

- La matriz amplitud de transición de un estado  $|\psi_i, t_i\rangle$  a un estado  $|\psi_f, t_f\rangle$  es

$$\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \psi_f(q_f)^* \psi_i(q_i) e^{i \int dt L}, \quad \psi_{i(f)}(q_{i(f)}) \text{ son las funciones de onda de estado inicial(final)}$$
- Separamos  $L = L_0 + L_1(q), L_0 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2$
- Interesa calcular las funciones de Green,  $G(t_1, t_2, \dots) = \langle 0 | T(q(t_1)q(t_2)\dots) | 0 \rangle$ ,  $|0\rangle$  es el vacío.
- $Z(j) = \int \mathcal{D}q \psi_f(q_f)^* \psi_i(q_i) e^{i \int dt (L + j(t)q(t))}$  Función generatriz de las funciones de Green
- $G(t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{1}{i^N} \frac{\delta^N}{\delta j(t_1) \dots \delta j(t_N)} Z \Big|_{j=0}$
- $Z_0(j) = \int \mathcal{D}q \psi_f(q_f)^* \psi_i(q_i) e^{i \int dt (L_0 + j(t)q(t))}$  Función generatriz de campo libre.
- $Z(j) = e^{i \int dt L_1\left(\frac{\delta}{i \delta j(t)}\right)} Z_0(j)$

- $Z_0(j) = \int \mathcal{D}q \psi_f(q_f)^* \psi_i(q_i) e^{i \int dt (L_0 + j(t)q(t))}$
- $q(t) = x_0(t) + x(t)$
- $\int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + jq \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + 2\dot{x}_0\dot{x} + \dot{x}^2 - \omega^2 x_0^2 - 2\omega^2 x x_0 - \omega^2 x^2) + jx_0 + jx \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 - \omega^2 x_0^2) + jx_0 \right] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(2\dot{x}_0\dot{x} - 2\omega^2 x x_0) + jx \right]$
- $\int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{x}_0\dot{x} - \omega^2 x x_0 + jx) = \int_{t_i}^{t_f} dt (-\ddot{x}_0 - \omega^2 x_0 + j)x + (\dot{x}_0(t_f)x(t_f) - \dot{x}_0(t_i)x(t_i))$
- $-\ddot{x}_0 - \omega^2 x_0 + j = 0(1)$  desacopla  $x_0, x$  excepto por el término de borde.
- Vacío del oscilador armónico:  $\psi(q) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\omega}{2}q^2}$
- $\psi_f(q_f)^* \psi_i(q_i) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}(x_0^2(t_f) + 2x(t_f)x_0(t_f) + x^2(t_f) + x_0^2(t_i) + 2x(t_i)x_0(t_i) + x^2(t_i))}$
- $-\omega x_0(t_f) + i\dot{x}_0(t_f) = 0(2), -\omega x_0(t_i) - i\dot{x}_0(t_i) = 0(3)$  desacopla  $x, x_0$  en el borde.
- $i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 - \omega^2 x_0^2) + jx_0 \right] = i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2}(-\ddot{x}_0 - \omega^2 x_0)x_0 + jx_0 \right] + \frac{i}{2} \dot{x}_0 x_0 \Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt jx_0 + \frac{\omega}{2} x_0^2(t_f) + \frac{\omega}{2} x_0^2(t_i)$  Los últimos dos factores cancelan la contribución  $x_0$  de las funciones de onda.
- $Z_0(j) = e^{\frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt jx_0} Z_0(0)$

