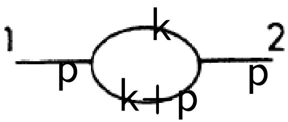

Figura 1. Un loop

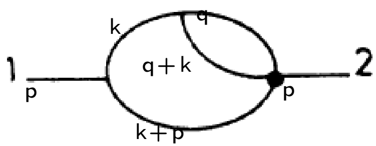

Figura 2. Dos loops

- En general, un diagrama de n-loops contiene n momentum internos que no son determinados por la conservación de energía-momentum en cada vértice. Cada uno de ellos contribuye con una integral $\int \frac{d^d q_i}{(2\pi)^d}$
- Consideremos un diagrama 1PI G de L loops. Si N_F:número de líneas internas fermiónicas; N_B: número de líneas internas bosónicas. Entonces:$D(G) = dL - N_F - 2N_B$
- Topología:$L = P - V + 1$. P es el número de propagadores internos. Por cada vértice se obtiene una relación entre los momentos, pero hay una conservación global de momentum. Sólo $V-1$ condiciones independientes
- Topología. Conservación de líneas.$\sum_n nV_n = N + 2P$, N:número de líneas externas.
- La teoría es super-renormalizable si $D(G) \geqslant 0$ para un número finito de diagramas y vértices.
- La teoría es renormalizable si $D(G) \geqslant 0$ para un número finito de diagramas. $D(G)$ es independiente del número de vértices.
- La teoría no es renormalizable si $D(G) \geqslant 0$ para un número infinito de diagramas.

Problema #1

Considere el modelo $\lambda\phi^3$ cuya acción (euclidea) es:

$$S = \int d^d x (\frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3)$$

Usando la integral funcional:

(a) Encuentre las reglas de Feynman en espacio de momentos.

$$\Delta = \frac{1}{p^2 + m^2}, \; \curlyvee = -\lambda$$

(b) Encuentre la dimensión del espacio-tiempo d_r, donde el modelo es renormalizable, agregando todos los términos en el Lagrangiano que sean necesarios.

$D = dL - 2P, L = P - V + 1, 3V = 2P + E, D = dP - dV + d - 2P, (d-2)\frac{3V}{2} - (d-2)\frac{E}{2} - dV + d = V[\frac{d-6}{2}] - (d-2)\frac{E}{2} + d$

Por lo tanto:$d_r = 6$

$$D = 6 - 2E$$

Agregar:

$$\int d^d x (v + a\phi(x))$$

(c) Evalúe los gráficos 1PI divergentes, 1-loop, usando regularización dimensional. Encuentre la parte divergente(MSS) y finita de estos diagramas, incluyendo la dependencia en el parámetro arbitrario μ.

$$\Gamma^1 = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2} = -\frac{\lambda}{2}\Gamma(1-\frac{d}{2})\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{(m^2)^{1-d/2}}$$

$$\Gamma^2(k) = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p-k)^2+m^2} = \int_0^1 d\ x\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p^2+m^2)(1-x)+x(p^2-2kp+k^2+m^2)]^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 d\ x\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p-kx)^2+k^2x(1-x)+m^2]^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\frac{d}{2})\frac{1}{(k^2x(1-x)+m^2)^{2-d/2}}$$

$$\Gamma^3=\frac{(-\lambda)^3}{1}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p+k_1)^2+m^2}\frac{1}{(p+k_1+k_2)^2+m^2}=$$

Diverge logarítmicamente.La parte divergente se calcula con $k_1=k_2=0$

$$\Gamma^3=\frac{(-\lambda)^3}{1}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2+m^2)^3}=\frac{(-\lambda)^3}{1}\frac{1}{(4\,\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma\Big(3-\frac{d}{2}\Big)}{\Gamma(3)}\frac{1}{(m^2)^{3-\frac{d}{2}}}$$

Determinemos la dimension de λ:

$$[\lambda]+3[\phi]-d=0,\,2+2[\phi]-d=0,\;[\phi]=\frac{d-2}{2},\;[\lambda]=\frac{-d+6}{2}=\epsilon,\;[a]=4-\epsilon$$

