La ecuación de Dirac

17 de marzo de 2015

Hamiltoniano de Dirac

El hamiltoniano propuesto por Dirac es el siguiente:

$$H_D = -i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta\,m$$

y conduce a la siguiente ecuación:

$$\Big[i\,\partial_t + i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla - \beta\,m\Big]\psi = 0$$

Los objetos α_i y β satisfacen las siguientes relaciones:

$$\beta^2 = \mathbb{1}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\,\delta_{ij}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

Dirac probó que, para **partículas con masa**, la mínima dimensión para representar el álgebra mediante matrices era $n = 4$.

Representación de Dirac:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Para mostrar que este formalismo es invariante de Lorentz, multiplicamos la ecuación de Dirac por β (por la izquierda):

$$i\beta\,\partial_t\psi + \Big(i\beta\,\alpha_i\partial^i - \beta^2 m\Big)\psi = 0$$

Si llamamos $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha_i$, y usando que $\beta^2 = \mathbb{1}$,

$$i\gamma^0\,\partial_t\psi + \Big(i\,\vec{\gamma}\cdot\nabla - m\Big)\psi = 0$$

Definiendo un cuadrivector $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}\,)$, la ecuación queda como:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

donde ψ es un vector de cuatro componentes.

Matrices de Dirac

1. Al cuadrivector γ^μ se le conoce como *Matrices de Dirac*
2. Dicho cuadrivector **no transforma** bajo Lorentz como lo hace x^μ
3. Satisface: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ y $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$
4. A veces es útil definir $\gamma^5 = \gamma_5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, donde:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

5. Mediante cálculo directo, $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

Relación energía–momentum

A la ecuación de Dirac en notación covariante, apliquemos el operador $(i\,\gamma^\nu\partial_\nu + m)$ por izquierda:

$$\begin{aligned}(i\,\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \\ (-\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu - m^2)\psi &= \end{aligned}$$

Notar que:

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\nu\partial_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu = \partial_\mu\partial^\mu$$

Por tanto, los spinores de Dirac tambiém satisfacen K–G:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi = 0$$

$$\therefore\;\; E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$$

Ecuación adjunta y corriente conservada

Tomemos el hermítico conjugado de la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned} -i\,\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger &= 0 \\ -i\,\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger &= \qquad\qquad \Big/ \cdot \gamma^0 \\ -i\,\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m\psi^\dagger \gamma^0 &= \end{aligned}$$

Si definimos el *spinor adjunto* $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, la ecuación queda escrita como sigue:

$$i\,\partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu + m\overline{\psi} = 0$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
i\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0 \quad \Big/ \overline{\psi}\,\cdot \\
i\,\partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu + m\overline{\psi} &= 0 \quad \Big/ \cdot\,\psi
\end{aligned}
$$

y sumando,

$$
\begin{aligned}
i\,\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\,\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi &= 0 \\
\partial_\mu \left[\overline{\psi}\gamma^\mu \psi \right] &= \\
\partial_\mu \jmath^\mu &=
\end{aligned}
$$

y hemos encontrado una cantidad conservada. La corriente es:

$$
\jmath^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu \psi
$$

Notemos que:

$$\jmath^0 = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0$$

y la probabilidad vuelve a ser positiva definida.

La densidad lagrangiana para el campo spinorial es:

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

La ecuación de Euler–Lagrange para $\overline{\psi}$ nos entrega la ecuación de Dirac; para ψ, la ecuación adjunta.

Spinores de una partícula libre

Como el spinor de Dirac satisface la ecuación de K–G, entonces admite soluciones de onda plana:

$$\psi(x) = u(p)\, e^{-i\, p_\mu x^\mu}$$

donde $u(p)$ es un spinor de cuatro componentes independientes de x^μ. Este spinor satisface:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0$$

(I) Sistema de referencia con la partícula en reposo: En este caso, $p_\mu = (E, \vec{0}\,)$.

La ecuación de autovalores queda:

$$(E\gamma^0 - m)u(E) = 0$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

donde hemos representado al spinor u (de cuatro componentes) mediante dos *spinores de Weyl*, u_A y u_B.