- $-\ddot{x}_0 - \omega^2 x_0 + j = 0, x_0(t) = -i \int dt' \Delta(t, t') j(t'), \partial_t^2 \Delta(t, t') + \omega^2 \Delta(t, t') = i\delta(t - t')$
- $t, t' \in (-\infty, \infty), \Delta(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \Delta(k) e^{ik(t-t')}, \Delta = \frac{i}{-k^2 + \omega^2}$
- Posición de los polos y condiciones de borde  $-\omega \Delta(t_f, t') + i \dot{\Delta}(t_f, t') = 0, -\omega \Delta(t_i) - i \dot{\Delta}(t_i) = 0$  Polos en  $k = \pm\omega$ . Para  $t_f$  debe contribuir el polo  $k = -\omega$ . Para  $t_i$  debe contribuir el polo  $k = \omega$ .
- $|\int_S dk \Delta(k) e^{ik(t-t')}| \leq \int_S |dk| |\Delta(k)| |e^{ik(t-t')}|, k = Re^{i\theta}, |e^{ik(t-t')}| = e^{-R(t-t') \sin \theta}$ . Se anula para  $t \rightarrow \infty$ , si  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Se anula para  $t \rightarrow -\infty$ , si  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
- $\Delta_F(t - t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2 - \omega^2 + i\epsilon} e^{ik(t-t')} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2 - \omega^2 + i\epsilon} e^{-ik(t-t')}$
- Notar que  $\Delta_F(t - t') = \langle 0 | T(\hat{q}(t) \hat{q}(t')) | 0 \rangle$ , para el oscilador armónico.
- La integral funcional no converge absolutamente. Agregar en la acción  $\frac{1}{2} i\epsilon q^2$ . Así converge absolutamente.

Ejercicio: Encontrar la solución del sistema (1 - 3) para  $t_i, t_f$  arbitrarios.

- $Z_0(j) = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int dx (\mathcal{L}_0 + j\phi)}$ ,  $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$
- $S(\phi) = S(\phi_0) + \int dx \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0(x)) + \dots$
- $\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}|_{\phi_0} = 0 = (-\square - m^2)\phi_0 + j$
- $\phi_0(x) = -i\int dx' \Delta_F(x-x')j(x')$ ,  $(\square_x + m^2)\Delta(x-x') = i\delta(x-x')$
- $\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2}$
- Factor de convergencia absoluta en la acción:  $\frac{1}{2}i\varepsilon \int dx \phi^2(x)$ .  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$
- $\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$
- $Z_0(j) = e^{iS(\phi_0)} Z_0(0)$ ,  $S(\phi_0) = \int dx \left[ \frac{1}{2}(\phi_0(-\square - m^2)\phi_0) + j\phi_0 \right] = \frac{1}{2} \int dx j(x)\phi_0(x)$
- $Z_0(j) = e^{\frac{1}{2} \int dx dx' j(x)\Delta_F(x-x')j(x')} Z_0(0)$

- $\mathcal{L}_i = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ ,  $\lambda$  es una constante de acoplamiento. Buscamos una expansión en serie de  $Z[j]$  alrededor de  $\lambda = 0$ .
- $Z[j] = e^{i\int dx \mathcal{L}_i\left(\frac{\delta}{i\delta j(x)}\right)} Z_0[j] = e^{i\int dx \mathcal{L}_i\left(\frac{\delta}{i\delta j(x)}\right)} e^{\frac{1}{2}\int dx dx' j(x)\Delta_F(x-x')j(x')}$
- Ejercicio: Probar la identidad:  $F\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)G(x) = G\left(\frac{\partial}{i\partial y}\right)F(y)e^{ixy}\Big|_{y=0}$
- $e^{-\frac{1}{2}\int dx dx' \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-x')\frac{\delta}{\delta\phi(x')}} e^{i\int dx (\mathcal{L}_i(\phi) + j(x)\phi(x))}\Big|_{\phi(x)=0} (1)$
- $e^{i\int dx (\mathcal{L}_i(\phi) + j(x)\phi(x))} = \sum_{n,p} \frac{i^n i^p}{n! p!} \int dx_1 \dots \int dx_n \int dy_1 \dots \int dy_p j(x_1) \dots j(x_n) \mathcal{L}_i(\phi(y_1)) \dots \mathcal{L}_i(\phi(y_p)) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$
- El término  $n, p$  contribuye al término  $\lambda^p$  de la función de Green de n-puntos. En (1) sólo sobreviven términos con igual número de  $\frac{\delta}{\delta\phi(x)}$ ,  $\phi(x)$ .
- $Z^{(n,p)}[j]$  es el término correspondiente en la expansión de  $Z[j]$