Esto es:$\lambda=\lambda_0\mu^\epsilon$. Sea $M^2=k^2x(1-x)+m^2$, $\mathfrak{M}^2=k_3^2x(1-x)+m^2$

Tenemos:(Pokorski 4.51)

$$\Gamma^1 = -\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\mu^{2\epsilon}\Gamma(-2+\epsilon)\frac{1}{(4\pi)^{3-\epsilon}}\frac{1}{(m^2)^{-2+\epsilon}} = -\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\Gamma(-2+\epsilon)\frac{1}{(4\pi)^3}\frac{m^4}{(\frac{m^2}{4\pi\mu^2})^\epsilon}$$

$$=-\frac{\lambda_0}{2}\mu^{-\epsilon}\frac{m^4}{(4\pi)^3}\frac{1}{-2+\epsilon}\frac{1}{-1+\epsilon}\frac{1}{\epsilon}(1-\gamma\epsilon)(1-\epsilon\ln(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}))$$

$$=-\frac{\lambda_0}{2}\frac{m^4}{(4\pi)^3}\mu^{-\epsilon}\left(\frac{1}{2\epsilon}+\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\ln(\frac{m^2}{4\pi\mu})\right)$$

$$\Gamma^2(k) = \frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1 \frac{1}{(4\pi)^3}\Gamma(\epsilon-1)\frac{M^2}{(\frac{M^2}{4\pi\mu^2})^\epsilon} = \frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1 \frac{M^2}{(4\pi)^3}\frac{1}{\epsilon-1}\frac{1}{\epsilon}(1-\gamma\epsilon)(1-\epsilon\ln(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}))$$

$$=\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^1 \frac{M^2}{(4\pi)^3}\left(-\frac{1}{\epsilon}-1+\gamma+\ln(\frac{M^2}{4\pi\mu^2})\right)$$

$$\Gamma^3 = \frac{(-\lambda_0 \mu^\varepsilon)^3}{3} \frac{1}{(4\,\pi)^{3-\varepsilon}} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(3)} \frac{1}{(m^2)^\varepsilon} =$$

$$-\frac{\lambda_0^3 \mu^\varepsilon}{6(4\pi)^3} \left(1 - \varepsilon ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) =$$

$$-\frac{\lambda_0^3 \mu^\varepsilon}{6(4\pi)^3} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right)$$

- Super-renormalizable: La constante de acoplamiento tiene dimensión de masa positiva.
- Renormalizable: La constante de acoplamiento no tiene dimensiones.
- No-renormalizable: La constante de acoplamiento tiene dimensión de masa negativa.
- Redefinimos $\lambda = \lambda_0 \mu^{\epsilon}$ tal que λ_0 no tiene dimensiones, para todo ε. μ refleja la arbitrariedad de los términos finitos de cada diagrama.

1. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi(x)^3 + v + a\phi(x) +$
   $\frac{1}{2}\delta Z\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}\delta m\phi(x)^2 + \frac{\delta\lambda}{3!}\phi(x)^3 + \delta v + \delta a\phi(x)$
2. La segunda línea contiene los contratérminos. Se determinan a cada orden de teoría de perturbaciónes de tal manera que el diagrama correspondiente sea finito. El proceso es iterativo, dado que debemos cancelar primero los infinitos de los subdiagramas y luego definir el nuevo contratérmino.
3. ϕ:campo renormalizado;λ:constante de acoplamiento renormalizada;m:parámetro de masa renormalizado; v: vacío renormalizado; a: valor promedio del campo en el vacío renormalizado.
4. Redefinimos: $Z = 1 + \delta Z$, renormalización de la función de onda;$m_0^2 Z = m^2 + \delta m$, m_0: masa desnuda;$\lambda_0 Z^2 = \lambda + \delta\lambda$, λ_0:constante de acoplamiento desnuda.$a_0 Z^{\frac{1}{2}} = a + \delta a$:valor promedio del campo en el vacío desnudo.
5. Redefinimos $\phi_0 = Z^{\frac{1}{2}}\phi$: campo desnudo.
6. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0(x)\partial_\mu\phi_0(x) + \frac{1}{2}m_0^2\phi_0(x)^2 + \frac{\lambda_0}{3!}\phi(x)^3 + v_0 + a_0\phi_0(x)$

Problema #1

Considere un campo escalar complejo, acoplado minimalmente al campo electromagnético A_μ. El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi\ ,\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ ,\ D_\mu = \partial_\mu + i\,e\,A_\mu$$

1- Encuentre en espacio de momentos

i) el propagador del campo escalar;

ii) Los vértices que describen la interacción del fotón con el campo ϕ.

