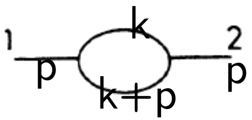
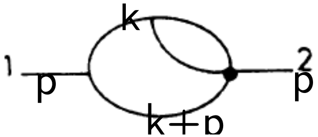



diagramas 1PI son divergentes: **Figura 1.**

$\kappa^{(2)}(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}$ diverge logarítmicamente.

- Grado ingenuo de divergence(Naive power counting): Escala todos los momentum internos:$k_i \to L k_i$, $L \to \infty$. La integral se comporta como $L^D$, $D$ es el grado ingenuo de divergencia. Depende de la dimensión del espacio y del gráfico.

- Fig 1 D=0




- **Figura 2.**

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+q)^2-m^2+i\varepsilon}, D=0$$

# Substracciones

- $\kappa^{(2)}(p) = \int \frac{d^6k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \; D = 2$
- $\frac{\partial \kappa^{(2)}(p)}{\partial p_\mu} = -\int \frac{d^6k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{(k+p)^\mu}{[(k+p)^2 - m^2 + i\varepsilon]^2}, \; D = 1$
- Derivando respecto a los momentum externos de un diagrama 1PI se baja el grado de divergencia del diagrama en 1.
- $\kappa^{(2)}(p) = \kappa^{(2)}(0) + \frac{\partial \kappa^{(2)}(p)}{\partial p_\mu}|_{p=0} p_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa^{(2)}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu}|_{p=0} p_\mu p_\nu + \text{finito}$

Las divergencia de los diagramas 1PI son polinomios en los momentos externos. Esto es, son términos locales.

Bibliografïa:Diagrammar.

J.A. PRL 94, 221302 (2005)

**Dimensional Regularization** We generalize dimensional regularization to a d dimensional space with an arbitrary constant metric $g_{\mu\nu}$. We work with a positive definite metric first and then Wick rotate. We will illustrate the procedure with an example. Here $g = d\,e\,t(g_{\mu\nu})$ and $\Delta > 0$.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \int \frac{d^d\,k}{(2\,\pi)^d} \frac{1}{(k^2+\Delta)^n} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}\,\Gamma(n)} \int_0^\infty d\ t\ t^{n-1} \int \frac{d^d\,k}{(2\,\pi)^d}\ e^{-t(g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta+\Delta)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}\,\Gamma(n)} \int_0^\infty d\,t\,t^{n-1} e^{-t(\Delta)} \Big(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\Big)^d \qquad u = t\Delta$$

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Delta^{-n+\frac{d}{2}}}{\sqrt{g}\,\Gamma(n)} \frac{1}{(2\,\pi)^d} \int_0^\infty d\,u\,u^{n-1-\frac{d}{2}} e^{-u} = \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\Big(n-\frac{d}{2}\Big)}{\Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-\frac{d}{2}}}$$

Wick rotation: $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$. $q_0=i\,k_0$, $q^2=-k^2$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2-\Delta+i\varepsilon)^n} = i(-1)^n\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+\Delta)^n} = i(-1)^n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta-i\varepsilon}\right)^{n-\frac{d}{2}}$$

$$\int \frac{d^d\, q}{(2\,\pi)^d}\, \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2-\Delta+i\varepsilon)^n} = \lambda \eta_{\mu\nu}$$

$$\lambda d = \int \frac{d^d\, q}{(2\,\pi)^d}\, \frac{q^2-\Delta+\Delta}{(q^2-\Delta+i\varepsilon)^n} = B_{n-1} + \Delta B_n$$

$$B_n = \int \frac{d^d\, q}{(2\,\pi)^d}\, \frac{1}{(q^2-\Delta+i\varepsilon)^n} = i(-1)^n \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}}\, \frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-\frac{d}{2}}$$

$$\lambda d = i(-1)^{n-1} \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}}\, \frac{\Gamma\left(n-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} +$$

$$i(-1)^n \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}}\, \frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-1-\frac{d}{2}}$$

$$= i(-1)^n \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(n-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n-1)} \left[-1 + \frac{\left(n-1-\frac{d}{2}\right)}{n-1}\right] =$$

$$-\left(\frac{d}{2}\right) i(-1)^n \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(n-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} i(-1)^n \frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(n-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - \Delta + i\varepsilon)^n} = i(-1)^{n-1} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{1}{\Delta - i\varepsilon} \right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(n - 1 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}$$