- $$Z^{(2,0)} = -\frac{1}{2} \int dx dx' \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Delta_F(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi(x')} \frac{i^2}{2} \int dx_1 \int dx_2 j(x_1) j(x_2) \phi(x_1) \phi(x_2) =$$



Figura 1.

$$\frac{1}{2} \int dx_1 \int dx_2 j(x_1) j(x_2) \Delta_F(x_1 - x_2)$$

- $$Z^{(0,1)} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \int dx dx' \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Delta_F(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi(x')} \right)^2 i \int dy_1 \left( -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(y_1) \right) =$$

$$-\frac{i\lambda}{4!} \frac{4!}{2 \cdot 2 \cdot 2} \int dy_1 \Delta_F(0)^2 = -\frac{i\lambda}{2 \cdot 2 \cdot 2} \int dy_1 \Delta_F(0)^2$$

Notar factor combinatorio:  $\frac{1}{2}$  dos líneas equivalentes,  $\frac{1}{2}$  para cada línea que conecta el mismo punto.

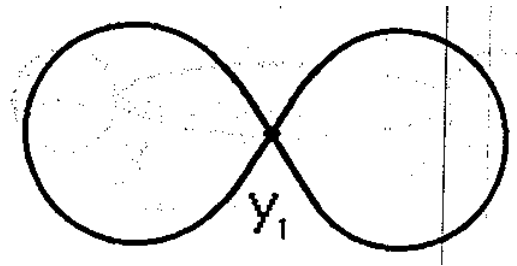


Figura 2.

- Los diagramas de Feynman consisten en vértices  $x$ ,  $y$  y líneas que conectan los vértices(Propagadores).

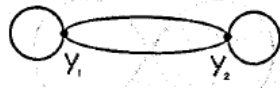
- $Z^{(0,2)} = \frac{1}{2!} \int dy_1 \int dy_2 \frac{1}{4!} \left[ -\frac{1}{2} \int dx dx' \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Delta_F(x-x') \frac{\delta}{\delta\phi(x')} \right]^4 \left[ -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(y_1) \right] \left[ -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(y_2) \right]$

- Hay dos diagramas:



**Figura 3.**

- $Z^{(0,2)}(\text{Fig3}) = \frac{(-i\lambda)^2}{2!4!} \int dy_1 \int dy_2 [\Delta_F(y_1 - y_2)]^4$



**Figura 4.**

- $Z^{(0,2)}(\text{Fig4}) = \frac{(-i\lambda)^2}{2!.2.2.2} \int dy_1 \int dy_2 [\Delta_F(y_1 - y_2)]^2 [\Delta_F(0)]^2$

- Factores combinatorios:  $\frac{1}{2!}$  intercambio vértices  $y_1, y_2$ ,  $\frac{1}{4!}$ ,  $\frac{1}{2!}$  líneas internas equivalentes conectando  $y_1, y_2$ .

1. Dibuja todos los diagramas distintos con  $n$ (par) vértices  $x$  y  $p$  vértices  $y$

Sumar todas las contribuciones de acuerdo a:

2. Por cada vértice  $y: -i\lambda$

3. Por cada vértice  $x: i j(x)$

4. Por cada línea conectando vértices  $x, y: \Delta_F(x - y)$

5. Multiplicar por el factor combinatorio:

a) Si el diagrama no cambia al intercambiar  $m$  vértices  $x$  o  $y: \frac{1}{m!}$

b)  $m$  líneas internas equivalentes:  $\frac{1}{m!}$

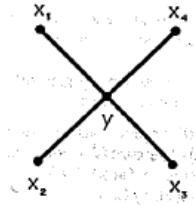
c) Cada línea cerrada:  $\frac{1}{2}$

d)  $m$  diagramas disconexos equivalentes:  $\frac{1}{m!}$

6. Integrar  $x, y$ .



- Transformada de Fourier:  $\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = \int dx_1 \dots dx_n e^{-i \sum_{j=1}^n p_j x_j} G(x_1, \dots, x_n)$
- $Z[j] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n j(x_1) \dots j(x_n) G(x_1, \dots, x_n)$



- **Figura 5.**  $-i\lambda \int dy \Delta_F(x_1 - y) \Delta_F(x_2 - y) \Delta_F(x_3 - y) \Delta_F(x_4 - y)$ . La transformada de Fourier da:  $\prod_{i=1}^4 \left[ \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right] [-i\lambda \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)]$

1. Dibuja todos los diagramas topológicamente distintos con  $n$  líneas externas. Cada línea lleva un momentum,  $p$  para líneas externas y  $k$  para líneas internas.
2. Línea externa:  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. Línea interna:  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. Vértice:  $-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_i q_i)$ ,  $q_i$  momentum que llega al vértice.
5. Multiplicar por los factores combinatorios.
6. Integrar sobre  $k$ .
7. Sumar todas las contribuciones de diagramas topológicamente distintos.

- $Z[j] = e^{W[j]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + i\int dx j(x)\varphi(x)}$ ,  $W[j]$  es la función generatriz de los diagramas conexos. Regla 5d.

- Defina:  $\phi_c(x) = \frac{\delta W[j]}{i\delta j(x)}$ ,  $\phi_c(x) = \langle \varphi(x) \rangle_j = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) e^{iS(\varphi) + i\int dx j(x)\varphi(x)} = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle_j$

- Transformada de Legendre  $\Gamma = i\int dx j(x)\phi_c(x) - W[j]$ ,  $\Gamma$  es función de  $\phi_c$  solamente.

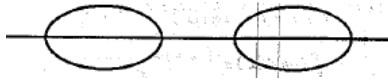
$$\delta\Gamma = \int dx (\delta j(x)\phi_c(x) + j(x)\delta\phi_c(x)) - \int dx \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}\delta j(x) = \int dx j(x)\delta\phi_c(x)$$

$\Gamma$  es la acción efectiva.

- $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_c(x)} = j(x)$
- $j(x) = 0$ , obtenemos la ecuación que determina el vacío de la teoría:  $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_c(x)} = 0$

# Diagramas una partícula irreducible

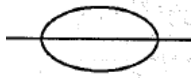
- Diremos que un diagrama conexo es una partícula reducible(impropio) si basta con cortar una línea para separarlo en dos partes desconexas.
- Si un diagrama no es una partícula reducible, se llama una partícula irreducible(OPI) o propio.
- La acción efectiva es la función generatriz de los diagramas OPI.



**Figura 6.** Diagrama impropio



**Figura 8.** Diagrama propio



**Figura 7.**

- La función propia correspondiente a un diagrama propio, se obtiene usando las reglas de Feynman sin incluir las patas externas.
- Para el diagrama de la Fig. 7 es:  $\frac{(-i\lambda)^2}{3!} \Delta_F(x_1 - x_2)^3$
- $\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  es la función propia de  $n$  puntos. La fig. 9, muestra la correspondiente a

$$\kappa^{(2)}(x_1, x_2) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \dots$$

$$= \text{diagrama 3}$$

$n = 2$ .

