

En este caso, el funcional generador es:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}Q \det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right) \exp \left(i S[Q] - \frac{i}{2\alpha} G \cdot G + i J \cdot G \right)$$

donde Q es ahora un campo de gauge Q_μ^a , S es la acción del campo de gauge

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu}^a)^2$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig [A_\mu(x), A_\nu(x)]$, $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda - i[A_\mu, \lambda]$, $U = 1 + i\lambda$, T^a es una base del espacio vectorial (Algebra de Lie) donde viven los λ . $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu Q_\nu^a - \partial_\nu Q_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b Q_\nu^c$$

Adicionalmente,

$$J \cdot Q \equiv \int d^4 x J_\mu^a Q^{a\mu} \quad \wedge \quad G \cdot G \equiv \int d^4 x G^a G^a$$

con G^a es el término de fijación de gauge. Finalmente, $\delta G^a / \delta \omega^b$ es la derivada de G^a con respecto a la transformación de gauge

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b Q_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a$$

El funcional generador para el *background field* es:

$$\tilde{Z}[J, A] = \int \mathcal{D} Q \det \left(\frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} \right) \exp \left(i S [Q + A] - \frac{i}{2\alpha} \tilde{G} \cdot \tilde{G} + i J \cdot G \right)$$

Donde, ahora, $\delta \tilde{G}^a / \delta \omega^b$ es la derivada del término de fijación de gauge bajo la transformación infinitesimal

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b (Q_\mu^c + A_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a$$

En analogía a lo visto anteriormente, es posible definir las mismas cantidades antes descritas. En particular,

$$\tilde{\Gamma}[0, A] = \Gamma[A]$$

con la siguiente condición: Si $\tilde{\Gamma}[0, A]$ se calcula usando un término $\tilde{G}^a = \tilde{G}^a(Q, A)$, entonces debe ser igual a la convencional $\Gamma[\bar{Q}]$ calculada con $G^a = \tilde{G}^a(Q - A, A)$ y evaluada en $\bar{Q} = A$.

Como se mencionó en la introducción del método, la ventaja del mismo es que retiene invariancia de gauge. Esto significa que existe un término de fijación de gauge \tilde{G}^a para el cual la acción efectiva $\tilde{\Gamma}[0, A]$ es un funcional invariante de gauge de A . Esta elección de gauge es:

$$\tilde{G}^a = \partial_\mu Q^{a\mu} + g f^{abc} A_\mu^b Q^{c\mu} = D_\mu Q^a$$

Ejercicio 1. $\phi' = U\phi U^{-1}$, $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ig[A_\mu, \phi]$, Verificar que A_μ transforma de la manera usual.

Es fácil ver que, en esta elección de gauge, el funcional generador es invariante bajo las transformaciones:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= -f^{abc}\omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a \\ \delta J_\mu^a &= -f^{abc}\omega^b J_\mu^c\end{aligned}$$

La primera ecuación corresponde a la transformación de gauge sobre A ; mientras que la segunda, una rotación adjunta sobre J .

Para probar esto, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a - f^{abc} \omega^b Q_\mu^c$$

que corresponde a una rotación adjunta sobre Q . Por tanto, el término $J \cdot Q$ es claramente invariante. Además,

$$\delta(Q_\mu^a + A_\mu^a) = -f^{abc} \omega^b (Q_\mu^c + A_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a$$

Esto es, justamente, la transformación del campo $Q_\mu^a + A_\mu^a$. Por tanto, la acción $S [Q + A]$ también es invariante. El término de fijación de gauge \tilde{G}^a es la derivada covariante de Q que, por definición, es invariante bajo las transformaciones descritas. De manera análoga, se puede probar que el determinante también es invariante. Así, \tilde{Z} es invariante.

Dado que \tilde{Q} es la variable conjugada de J , se sigue –de la invariancia de \tilde{Z} – que $\tilde{\Gamma}[\tilde{A}, A]$ es invariante bajo

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= -f^{abc} \omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a \\ \delta \tilde{Q}_\mu^a &= -f^{abc} \omega^b \tilde{Q}_\mu^c\end{aligned}$$

Como la última ecuación es una transformación homogénea, $\tilde{\Gamma}[0, A]$ es invariante bajo la primera transformación. Dado que es solo una transformación de gauge ordinaria de A , vemos que $\tilde{\Gamma}[0, A]$ es un funcional invariante de A . Como resultado, las funciones de Green 1PI – generadas al derivar $\tilde{\Gamma}[0, A]$ con respecto a A – obedecen las identidades de Ward *ingenuas*.