Sol:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\Pi 1(k)_{\mu\nu} = (-ie)^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \quad (2p+k)_\mu \quad (2p+k)_\nu \quad \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\Pi 2(k)_{\mu\nu} = 2ie^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\, g_{\mu\nu}$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \cdot \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu - 2\, g_{\mu\nu}((p+k)^2 - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} =$$
$$e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu - 2 g_{\mu\nu}((p+k)^2 - m^2)}{[(p^2 - m^2 + i\epsilon)x + (1-x)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)]^2}$$

$$D = p^2 - m^2 + 2(1-x)pk + (1-x)k^2 = [p + (1-x)k]^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\epsilon$$

$p -> p - (1-x)k$:

$$N_{\mu\nu} = (2p + k(-1+2x))_\mu (2p + k(-1+2x))_\nu - 2\, g_{\mu\nu}((p+kx)^2 - m^2) =$$
$$4p_\mu p_\nu + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 - 2\, g_{\mu\nu}(p^2 + k^2\, x^2 - m^2)$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{4p_\mu p_\nu + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 - 2\, g_{\mu\nu}(p^2 + k^2\, x^2 - m^2)}{(p^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\,\epsilon)^2} =$$

$$e^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \int_0^1 dx\, M^{\frac{d}{2}-2} \Big(-2 g_{\mu\nu}(m^2 - k^2 x(1-x)) + k_\mu k_\nu (1-2x)^2 (1 - \frac{d}{2}) - 2\, g_{\mu\nu} \Big[$$

$$-m^2 + k^2 (\frac{d}{2} x(1-x) + x^2 (1 - \frac{d}{2}))]$$

Coeff(m^2)=0

$$C(k^2 g_{\mu\nu}) = 2x(1-x) - 2\,(\frac{d}{2}x(1-x) + x^2(1-\frac{d}{2})) = (1-\frac{d}{2})[4x(1-x)-1]$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(2-\frac{d}{2})(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 \, dx\, M^{\frac{d}{2}-2}(1-2x)^2$$

$\epsilon = 2 - \frac{d}{2}$

$$2[A] + 2 - d = 0, [A] = 1-\epsilon, 1 = [e] + [A], [e] = \epsilon$$

$$\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(\epsilon)(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 \, dx(\frac{M}{4\pi\mu^2})^{-\epsilon}(1-2x)^2$$

$$\mathrm{PF}\Pi(k)_{\mu\nu} = -e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 \, dx\, ln(\frac{M}{4\pi\mu^2})(1-2x)^2$$

$$\mathrm{PP}\Pi(k)_{\mu\nu} = e^2 \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 \, dx(1-2x)^2$$

Problema #2

La acción del modelo de Gross- Neveu es:

$$\int d^2x(\bar{\psi}^a i\partial_\mu\gamma^\mu\psi^a + \frac{g_0}{N}(\bar{\psi}^a\psi^a)^2) \quad a=1,....N\,, \gamma^0=\sigma_3, \gamma^1=i\sigma_2, \gamma_5=\gamma_0\gamma_1=\sigma_1$$

1. Encuentre el grado de divergencia ingenuo de un diagrama 1PI con E patas externas y V vértices para dimension d arbitraria, y demuestre que el modelo es renormalizable en d=2.Sol:

$$D=dL-P; L=P-V+1; 4V=2P+E; D=d(P-V+1)-P=d(V+1-\frac{E}{2})+\frac{E}{2}-2V$$

$$D=(d-2)V+d-(d-1)\frac{E}{2}; \text{En } d=2, D=2-\frac{E}{2}, \text{luego el modelo es renormalizable}$$