**Figura 9.**

- $W[j] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n j(x_1) \dots j(x_n) G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ . Está representada en Fig. 10

$$\equiv \sum_n \frac{i^n}{n!} G_c^{(n)}$$

**Figura 10.**



- $$\phi_c(x) = i \int dy \Delta_F(x - y) j(y) + \sum_{n=2} \frac{1}{(n-1)!} \int \dots \int dy_1 \dots dy_n \Delta_F(x - y_1) \kappa^{(n)}(y_1, \dots, y_n) \phi_c(y_2) \dots \phi_c(y_n)$$

- **Función generatriz de funciones propias:**

$$\kappa[\phi_c] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dy_1 \dots dy_n \kappa^{(n)}(y_1, \dots, y_n) \phi_c(y_1) \dots \phi_c(y_n)$$

- $$\phi_c(x) = i \int dy \Delta_F(x - y) j(y) + \int dy \Delta_F(x - y) \frac{\delta \kappa[\phi_c]}{\delta \phi_c(y)}$$

- $$j(y) = -i \int dx \Delta_F^{-1}(y - x) \phi_c(x) + i \frac{\delta \kappa[\phi_c]}{\delta \phi_c(y)}$$

- $$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(y)} = j(y) = -i \int dx \Delta_F^{-1}(y - x) \phi_c(x) + i \frac{\delta \kappa[\phi_c]}{\delta \phi_c(y)}$$

- $$i\Gamma = \frac{1}{2} \int dx dy \phi_c(y) \Delta_F^{-1}(y - x) \phi_c(x) - \kappa[\phi_c]$$

- $\Gamma$  se encuentra calculando los diagramas propios.

## Bibliografía:

- Diagrammar. t'Hooft and Veltman
- Sakita
- A rule for the combinatoric factors in FD,PRD32(1985)3331.gary





$$\mathcal{L}_i = \frac{\alpha}{3!} \phi^3 + \frac{\beta}{4!} \phi^4$$

**Figura 12.** Vértices



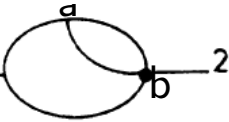
**Figura 13.** autoenergía De acuerdo a Gary, el grupo de simetrías de la figura 13 contiene la reflexión a lo largo de la línea que une 1 y 2 (intercambio de dos líneas idénticas).  $S=2$ ,  $CF=\frac{1}{2}$ .



Dibuja 2 puntos  $x_1, x_2$  y en cada uno, el vértice  $\alpha$

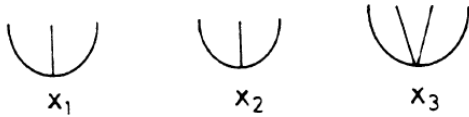
Combinatoria: La línea externa 1 puede ser pegada de 6 maneras distintas. Luego la línea 2, de 3 maneras distintas. Las otras dos líneas de 2 maneras distintas.

Luego divide por los factores combinatorios de cada vértice y por las permutaciones de los vértices idénticos:  $FC = \frac{6 \times 3 \times 2}{3! \times 3!2!} = \frac{1}{2}$

1  2 Diagrama queda igual si lo reflejo a lo largo de la línea que une a con b.  $S=2$

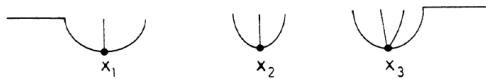
$$FC = \frac{1}{2}$$

Hay 3 puntos  $x_1, \dots, x_3$



Línea 1: 6 veces    Línea 2: 4 veces

Queda así:



Una línea interna vértice 1 puede contraerse con vértice 2 (3) o vértice 3(3). F:6. Supongamos se contrajo con vértice 2. La línea restante en el vértice 1 sólo se puede contraer con líneas en vértice 3 (por la topología) F:3

Quedan dos líneas en los vértices 2 y 3. La primera del vértice 2 se puede contraer con dos líneas del vértice 3 F:2. La restante del vértice 2 sólo se puede contraer con una del vértice 3. F:1

Esto da:  $6 \times 4 \times 6 \times 3 \times 2$

Denominator:  $3! \ 3! \ 4!2!$  (2 vértices cúbicos)

$$FC: \frac{6 \times 4 \times 6 \times 3 \times 2}{3!3!4!2!} = \frac{1}{2}$$