Los autovalores y autovectores son triviales. y los escribimos en función de dos spinores de Weyl:

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } E = m$$

$$u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \text{con } E = -m$$

(II) Sistema de referencia con la partícula en movimiento: En este caso, $\vec{p} \neq \vec{0}$. Así:

$$\begin{aligned} (E\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - m)u(p) &= 0 \qquad \Big/ \gamma^0 \cdot \\ (E - \gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p} - m\gamma^0)u(p) &= \\ (E - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} - m\beta)u(p) &= \\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta)u(p) &= Eu(p) \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

lo que se reduce a:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_B = (E-m)u_A \qquad \wedge \qquad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_A = (E+m)u_B$$

$$\therefore\ (E-m)u_A = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m}u_A$$

Calculando, $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$ y así:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \quad \rightarrow \quad E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Volviendo al problema,

$$u_A{}^{(1)} = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_A{}^{(2)} = \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, el segundo spinor de Weyl satisface:

$$u_B{}^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \ , \quad s = 1, 2$$

la cual solo funciona para las soluciones con $E > 0$, ya que de otro modo u_B diverge en el sistema de referencia donde la partícula está en reposo.

El spinor de Dirac con $E > 0$ queda:

$$u^{(s)}(p) = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \ , \quad s = 1, 2$$

donde N es una constante de normalización. Encontramos las otras soluciones L.I. si tomamos:

$$u_b{}^{(1)} = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_b{}^{(2)} = \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$u_A{}^{(s)} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} u_B{}^{(s)} = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{-E+m} u_B{}^{(s)}$$

Por el mismo argumento anterior, para $E < 0$, el spinor queda:

$$u^{(s+2)}(p) = N \begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{-E + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} , \quad s = 1, 2$$

Estas soluciones de energía negativa se asocian a antipartículas de energía positiva: se definen los spinores v para antipartículas en función de $-p$:

$$u^{(3,4)}(-p)\, e^{-i(-p_\mu)x^\mu} = v^{(2,1)}(p)\, e^{i\, p_\mu x^\mu}$$

Introduciendo la normalización $u^\dagger u = 2E \;\rightarrow\; N = \sqrt{E+m}$, los cuatro spinores son:

$$u^{(1,2)} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

$$v^{(1,2)} = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(2,1)} \\ \\ \chi^{(2,1)} \end{pmatrix}$$

Invariancia de Lorentz

Asociemos a cada punto del espacio–tiempo x^μ la matriz hermítica:

$$X(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

El determinande de esta matriz es:

$$\det(X) = x_\mu x^\mu$$

Consideremos un elemento $M \in SL(2, \mathbb{C})$ y la matriz X' dada por:

$$X' = (M^{-1})^\dagger X M^{-1} \;\leftrightarrow\; X = M^\dagger X' M$$

Notar que X' también es hermítica, y puede escribirse como:

$$X' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}$$

Además,

$$\det(X) = \det(M^\dagger X' M) = \det(M^\dagger)\det(X')\det(M) = \det(X')$$

pues $\det(M) = 1$. Así,

$$ds'^2 = ds^2$$

Entonces, los eventos x y x' están relacionados por una tranformación de Lorentz representada por M.

Ahora nos preguntamos, ¿cómo transforman las matrices de Pauli?

Definamos la siguiente notación:

$$\sigma^{\mu} = (\sigma^{0}, \vec{\sigma}\,) \qquad \wedge \qquad \widetilde{\sigma}^{\mu} = (\sigma^{0}, -\vec{\sigma}\,)$$

Es fácil ver que:

$$X(x) = x_{\mu}\widetilde{\sigma}^{\mu}$$

Del mismo modo,

$$X'(x') = x'_{\mu}\widetilde{\sigma}^{\mu}$$

La relación $M^{\dagger}X'M = X$ significa que:

$$x'_{\mu}M^{\dagger}\widetilde{\sigma}^{\mu}M = x_{\mu}\widetilde{\sigma}^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x'_{\mu}\widetilde{\sigma}^{\nu}$$

y como los x'_{μ} son arbitrarios, descubrimos la forma en que transforman las matrices de Pauli:

$$M^{\dagger}\widetilde{\sigma}^{\mu}M = L^{\mu}{}_{\nu}\widetilde{\sigma}^{\nu}$$

De una manera similar, se puede definir la matriz

$$X_1(x) = x_\nu \sigma^\nu$$

y verificar que también cumple con:

$$\det(X_1) = x_\nu x^\nu$$

Entonces, mediante un razonamiento análogo, podemos mostrar que existe una matriz $N \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que:

$$N^\dagger \sigma^\mu N = L^\mu{}_\nu \sigma^\nu$$

Es posible probar que ambas matrices están relacionadas mediante:

$$N^{-1} = M^\dagger$$

Para estudiar cómo transforman los spinores bajo el grupo de Lorentz, conviene introducir una nueva representación para las matrices de Dirac:

Representación Chiral:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ello,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

En la representación chiral, escribimos el spinor de Dirac de la siguiente forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

Consideremos la ecuación de Dirac:

$$(i\,\partial_t + i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla - m\beta)\psi = 0$$

Realizando las multiplicaciones matriciales, se llega a las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} i\,\sigma^0\partial_t\psi_L - i\,\sigma^k\partial_k\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\,\sigma^0\partial_t\psi_R + i\,\sigma^k\partial_k\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned}$$

Empleando la notación definida con anterioridad,

$$\begin{aligned} i\,\widetilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\,\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned}$$

El lagrangiano correspondiente es:

$$\mathscr{L} = i\,{\psi_L}^{\dagger}\widetilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L + i\,{\psi_R}^{\dagger}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R - m({\psi_L}^{\dagger}\psi_R + {\psi_R}^{\dagger}\psi_L)$$

Ahora, demostraremos que el lagrangiano tiene la misma forma en cualquier sistema de referencia: *Sean x y x' el mismo evento en el espacio–tiempo, medidos en sistemas de referencia S y S' respectivamente:*

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\ , \quad \partial'{}_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\ , \quad \partial_{\mu} = L^{\nu}{}_{\mu}\partial'{}_{\nu}$$

El lagrangiano expresado en el sistema S' es:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= i\,\psi_L{}^{\dagger}\widetilde{\sigma}^{\mu}L^{\nu}{}_{\mu}\partial'{}_{\nu}\psi_L + i\,\psi_R{}^{\dagger}\sigma^{\mu}L^{\nu}{}_{\mu}\partial'{}_{\nu}\psi_R - m(\psi_L{}^{\dagger}\psi_R + \psi_R{}^{\dagger}\psi_L) \\
&= i\,\psi_L{}^{\dagger}M^{\dagger}\widetilde{\sigma}^{\nu}M\partial'{}_{\nu}\psi_L + i\,\psi_R{}^{\dagger}N^{\dagger}\sigma^{\nu}N\partial'{}_{\nu}\psi_R \\
&\quad - m(\psi_L{}^{\dagger}\psi_R + \psi_R{}^{\dagger}\psi_L)
\end{aligned}
$$

Ahora, hacemos las siguientes definiciones:

- $\psi_L(x)$ es un *left-handed spinor* si transforma como

$$\psi_L{}'(x') = M\psi_L(x)$$

- $\psi_R(x)$ es un *right-handed spinor* si transforma como

$$\psi_R{}'(x') = N\psi_R(x)$$

Recordando que $M^\dagger N = \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned} {\psi_L}'^\dagger {\psi_R}' &= {\psi_L}^\dagger M^\dagger N \psi_R = {\psi_L}^\dagger \psi_R \\ {\psi_R}'^\dagger {\psi_L}' &= {\psi_R}^\dagger N^\dagger M \psi_L = {\psi_R}^\dagger \psi_L \end{aligned}$$

y por tanto, ambas cantidades son invariantes de Lorentz (escalares). Entonces, el lagrangiano en el sistema S' queda:

$$\mathscr{L} = i\,{\psi_L}'^\dagger \widetilde{\sigma}^\mu {\partial'}_\mu {\psi_L}' + i\,{\psi_R}'^\dagger \sigma^\mu {\partial'}_\mu {\psi_R}' - m({\psi_L}'^\dagger {\psi_R}' + {\psi_R}^\dagger {\psi_L}')$$

con lo que queda demostrado que el lagrangiano se escribe del mismo modo en cualquier sistema inercial.

Simetrías discretas

Una manera alternativa de probar invariancia bajo Lorentz es la siguiente: considerar que la transformación del spinor está mediada por una matriz, i.e.

$$\psi(x) \ \rightarrow \ \psi'(x') = S(L)\psi(x)$$

Así,

$$\begin{aligned}
(i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) &= 0 \\
(i\,\gamma^{\mu}L^{\nu}{}_{\mu}\partial'{}_{\nu} - m)S^{-1}\psi'(x') &= \qquad\qquad \Big/ S\,\cdot \\
(i\,{\color{red}S\gamma^{\mu}S^{-1}L^{\nu}{}_{\mu}}\partial'{}_{\nu} - m)\psi'(x') &= \\
(i\,{\color{red}\gamma^{\nu}}\partial'{}_{\nu} - m)\psi'(x') &=
\end{aligned}$$