1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2} = \frac{1}{a-b}\frac{-1}{[ax+b(1-x)]}\Big|_0^1 = \frac{1}{a-b}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}$$

2. $\frac{1}{a^2\, b} = \int_0^1 \frac{2x\, dx}{[a\, x + b(1-x)]^3}$

3. $\frac{1}{a^n\, b} = \int_0^1 \frac{n\, x^{n-1}\, dx}{[a\, x + b(1-x)]^{1+n}}$

4. $2\int_0^1 dx\, dy\, dz \frac{\delta(x+y+z-1)}{[a\, x + b\, y + c\, z]^3} = \frac{1}{a\, b\, c}$

5. ....

$$\kappa^{(2)}(p) = \int \frac{d^6k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}$$

Calculemos en dimensión $d$:$\kappa^{(2)}(p) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon} =$$

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(k^2-m^2+i\varepsilon)x+((k+p)^2-m^2+i\varepsilon)(1-x)]^2}$$

$$[] = k^2-m^2+i\varepsilon+2k.p(1-x)+p^2(1-x) =$$

$$(k+p(1-x))^2-p^2(1-x)^2+p^2(1-x)-m^2+i\varepsilon =$$

$$(k+p(1-x))^2+p^2x(1-x)-m^2+i\varepsilon$$

$$k->k-p(1-x)$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2+p^2x(1-x)-m^2+i\varepsilon]^2} = i(-1)^2\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\Delta-i\varepsilon}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

$$\Delta = m^2-p^2x(1-x)$$

Si la parte real del número complejo z es positiva (Re(z) > 0), entonces la integral

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{dt}$$

converge absolutamente. Usando la integración por partes, se obtiene la siguiente propiedad:

$$\Gamma(z+1)=z\ \Gamma(z)$$

Esta ecuación funcional generaliza la relación n! = n (n-1)! del factorial. Se puede evaluar $\Gamma(1)$ analíticamente:

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt}=\lim_{k\to\infty} -e^{-t}\,|_0^k=-0-(-1)=1.$$

Combinando estas dos relaciones se obtiene que el factorial es un caso especial de la función Gamma:

$$\Gamma(n+1)=n\ \Gamma(n)=\cdots=n!\ \Gamma(1)=n!$$

para los números naturales n.

La función Gamma es una función meromorfa de $z\in\mathbb{C}$ con polos simples en z = -n (n = $0, 1, 2, 3, \ldots$) y residuos $\mathrm{Res}(\Gamma(z),\ -n)=\frac{(-1)^n}{n!}$. Estas propiedades pueden ser usadas para extender $\Gamma(z)$ desde su definición inicial a todo el plano complejo (exceptuando los puntos en los cuales es singular) por continuación analítica.

Otras ecuaciones funcionales importantes de la función Gamma son la fórmula de reflexión de Euler

$$\Gamma(1-z)\ \ \Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi z\right)}$$

y la fórmula de duplicación

$$\Gamma(z)\ \ \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\ \ \sqrt{\pi}\ \ \Gamma(2z).$$

La fórmula de duplicación es un caso especial del teorema de multiplicación

$$\Gamma(z)\ \ \Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\ \ \Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{(m-1)/2}\ \ m^{1/2-\mathrm{mz}}\ \ \Gamma(\mathrm{mz}).$$

Una propiedad básica y muy útil de la función Gamma , que puede obtenerse a partir de la definición mediante productos infinitos de Euler es:

$$\overline{\Gamma(z)}=\Gamma(\bar{z})$$

Varios límites útiles para aproximaciones asintóticas:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(n+\beta)}=1;\qquad \alpha,\beta\in R$$

Quizá el valor más conocido de la función Gamma con argumento no negativo es

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

La cual puede obtenerse haciendo z = 1/2 en la fórmula de reflexión.