2. Qué simetrías internas tiene el modelo?

   R:

$$\psi'^a=U^a{}_b\psi^b\;,\bar{\psi}'^a=\bar{\psi}^b U_b^{\uparrow a}\;, U\varepsilon U(N)$$

$$\psi'\;=\gamma_5\psi\;,\bar{\psi}'^a=-\bar{\psi}\gamma_5, \text{simetria quiral}$$

3. Encuentre el potencial efectivo de la teoría usando el término dominante en la expansión $1/N$ y renormalícelo usando regularización dimensional y MSS.R: Sumamos a la acción

$$A(\frac{N\sigma}{2g_0}-\bar{\psi}^a\psi^a)^2; \frac{AN^2\sigma^2}{4g_0^2}-\frac{AN\sigma}{g_0}\bar{\psi}^a\psi^a+A(\bar{\psi}^a\psi^a)^2+\frac{g_0}{N}(\bar{\psi}^a\psi^a)^2$$

Elijo $A=-\frac{g_0}{N}$, para eliminar el término cuártico, e integro sobre los fermiones para obtener la acción efectiva para σ:

$$i\,NS_{\mathrm{ef}}(\sigma)=N\int d^2x(-i\,\frac{\sigma^2(x)}{4\,g_0}+\mathrm{tr}(ln(i\partial_\mu\gamma^\mu+\sigma)))$$

$$V_{\mathrm{ef}}(\sigma)=\frac{\sigma^2}{4\,g_0}+i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}(ln(p_\mu\gamma^\mu+\sigma)),\sigma=\mathrm{constante}$$

Para evaluar esta expresión, calculamos:

$$\frac{dV_{\mathrm{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g_0}+i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}(\frac{p_\mu\gamma^\mu-\sigma}{p^2-\sigma^2})=\frac{\sigma}{2g_0}-i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{2\sigma}{p^2-\sigma^2}\ (1)$$

Para renormalizar partimos de (1) extendiendo la integral a dimensión d.

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g_0}-2\sigma i(-i)\Gamma(1-\frac{d}{2})(\sigma^2)^{\frac{d}{2}-1}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}},\epsilon=1-\frac{d}{2}$$

$$[g_0]+4[\psi]-d=0;2[\psi]+1-d=0;[g_0]=d-2d+2=2-d=2\epsilon$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g_0}-\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}+\text{finito}$$

Definamos:

$$\frac{1}{g_0}-\frac{1}{\pi\epsilon}=\frac{1}{g},$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g\mu^{2\epsilon}}-2\sigma^{-2\epsilon+1}\frac{1}{4\pi}(4\pi)^{\epsilon}\Gamma(\epsilon)=\frac{\sigma}{2g\mu^{2\epsilon}}(1-\frac{g}{\pi}(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2})^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon))$$

$$\Gamma(\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}-\gamma;(1-\epsilon ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2}))(\frac{1}{\epsilon}-\gamma)=\frac{1}{\epsilon}-\gamma-ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2})$$

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{d\sigma}=\frac{\sigma}{2g}(1+\frac{g\gamma}{\pi}+\frac{g}{\pi}ln(\frac{\sigma^2}{4\pi\mu^2}));\sigma=0,\sigma=2\sqrt{\pi}\,\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}$$

$$\frac{1}{g_0}-\frac{1}{\pi\epsilon}=\frac{1}{g}$$

4. Encuentre el vacío de la teoría, usando 3. Se rompen algunas de las simetrías encontradas en 2.?

   R: Se rompe la simetría quiral, porque $\sigma \neq 0$

$$\sigma = 2\sqrt{\pi}\,\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}$$

5. Encuentre la función β del modelo, usando 4. Es el modelo asintóticamente libre? Justifique su razonamiento.

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g})\sigma = 0;\, \mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)} + \beta\mu e^{-(\frac{\pi}{g}+\gamma)}\frac{\pi}{g^2} = 0;\, \beta = -\frac{g^2}{\pi},$$

$$g(t) = \frac{g(t_0)}{1+\pi g(t_0)(t-t_0)} \rightarrow 0, \mathrm{para}\, t \rightarrow \infty.\ \text{Es asintoticamente libre.}$$

6. Explique en qué consiste la transmutación dimensional. Se da esta característica en el modelo de Gross-Neveu? Sí, observe como se generó la escala μ