Reglas de Feynman

- Los vértices que involucran campos Q se usan dentro de los diagramas, mientras que los vértices que involucran campos A se emplean en líneas externas
- Todos los propagadores que aparecen son propagadores de campos Q
- Las reglas completas están en la figura 9 del paper de Abbott

$$\begin{aligned}(A_\mu)_0 &= Z_A^{1/2} A_\mu \\ g_0 &= Z_g g \\ \alpha_0 &= Z_\alpha \alpha\end{aligned}$$

Los campos Q y los fantasmas no necesitan ser renormalizados, ya que solo aparecen dentro de loops. Los infinitos que aparecen en $\tilde{\Gamma}[0, A]$ deben tener la forma invariante de gauge de una constante divergente multiplicada por $(F_{\mu\nu}^a)^2$. $F_{\mu\nu}^a$ se renormaliza como:

$$(F_{\mu\nu}^a)_0 = Z_A^{1/2} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + Z_g Z_A^{1/2} g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right)$$

Esto solo tomará la forma covariante de una constante multiplicando a $F_{\mu\nu}^a$ si $Z_g = Z_A^{-\frac{1}{2}}$

La forma más simple de renormalizar una teoría de Yang-Mills es utilizar regularización dimensional y *minimal subtraction*. En este esquema, se realizan todas las integrales de los loops en $4 - 2\epsilon$ dimensiones, y escribimos las constantes de renormalización como sumas sobre los polos en ϵ :

$$Z_A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_A^{(n)}}{\epsilon^n}$$

En regularización dimensional, la constante de acoplamiento *bare* sí tiene dimensiones. Esto se debe a que la acción de $4 - 2\epsilon$ dimensiones involucra términos de la forma

$$\int d^{4-2\epsilon} x (\partial_\mu A_\nu)^2, \quad \int d^{4-2\epsilon} g_0^2 (A_\mu A_\nu)^4$$

Si la acción es adimensional, A debe tener dimensiones de $m a s a^{1-\epsilon}$. De la segunda ecuación, g_0 tiene dimensiones de $m a s a^\epsilon$. Por tanto, debemos introducir un parámetro de masa arbitrario μ y redefinir:

$$g_0 = Z_g \mu^\epsilon g$$

Derivando, y dado que μ es arbitrario,

$$\mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = 0 = Z_g \mu^\epsilon \left(\epsilon g + g \mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \right)$$

Por definición, $\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$, y por tanto:

$$\beta = -\epsilon g - g \mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}$$

Finalmente, usando la regla de la cadena,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} = \beta \frac{\partial}{\partial g}$$

obtenemos que:

$$\beta = -\epsilon g - g \beta \frac{\partial \ln Z_g}{\partial g} = -\epsilon g + \frac{g \beta}{2} \frac{\partial \ln Z_A}{\partial g}$$

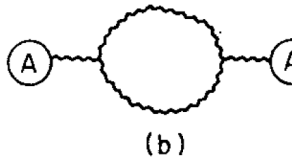
Ahora, Z_A es una suma de potencias de $1/\epsilon$. Si la función β es finita –como debe ser– dichas potencias deben cancelarse en la ecuación anterior. A partir de esta afirmación, es posible derivar algunas relaciones sobre los coeficientes $Z_A^{(n)}$. El único término finito en β puede provenir de la multiplicación entre $-\epsilon g$ y $1/\epsilon$ en Z_A . Así, tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$,

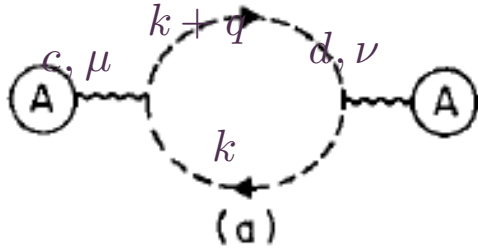
$$\beta = -\frac{g^2}{2} \frac{\partial Z_A^{(1)}}{\partial g}$$

Con ello, la función β se puede determinar a partir del coeficiente de $1/\epsilon$ en el factor de renormalización del *background field*.