En general, para valores impares de n se tiene:

$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\ \frac{n!!}{2^{(n+1)/2}}$ (n impar)

donde n!! denota al doble factorial.

La función Gamma tiene un polo de orden 1 en z = -n para todo número natural y el cero. El residuo en cada polo es:

$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

# Problema #1

Considere un campo escalar complejo, acoplado minimalmente al campo electromagnético $A_\mu$. El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi\,,\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\;,\; D_\mu = \partial_\mu + i\,e\,A_\mu$$

1- Encuentre en espacio de momentos

i) el propagador del campo escalar;

ii) Los vértices que describen la interacción del fotón con el campo $\phi$.

2-Calcule la contribución del campo escalar a la polarización del vacío del fotón, usando regularización dimensional. Note que hay dos diagramas. Para escribir la respuesta en la forma transversal:

$$\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$$

es conveniente sumar los dos diagramas al comienzo, poniéndolos sobre un denominador común antes de introducir parámetros de Feynman. Además use la simetría del integrando bajo el cambio de variables $x -> 1 - x$. Escriba explícitamente la parte divergente y la parte finita. Explique claramente de donde viene la dependencia en $\mu$.

Sol:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\Pi 1(k)_{\mu\nu} = (-ie)^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \quad (2p+k)_\mu \quad (2p+k)_\nu \quad \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\Pi 2(k)_{\mu\nu} = 2ie^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu}$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \cdot \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu - 2\, g_{\mu\nu}((p+k)^2 - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} =$$
$$e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu - 2 g_{\mu\nu}((p+k)^2 - m^2)}{[(p^2 - m^2 + i\epsilon)x + (1-x)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)]^2}$$

$$D = p^2 - m^2 + 2(1-x)pk + (1-x)k^2 = [p + (1-x)k]^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\epsilon$$

$p -> p - (1-x)k$:

$$N_{\mu\nu} = (2p + k(-1+2x))_\mu (2p + k(-1+2x))_\nu - 2\, g_{\mu\nu}((p+kx)^2 - m^2) =$$
$$4p_\mu p_\nu + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 - 2 g_{\mu\nu}(p^2 + k^2\, x^2 - m^2)$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{4p_\mu p_\nu + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 - 2\, g_{\mu\nu}(p^2 + k^2\, x^2 - m^2)}{(p^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\,\epsilon)^2} =$$

$$e^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \int_0^1 dx\, M^{\frac{d}{2}-2} \Big( -2 g_{\mu\nu}(m^2 - k^2 x(1-x)) + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 (1 - \frac{d}{2}) - 2\, g_{\mu\nu} \Big[$$

$$-m^2 + k^2 (\frac{d}{2} x(1-x) + x^2(1 - \frac{d}{2}) ) ]$$

Coeff$(m^2)$=0

$$C(k^2 g_{\mu\nu}) = 2x(1-x) - 2\,(\frac{d}{2}x(1-x) + x^2(1-\frac{d}{2})) = (1-\frac{d}{2})[4x(1-x)-1]$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\frac{d}{2})(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx\, M^{\frac{d}{2}-2}(1-2x)^2$$

