Ref. D. Gross Lectures on QFT C16

Esquemas de Renormalización independientes de las masas.

$$\phi_0 = \sqrt{Z_\phi}\phi, m_0 = Z_m m, \lambda_0 = Z_\lambda \lambda$$

En este curso usaremos RD y substracción minimal.

$$\Gamma^n_{\rm ren} = \frac{1}{2\pi i}\oint d\varepsilon \frac{\Gamma^n(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

En este caso tenemos, dado que λ_0 tiene dimensión ε:

$$\phi_0 = \sqrt{Z_\phi}\phi, m_0 = Z_m m, \lambda_0 \mu^{-\varepsilon} = Z_\lambda \lambda \tag{1}$$

Todos los Z no tienen dimensiones. $Z_i = Z_i(\lambda, \varepsilon)$. Además, podemos escribir, a partir de la última relación de (1), $\lambda = \lambda(\lambda_0 \mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)$,con lo cual:

$$Z(\lambda, \varepsilon) = Z(\lambda_0 \mu^{-\varepsilon}, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1} \frac{Z_n(\lambda)}{\varepsilon^n}$$

$\Gamma^n(\lambda, m, \mu) = Z_\phi^{\frac{n}{2}}(\lambda_0\mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)\Gamma_0^n(\lambda_0, m_0, \varepsilon)$

μ es un parámetro arbitrario cuyo único rol es fijar la escala de la Física

donde definimos m, λ, ϕ.

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_0^n(\lambda_0, m_0, \varepsilon)|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = 0 = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(Z_\phi^{-\frac{n}{2}}(\lambda_0\mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)\Gamma^n(\lambda, m, \mu)\Big)$$

$$-\frac{n}{2}Z_\phi^{-\frac{n}{2}-1}(\lambda_0\mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_\phi\Gamma^n(\lambda, m, \mu) + Z_\phi^{-\frac{n}{2}}(\lambda_0\mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda, m, \mu)|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = 0$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda, m, \mu)|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} - n\gamma(\lambda)\Gamma^n(\lambda, m, \mu) = 0$$

$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\phi$ es la dimensión anómala de ϕ.

$\beta(\lambda) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon}$, $\gamma_m = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\mathrm{lnZ}_m(\lambda_0\mu^{-\varepsilon}, \varepsilon)|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon}$, función β.

$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda, m, \mu)|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda, m, \mu) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma^n(\lambda, m, \mu) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}m|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon}\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^n(\lambda, m, \mu)$

$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}m|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}m_0Z_m^{-1}|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = m_0\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_m^{-1}|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = mZ_m\frac{\partial}{\partial\mu}Z_m^{-1}|_{\lambda_0, m_0, \varepsilon} = m\gamma_m$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)+\gamma_m(\lambda)m\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)-n\gamma(\lambda)\Gamma^n(\lambda,m,\mu)=0 \quad (2)$$

- β, γ_m, γ no dependen de m, μ, ε. No dependen de m porque la funciones de renormalización no dependen de m. No pueden depender de μ porque son adimensionales.Dado que (2) es finita cuando $\varepsilon\to 0$, las dimensiones anómalas no pueden depender de ε.
- $\beta(\lambda)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda|_{\lambda_0,m_0,\varepsilon}=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_0\mu^{-\varepsilon}Z_\lambda^{-1}\Big|_{\lambda_0,m_0,\varepsilon}=-\lambda\varepsilon-\lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}l\,\mathrm{n}\mathrm{Z}_\lambda|_{\lambda_0,m_0,\varepsilon}$

Significado del GR

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)+\gamma_m(\lambda)m\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^n(\lambda,m,\mu)-n\gamma(\lambda)\Gamma^n(\lambda,m,\mu)=0$$

Método de las características:

$\dot\mu=\mu$,$\dot\lambda=\beta(\lambda)$,$\dot m=\gamma_m(\lambda)m$.