Z_A puede obtenerse solo calculando las correcciones –loop por loop– al propagador del campo de gauge. No se necesitan correcciones sobre el vértice.

Por ejemplo, la función β para una teoría de Y-M a un loop se puede determinar a partir de los siguientes dos gráficos:





$$I_a = -g^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f_{acb} f_{adb} \frac{(2k+q)_\mu (2k+q)_\nu}{(k^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 + i\varepsilon)} =$$

$$-g^2 f_{acb} f_{adb} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+q)_\mu (2k+q)_\nu}{D^2}$$

$$D = x(k^2) + (1-x)(k^2 + 2k \cdot q + q^2) = k^2 + 2k \cdot q(1-x) + (1-x)q^2 =$$

$$(k + q(1-x))^2 + q^2 x(1-x)$$

$$k \rightarrow k - q(1-x)$$

$$I_a = -g^2 f_{acb} f_{adb} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k + q(2x-1))_\mu (2k + q(2x-1))_\nu}{D^2} =$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k + q(2x-1))_\mu (2k + q(2x-1))_\nu}{D^2} =$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{4k^2 g_{\mu\nu} d^{-1} + q_\mu q_\nu (2x-1)^2}{D^2} =$$

$$\frac{-i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} 4g_{\mu\nu} d^{-1} \frac{d}{2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{[-q^2 x(1-x)]^{1-\frac{d}{2}}} + q_\mu q_\nu (2x-1)^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{[-q^2 x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}$$

$$\varepsilon = 2 - \frac{d}{2}$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{1 - \frac{d}{2}} \sim -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$PPI_a = -\frac{g^2}{\varepsilon} f_{acb} f_{adb} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \{ q_\mu q_\nu (2x-1)^2 - 2q^2 x(1-x) g_{\mu\nu} \} =$$

$$-\frac{g^2}{\varepsilon} f_{acb} f_{adb} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[q_\mu q_\nu \left(\frac{4}{3} - 2 + 1 \right) - 2q^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) g_{\mu\nu} \right] =$$

$$-\frac{g^2}{3\varepsilon} f_{acb} f_{adb} \frac{i}{(4\pi)^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}]$$

El primer gráfico da, para el polo $1/\epsilon$ (recordando el factor -1 en el loop de un fantasma)

$$\frac{i g^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2} \frac{1}{3\epsilon} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)$$

Por otra parte, la segunda figura da

$$\frac{i g^2 C_A \delta^{ab}}{(4\pi)^2} \frac{10}{3\epsilon} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu)$$

donde C_A está definida mediante

$$f^{abc} f^{bcd} = C_A \delta^{ad}$$

y es N para $SU(N)$.

Considerando ambas contribuciones, descubrimos que las divergencias se cancelan si definimos:

$$Z_A = 1 + \frac{11 C_A}{3 \epsilon} \frac{g^2}{(4 \pi)^2}$$

Sustituyendo,

$$\beta = -\frac{11 C_A}{3} \frac{g^3}{(4 \pi)^2}$$

Como es negativa, la teoría es **asintóticamente libre**.

1 Quantum electrodynamics

The one-loop beta-function in quantum electrodynamics (QED) is

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

or

$$\beta(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{3\pi},$$

written in terms of the fine structure constant, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

This beta-function tells us that the coupling increases with increasing energy scale, and QED becomes strongly coupled at high energy. In fact, the coupling apparently becomes infinite at some finite energy, resulting in a Landau pole. However, one cannot expect the perturbative beta-function to give accurate results at strong coupling, and so it is likely that the Landau pole is an artifact of applying perturbation theory in a situation where it is no longer valid.

2 Quantum chromodynamics

The one-loop beta-function in quantum chromodynamics with n_f flavours is

$$\beta(g) = -\left(11 - \frac{2n_f}{3}\right) \frac{g^3}{16\pi^2}$$

or

$$\beta(\alpha_s) = -\left(11 - \frac{2n_f}{3}\right) \frac{\alpha_s^2}{2\pi}$$

,

written in terms of $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$.

If $n_f \leq 16$, this beta-function tells us that the coupling decreases with increasing energy scale, a phenomenon known as asymptotic freedom. Conversely, the coupling increases with decreasing energy scale. This means that the coupling becomes large at low energies, and one can no longer rely on perturbation theory.