$\epsilon = 2 - \frac{d}{2}$

$$2[A] + 2 - d = 0, [A] = 1-\epsilon, 1 = [e] + [A], [e] = \epsilon$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}\Gamma(\epsilon)(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx (\frac{M}{4\pi\mu^2})^{-\epsilon}(1-2x)^2$$

$$\mathrm{PF}\Pi(k)_{\mu\nu} = -e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx\, ln(\frac{M}{4\pi\mu^2})(1-2x)^2$$

$$\mathrm{PP}\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx(1-2x)^2$$

## Problema #2

La acción del modelo de Gross- Neveu es:

$$\int d^2x(\bar{\psi}^a\, i\partial_\mu\gamma^\mu\psi^a+\frac{g_0}{N}(\bar{\psi}^a\psi^a)^2)\quad a=1,....N\,,\gamma^0=\sigma_3,\gamma^1=i\sigma_2,\gamma_5=\gamma_0\gamma_1=\sigma_1$$

1. Encuentre el grado de divergencia ingenuo de un diagrama 1PI con E patas externas y V vértices para dimension d arbitraria, y demuestre que el modelo es renormalizable en d=2.Sol:

$$D=dL-P;L=P-V+1;4V=2P+E;D=d(P-V+1)-P=d(V+1-\frac{E}{2})+\frac{E}{2}-2V$$

$$D=(d-2)V+d-(d-1)\frac{E}{2};\mathrm{En}\,d=2,D=2-\frac{E}{2},\mathrm{luego\,el\,modelo\,es\,renormalizable}$$

2. Qué simetrías internas tiene el modelo?

   R:

$$\psi'^a=U^a{}_b\psi^b\;,\bar{\psi}'^a=\bar{\psi}^b\,U_b^{\uparrow a}\;,U\varepsilon U(N)$$

$$\psi'\;=\gamma_5\psi\;,\bar{\psi}'^a=-\bar{\psi}\,\gamma_5,\mathrm{simetria\ quiral}$$

3. Encuentre el potencial efectivo de la teoría usando el término dominante en la expansión $1/N$ y renormalícelo usando regularización dimensional y MSS.R: Sumamos a la acción

$$A(\frac{N\sigma}{2g_0}-\bar{\psi}^a\psi^a)^2; \frac{AN^2\sigma^2}{4g_0^2}-\frac{AN\sigma}{g_0}\bar{\psi}^a\psi^a+A(\bar{\psi}^a\psi^a)^2+\frac{g_0}{N}(\bar{\psi}^a\psi^a)^2$$

Elijo $A=-\frac{g_0}{N}$, para eliminar el término cuártico, e integro sobre los fermiones para obtener la acción efectiva para $\sigma$:

$$iNS_{\text{ef}}(\sigma)=N\int d^2x(-i\,\frac{\sigma^2(x)}{4\,g_0}+\text{tr}(ln(i\partial_\mu\gamma^\mu+\sigma)))$$

$$V_{\text{ef}}(\sigma)=\frac{\sigma^2}{4\,g_0}+i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\text{tr}(ln(p_\mu\gamma^\mu+\sigma)), \sigma=\text{constante}$$

Para evaluar esta expresión, calculamos:

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g_0}+i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\text{tr}(\frac{p_\mu\gamma^\mu-\sigma}{p^2-\sigma^2})=\frac{\sigma}{2g_0}-i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{2\sigma}{p^2-\sigma^2}\ (1)$$

Para renormalizar partimos de (1) extendiendo la integral a dimensión $d$.

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma} = \frac{\sigma}{2g_0} - 2\sigma i(-i)\Gamma(1-\frac{d}{2})(\sigma^2)^{\frac{d}{2}-1}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}, \epsilon = 1-\frac{d}{2}$$

$$[g_0]+4[\psi]-d=0; 2[\psi]+1-d=0; [g_0]=d-2d+2=2-d=2\epsilon$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma} = \frac{\sigma}{2g_0} - \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} + \text{finito}$$