$\dot\Gamma^n(\lambda,m,\mu)=n\gamma(\lambda)\Gamma^n(\lambda,m,\mu)$, $\Gamma^n(\lambda,m,\mu)=\Gamma^n(\lambda(t_0),m(t_0),\mu(t_0))\,e^{n\int_{t_0}^t dt\gamma(\lambda(t))}$

Flujo del GR:

$$\mu(t)=\mu_0 e^t$$

$t\to\pm\infty$. Supongamos $\lambda\to\lambda_0$(punto fijo), $\dot\lambda\to 0$

$$\beta(\lambda)=\beta(\lambda_0)+\beta'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+....,\qquad \beta(\lambda_0)=0$$
$$\dot\lambda=\beta'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0),\quad \lambda-\lambda_0=Ae^{t\beta'(\lambda_0)}$$

- λ_0 es un punto fijo atractivo(estable) en el UV($t\to+\infty$) si $\beta'(\lambda_0)<0$
- λ_0 es un punto fijo atractivo(estable) en el IR($t\to-\infty$) si $\beta'(\lambda_0)>0$
- Una teoría es asintóticamente libre en el UV si $\lambda_0=0$ es un punto fijo estable en el UV.
- Una teoría es asintóticamente libre en el IR si $\lambda_0=0$ es un punto fijo estable en el IR.

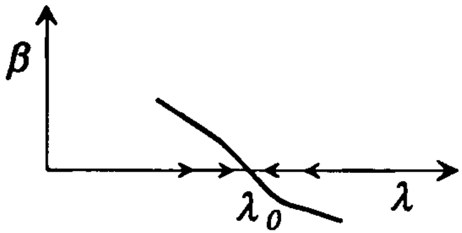

Figure 1. Punto fijo estable UV

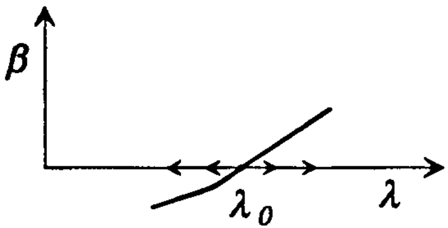

Figure 2. Punto fijo estable IR

Figure 3. Teoría Asintóticamente libre UV

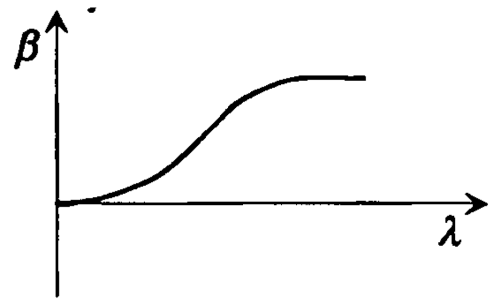

Figure 4. Teoría asintóticamente libre IR

En la zona donde la teoría es asintóticamente libre es válida la teoría de perturbaciones alrededor de $\lambda_0 = 0$.

$\Gamma^n(\lambda, m, \mu) = \Gamma^n(\lambda(t_0), m(t_0), \mu(t_0))\, e^{n\int_{t_0}^{t} dt\gamma(\lambda(t))} \sim \Gamma^n(\lambda(t_0), m(t_0), \mu(t_0))\, e^{n\gamma(\lambda_0)(t-t_0)}$

Por esto γ es la dimensión anómala del campo.

Consideremos una función de Green adimensional. Por ejemplo

$$G(\lambda, m, \mu) = \Gamma^4(p_1, ...p_4)\prod_{i=1}^{4}\sqrt{\frac{p_i^2}{\Gamma^2(p_i)}}$$

Esta satisface la ecuación del GR homogénea.$\mathcal{D}G = 0$, $\mathcal{D}G = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}G + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}G + \gamma_m(\lambda)m\frac{\partial}{\partial m}G$

Tenemos:$G(p_i(t) = e^t p_i, \lambda, m, \mu) = G(p_i, \lambda, m e^{-t}, e^{-t}\mu) = G(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t)\, e^{-t}, \mu)$

El comportamiento de la función de Green para momentos $p_i e^t$ está determinado por la constante de acoplamiento efectiva $\bar{\lambda}(t)$.

Funciones 1PI:

$$\Gamma^n(e^t p_i, \lambda, m, \mu) = e^{(4-n)t}\Gamma^n(p_i, \lambda, m\, e^{-t}, \mu e^{-t}) =$$
$$e^{(4-n)t - n\int_0^t dt' \gamma(\bar\lambda(t'))}\Gamma^n(p_i, \bar\lambda(t), \bar m\, e^{-t}, \mu)$$