La relación impuesta es:

$$S\gamma^{\mu}S^{-1}L^{\nu}{}_{\mu} \equiv \gamma^{\nu}$$

Paridad. La paridad espacial es la simetría discreta más simple. Proponemos la siguiente transformación:

$$\psi(t, -\vec{x}) = \mathbf{P}\psi(t, \vec{x})$$

De una forma similar, para que los nuevos campos también satisfagan la ecuación de Dirac, se debe cumplir que:

$$\mathbf{P}\gamma^{\mu}\mathbf{P}^{-1}L^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}$$

¿Cómo se relaciona la paridad con la definición de los spinores ψ_L y ψ_R? Para responder esta pregunta, notamos que:

$$\vec{x}\,' = -\vec{x} \;\rightarrow\; \nabla' = -\nabla$$

Por tanto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\widetilde{\sigma}^\mu \partial'_\mu = \sigma^\mu \partial_\mu \qquad \wedge \qquad \sigma^\mu \partial'_\mu = \widetilde{\sigma}^\mu \partial_\mu$$

Si se utiliza lo anterior en el lagrangiano, se concluirá que será invariante cuando:

$$\psi_L{}^p(\vec{x}\,') = \psi_R(\vec{x}) \qquad \wedge \qquad \psi_R{}^p(\vec{x}\,') = \psi_L(\vec{x})$$

Inversión temporal. En este caso, la relación viene dada por:

$$\psi(-t, \vec{x}) = \mathbf{T}\psi(t, \vec{x})$$

La naturaleza de $\mathbf{T}$ implica que las soluciones de la ecuación de Dirac deberían ser mapeadas a soluciones de la ecuación compleja conjugada. De un modo análogo al anterior, se puede ver que:

$$L^\nu{}_\mu \mathbf{T} \gamma^{\mu *} \mathbf{T}^{-1} = -\gamma^\nu$$

Conjugación de carga. El campo de Dirac posee carga, por lo cual tiene sentido definir la conjugación de la misma. El mapeo viene dado por:

$$\psi'(x) = \mathbf{C}\psi^*(x)$$

tal que ψ' resuelve la misma ecuación que ψ. Sustituyendo,

$$0 = (i\,\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = (i\,\gamma^\mu \partial_\mu - m)\mathbf{C}\psi^* = \Big((-i\,\gamma^{\mu *} \partial_\mu - m)\mathbf{C}^*\psi\Big)^*$$

La expresión anterior se anula si:

$$-\gamma^\mu = \mathbf{C}\gamma^{\mu *}\mathbf{C}^*$$

Covariantes Bilineales

De modo de escribir diferentes densidades langrangianas, será útil estudiar las propiedades de transformación bajo Lorentz de las siguientes combinaciones bilineales de spinores:

(1) $\overline{\psi}\psi$

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\psi &= \psi^\dagger\gamma^0\psi = \begin{pmatrix} {\psi_L}^\dagger & {\psi_R}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= {\psi_L}^\dagger\psi_R + {\psi_R}^\dagger\psi_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi'}\psi' &= {\psi_L}'^\dagger {\psi_R}' + {\psi_R}'^\dagger {\psi_L}' = {\psi_L}^\dagger M^\dagger N \psi_R + {\psi_R}^\dagger N^\dagger M \psi_L \\ &= {\psi_L}^\dagger \psi_R + {\psi_R}^\dagger \psi_L \\ &= \overline{\psi}\psi\end{aligned}$$

Ante paridad,

$$\overline{\psi^p}\psi^p = {\psi_L}^{p\dagger}{\psi_R}^p + {\psi_R}^{p\dagger}{\psi_L}^p = {\psi_R}^\dagger \psi_L + {\psi_L}^\dagger \psi_R = \overline{\psi}\psi$$

Por tanto, $\overline{\psi}\psi$ es un **escalar** bajo Lorentz y bajo paridad.

(2) $\overline{\psi}\gamma_5\psi$

$$\overline{\psi}\gamma^5\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = {\psi_L}^\dagger\psi_R - {\psi_R}^\dagger\psi_L$$

Mediante un cálculo directo se puede probar que este bilineal transforma como escalar ante transformaciones de Lorentz propias, y que cambia de signo ante paridad: se dice que es un **pseudo-escalar**.