Definamos:

$$\frac{1}{g_0} - \frac{1}{\pi\epsilon} = \frac{1}{g},$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma} = \frac{\sigma}{2g\mu^{2\epsilon}} - 2\sigma^{-2\epsilon+1}\frac{1}{4\pi}(4\pi)^{\epsilon}\Gamma(\epsilon) = \frac{\sigma}{2g\mu^{2\epsilon}}(1-\frac{g}{\pi}(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2})^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon))$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma; (1-\epsilon ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2}))(\frac{1}{\epsilon}-\gamma) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma - ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2})$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma} = \frac{\sigma}{2g}(1+\frac{g\gamma}{\pi}+\frac{g}{\pi}ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2})); \sigma=0, \sigma=2\sqrt{\pi}\,\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}$$

$$\frac{1}{g_0} - \frac{1}{\pi\epsilon} = \frac{1}{g}$$

4. Encuentre el vacío de la teoría, usando 3. Se rompen algunas de las simetrías encontradas en 2.?

   R: Se rompe la simetría quiral, porque $\sigma \neq 0$

$$\sigma = 2\sqrt{\pi}\,\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}$$

5. Encuentre la función $\beta$ del modelo, usando 4. Es el modelo asintóticamente libre? Justifique su razonamiento.

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g})\sigma = 0;\, \mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)} + \beta\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}\frac{\pi}{g^2} = 0;\, \beta = -\frac{g^2}{\pi},$$

$$g(t) = \frac{g(t_0)}{1 + \pi g(t_0)(t - t_0)} \rightarrow 0, \mathrm{para}\, t \rightarrow \infty. \text{ Es asintoticamente libre.}$$

6. Explique en qué consiste la transmutación dimensional. Se da esta característica en el modelo de Gross-Neveu? Sí, observe como se generó la escala $\mu$

# Problema #4

Considere el modelo $\lambda\phi^3$ cuya acción (euclidea) es:

$$S = \int d^dx(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3)$$

Usando la integral funcional:

(a) Encuentre las reglas de Feynman en espacio de momentos.

$$\Delta = \frac{1}{p^2+m^2},$$  $$=-\lambda$$

(b) Encuentre la dimensión del espacio-tiempo $d_r$, donde el modelo es renormalizable, agregando todos los términos en el Lagrangiano que sean necesarios.

$D = dL - 2P, L = P - V + 1, 3V = 2P + E, D = dP - dV + d - 2P, (d-2)\frac{3V}{2} - (d-2)\frac{E}{2} - dV + d = V[\frac{d-6}{2}] - (d-2)\frac{E}{2} + d$

Por lo tanto: $d_r = 6$

$$D = 6 - 2E$$

Agregar:

$$\int d^d x(v + a\phi(x))$$

(c) Evalúe los gráficos 1PI divergentes, 1-loop, usando regularización dimensional. Encuentre la parte divergente(MSS) y finita de estos diagramas, incluyendo la dependencia en el parámetro arbitrario $\mu$.

$$\Gamma^1 = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2} = -\frac{\lambda}{2}\Gamma(1-\frac{d}{2})\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{(m^2)^{1-d/2}}$$

$$\Gamma^2(k) = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p-k)^2+m^2} = \int_0^1 d\ x\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p^2+m^2)(1-x)+x(p^2-2kp+k^2+m^2)]^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 d\ x\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p-kx)^2+k^2x(1-x)+m^2]^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\frac{d}{2})\frac{1}{(k^2x(1-x)+m^2)^{2-d/2}}$$

$$\Gamma^3 = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p-k_3)^2+m^2} =$$

$$\int_0^1 d\ x\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p^2+m^2)(1-x)+x(p^2-2k_3\,p+k_3^2+m^2)]^2} =$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 d\,x\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p-k\,_3x)^2+k_3^2x(1-x)+m^2]^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 d\,x\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(2 - \frac{d}{2})\frac{1}{(k_3^2x(1-x)+m^2)^{2-d/2}}+\dots$$

Determinemos la dimension de $\lambda$:

$$[\lambda]+3[\phi]-d=0, 2+2[\phi]-d=0,\ [\phi]=\frac{d-2}{2},\ [\lambda]=\frac{-d+6}{2}=\epsilon,\ [a]=4-\epsilon$$

