf{a}_+{}^\dagger(p)|0\rangle \qquad \wedge \qquad |p,-\rangle = \mathbf{a}_-{}^\dagger(p)|0\rangle$$

donde el vacío es definido de la forma usual:

$$\mathbf{a}_\pm(p)|0\rangle = 0 \ , \quad \forall p$$

y normalizado como $\langle 0|0\rangle = 1$. Los estados de muchas partículas están dados por:

$$|p_1, \varepsilon_1; \ldots; p_n, \varepsilon_n\rangle \equiv \mathbf{a}_{\varepsilon_1}{}^\dagger(p_1) \cdots \mathbf{a}_{\varepsilon_n}{}^\dagger(p_n)|0\rangle$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$.

Para cada tipo de excitación, es posible introducir el operador de número:

$$\mathbf{N}_{\pm} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^2\, 2E_p}\; \mathbf{a}_{\pm}{}^{\dagger}(p)\mathbf{a}_{\pm}(p)$$

Con las propiedades:

$$[\mathbf{N}_{\pm}, \mathbf{a}_{\pm}{}^{\dagger}(p)] = \mathbf{a}_{\pm}{}^{\dagger}(p) \qquad \wedge \qquad [\mathbf{N}_{\pm}, \mathbf{a}_{\mp}{}^{\dagger}(p)] = 0$$

Notemos que el lagrangiano para un campo escalar complejo es invariante bajo transformaciones de $U(1)$:

$$\begin{aligned} \phi &\to e^{-i\alpha}\phi & \qquad \delta\phi &= i\alpha\phi \\ \phi^{\dagger} &\to e^{i\alpha}\phi^{\dagger} & \qquad \delta\phi^{\dagger} &= -i\alpha\phi^{\dagger} \end{aligned}$$

El teorema de Noether establece que

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\vec{x} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger \right) \\ &= \int d^3\vec{x} \left(\pi\, \delta\phi + \pi^\dagger\, \delta\phi^\dagger \right) \end{aligned}$$

es una cantidad conservada. Con ello, podemos definir el operador de cargar normalmente ordenado,

$$\mathbf{Q} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2E_p} \left(\mathbf{a}_+{}^\dagger(p)\mathbf{a}_+(p) - \mathbf{a}_-{}^\dagger \mathbf{a}_-(p) \right) = \mathbf{N}_+ - \mathbf{N}_-$$

Este resultado muestra que el estado $|p,+\rangle$ posee carga $+1$, y que el estado $|p,-\rangle$ posee carga -1. Así, podemos distinguie entre *partículas y anti-partículas*.