(3) $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

$$\begin{aligned}\overline{\psi'}\gamma^\mu\psi' &= {\psi_L}'^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu{\psi_L}' + {\psi_R}'^\dagger\sigma^\mu{\psi_R}' \\ &= {\psi_L}^\dagger M^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu M\psi_L + {\psi_R}^\dagger N^\dagger\sigma^\mu N\psi_R \\ &= {\psi_L}^\dagger L^\mu{}_\nu\widetilde{\sigma}^\nu\psi_L + {\psi_R}^\dagger L^\mu{}_\nu\sigma^\nu\psi_R \\ &= L^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\psi\end{aligned}$$

y transforma como un cuadrivector bajo Lorentz. Ante paridad,

$$\overline{\psi^p}\gamma^\mu\psi^p = {\psi_R}^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu\psi_R + {\psi_L}^\dagger\sigma^\mu\psi_L$$

Lo anterior significa que las componentes espaciales cambian de signo bajo paridad. Por tanto, a este bilineal se le dice **cuadrivector**.

(4) $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi'}\gamma^5\gamma^\mu\psi' &= {\psi_L}'^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu{\psi_L}' - {\psi_R}'^\dagger\sigma^\mu{\psi_R}' \\
&= {\psi_L}^\dagger M^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu M\psi_L - {\psi_R}^\dagger N^\dagger\sigma^\mu N\psi_R \\
&= {\psi_L}^\dagger L^\mu{}_\nu\widetilde{\sigma}^\nu\psi_L - {\psi_R}^\dagger L^\mu{}_\nu\sigma^\nu\psi_R \\
&= L^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi
\end{aligned}$$

y transforma como un cuadrivector bajo Lorentz. Ante paridad,

$$\overline{\psi^p}\gamma^5\gamma^\mu\psi^p = {\psi_R}^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu\psi_R - {\psi_L}^\dagger\sigma^\mu\psi_L$$

lo que significa que las componentes espaciales no cambian de signo: hablamos de un **cuadrivector axial**.

Definición.

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

(5) $\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{2}\Big({\psi_L}^\dagger(\widetilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \widetilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\psi_R + {\psi_R}^\dagger(\sigma^\mu\widetilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\widetilde{\sigma}^\mu)\psi_L\Big) \\
\overline{\psi'}\sigma^{\mu\nu}\psi' &= \frac{i}{2}\Big({\psi_L}^\dagger M^\dagger(\widetilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \widetilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)N\psi_R \\
&\quad + {\psi_R}^\dagger N^\dagger(\sigma^\mu\widetilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\widetilde{\sigma}^\mu)M\psi_L\Big)
\end{aligned}$$

Recordando que $M^\dagger N = NM^\dagger = MN^\dagger = N^\dagger M = \mathbb{1}$,

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi'}\sigma^{\mu\nu}\psi' &= \frac{i}{2}\Big({\psi_L}^\dagger(M^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu M)(N^\dagger\sigma^\nu N)\psi_R \\
&\quad - {\psi_L}^\dagger(M^\dagger\widetilde{\sigma}^\nu M)(N^\dagger\sigma^\mu N)\psi_R \\
&\quad + {\psi_R}^\dagger(N^\dagger\sigma^\mu N)(M^\dagger\widetilde{\sigma}^\nu M)\psi_L \\
&\quad - {\psi_R}^\dagger(N^\dagger\sigma^\nu N)(M^\dagger\widetilde{\sigma}^\mu M)\psi_L\Big) \\
&= \frac{i}{2}\Big({\psi_L}^\dagger(L^\mu{}_\alpha\widetilde{\sigma}^\alpha L^\nu{}_\beta\sigma^\beta - L^\nu{}_\beta\widetilde{\sigma}^\beta L^\mu{}_\alpha\sigma^\alpha)\psi_R \\
&\quad + {\psi_R}^\dagger(L^\mu{}_\alpha\sigma^\alpha L^\nu{}_\beta\widetilde{\sigma}^\beta - L^\nu{}_\beta\sigma^\beta L^\mu{}_\alpha\widetilde{\sigma}^\alpha)\psi_L\Big) \\
&= L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta\,\frac{i}{2}\Big({\psi_L}^\dagger(\widetilde{\sigma}^\alpha\sigma^\beta - \widetilde{\sigma}^\beta\sigma^\alpha)\psi_R \\
&\quad + {\psi_R}^\dagger(\sigma^\alpha\widetilde{\sigma}^\beta - \sigma^\beta\widetilde{\sigma}^\alpha)\psi_L\Big) \\
&= L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta\,\overline{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi
\end{aligned}
$$

y transforma como un **tensor de dos índices**.