Esto es:$\lambda=\lambda_0\mu^{\epsilon}$. Sea $M^2=k^2x(1-x)+m^2$, $\mathfrak{M}^2=k_3^2x(1-x)+m^2$

Tenemos:(Pokorski 4.51)

$$\Gamma^1=-\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\mu^{2\epsilon}\Gamma(-2+\epsilon)\frac{1}{(4\pi)^{3-\epsilon}}\frac{1}{(m^2)^{-2+\epsilon}}=-\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\Gamma(-2+\epsilon)\frac{1}{(4\pi)^3}\frac{m^4}{(\frac{m^2}{4\pi\mu^2})^{\epsilon}}$$

$$=-\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\frac{m^4}{(4\pi)^3}\frac{1}{-2+\epsilon}\frac{1}{-1+\epsilon}\frac{1}{\epsilon}(1-\gamma\epsilon)(1-\epsilon\ln(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}))$$

$$=-\frac{\lambda_0}{2}\frac{m^4}{(4\pi)^3}\mu^{-\epsilon}\left(\frac{1}{2\epsilon}+\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\ln(\frac{m^2}{4\pi\mu})\right)$$

$$\Gamma^2(k)=\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1\ \frac{1}{(4\pi)^3}\Gamma(\epsilon-1)\frac{M^2}{(\frac{M^2}{4\pi\mu^2})^\epsilon}=\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1\ \frac{M^2}{(4\pi)^3}\frac{1}{\epsilon-1}\frac{1}{\epsilon}(1-\gamma\epsilon)(1-\epsilon\ln(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}))$$

$$=\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1\ \frac{M^2}{(4\pi)^3}\left(-\frac{1}{\epsilon}-1+\gamma+\ln(\frac{M^2}{4\pi\mu^2})\right)$$

$$\Gamma^3=\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1\ \frac{\mathfrak{M}^2}{(4\pi)^3}\left(-\frac{1}{\epsilon}-1+\gamma+\ln(\frac{\mathfrak{M}^2}{4\pi\mu^2})\right)$$

# Problema #2

Considere las transformaciones de gauge siguientes, donde $h_{\mu\nu}$ es simétrico:

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \Lambda_\nu(x) + \partial_\nu \Lambda_\mu(x) \tag{1}$$

(a) Muestre que forman un álgebra cerrada.

(b) Encuentre la acción cuadrática en los campos $h_{\mu\nu}$, con ecuación de movimiento cuadrática en momentos ,más general invariante bajo $\delta$ .

(c) Encuentre las transformaciones BRST de los campos, incluyendo fantasmas, antifantasmas y campos auxiliares.

(d) Pruebe que las transformaciones encontradas en (c) son nilpotentes.

(e) Usando el método BRST, fije un gauge cuadrático (en la acción), con un parámetro libre $\alpha$.

(f) Encuentre el propagador de los fantasmas en espacio de momentum.

Sol:

$$(a)\ [\delta_{\Lambda_1},\ \ \delta_{\Lambda_2}]h_{\mu\nu} = \delta_{\Lambda_1}(\partial_\mu \Lambda_{2\,\nu}(x) + \partial_\nu \Lambda_{2\,\mu}(x)) - (1 \leftrightarrow 2) = 0$$

(b)

$S = h_{\mu\nu} s_{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, $s_{\mu\nu\alpha\beta}$ simetrico en $\alpha\beta y \mu\nu$. Ademas simetrico bajo $(\alpha\beta \leftrightarrow \mu\nu)$, $\delta S = h_{\mu\nu} s_{\mu\nu\alpha\beta}(p_\alpha \Lambda_\beta + p_\beta \Lambda_\alpha) = 0$

$$s_{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu\alpha\beta} = a_1 p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} + a_2 p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} + a_3 p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \\ a_4 p^2 \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + a_5 p^2 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + a_6 p^2 \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} + \\ a_7 \eta_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta + a_8 \eta_{\mu\alpha} p_\beta p_\nu + a_9 p_\alpha p_\nu \eta_{\mu\beta} \end{aligned}$$

$$a_1 p_\mu p_\nu p_\beta + a_2 p_\mu p^2 \eta_{\nu\beta} + a_3 p_\mu p_\nu p_\beta + a_4 p^2 \eta_{\mu\nu} p_\beta + a_5 p^2 p_\mu \eta_{\beta\nu} + a_6 p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} +$$

$a_7 \eta_{\mu\nu} p^2 p_\beta + a_8 p_\mu p_\nu p_\beta + a_9 p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} = 0$

$$a_1 + a_3 + a_8 = 0,\ a_2 + a_5 = 0,\ a_4 + a_7 = 0,\ a_6 + a_9 = 0$$

Impongamos simetría en $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$a_2 = a_3,\ a_5 = a_6,\ a_8 = a_9$$

Impongamos simetría en $(\mu \leftrightarrow \nu)$

$$a_2 = a_9,\ a_3 = a_8,\ a_5 = a_6$$

Se tiene:

$$a_9 = a_8 = a_2 = a_3 = -a_1/2, a_6 = a_1/2 = a_5, a_7 = -a_4,$$

Impongamos simetría en $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\mu\nu)$:

$a_1(p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta}) + a_4(p^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta) = a_1(p_\alpha p_\beta \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha p_\mu \eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu}) + a_4(p^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}p_\mu p_\nu)$

Por lo tanto

$$a_4 = -a_1$$

Esto es:

$s_{\mu\nu\alpha\beta} = a_1(p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2\eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} - p^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta)$

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu,\alpha} - a h_{\mu\alpha,\nu} - a h_{\nu\alpha,\mu} \\ (\Lambda_{\mu,\nu\alpha} + \Lambda_{\nu,\mu\alpha}) - a(\Lambda_{\mu,\alpha\nu} + \Lambda_{\alpha,\mu\nu}) - a(\Lambda_{\nu,\alpha\mu} + \Lambda_{\alpha,\mu\nu}) = 0 \\ a = 1 \end{aligned}$$

La acción es:

$$S = a_1 \int d^n x (h_{\mu\nu,\mu\nu} h_{\alpha\alpha} - h_{\mu\mu,\alpha} h_{\nu\nu,\alpha}$$

Transformación BRST:

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu c_\nu(x) + \partial_\nu c_\mu(x)$$

$\delta c_\nu(x) = 0$

$\delta \bar{c_\nu}(x) = b_\nu(x)$

$\delta b_\nu(x) = 0$

obviamente nilpotente.

Gauge fixing:

$$\delta(\beta \bar{c_\nu}(x) b^\nu(x) + \bar{c}^\nu(x) h_{\nu\alpha,a}) = \beta b_\nu b^\nu + b^\nu h_{\nu\alpha,\alpha} - \bar{c}^\nu(x)(c_{\alpha,\alpha\nu} + c_{\nu,\alpha\alpha})$$

Integrando:

$$-\frac{1}{4\beta^2} h_{\nu\alpha,\alpha} h_{\nu\beta,\beta} - \bar{c}^\nu(x)(c_{\alpha,\alpha\nu} + c_{\nu,\alpha\alpha})$$

Propagadores:

i) Fantasma:

$$p_\alpha p_\nu F_{\alpha\beta} + p^2 F_{\nu\beta} = \eta_{\nu\beta} \qquad F_{\alpha\beta} = A p_\alpha p_\beta + B\eta_{\alpha\beta}$$

$$A p^2 p_\nu p_\beta + B p_\nu p_\beta + p^2 A p_\nu p_\beta + p^2 B \eta_{\nu\beta} = \eta_{\nu\beta}$$

$$2Ap^2 + B = 0,\ p^2 B = 1,\ B = \frac{1}{p^2},\ A = -\frac{1}{2(p^2)^2}$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{p^2}(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2p^2} p_\alpha p_\beta)$$