Teorías de Gauge

Examen
Miércoles 28 de Junio de 2017
Prof: Jorge Alfaro S.

Problema #1

Considere la acción de Cromodinámica Cuántica, para un grupo de gauge G, con constantes de estructura f^{abc}:

$$S=\int d^dx\left(\bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D_\mu-m)\psi(x)-\frac{1}{4}\sum_a (F^a_{\mu\nu})^2\right), F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,$$

$D_\mu=\partial_\mu-i\,gt^aA^a_\mu$

Use el método del “Background Field”(BFM) para encontrar la contribución de los N_f fermiones a la función β de la teoría, :

(a) Escriba la densidad lagrangiana en el BFM.
(b) Fije el BF gauge, usando BRST
(c) Encuentre las reglas de Feynman para los fermiones
(d) Calcule el(los) diagramas que determinan la contribución de los fermiones a la función β.
(e) Dado que la contribución a β de fantasmas y campos de YM es:

$$-\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{3\epsilon}11C_A,\ C_A\delta_{ad}=f^{abc}f^{bcd}$$

encuentre β incluyendo la contribución de N_f especies de fermiones.

(f) Encuentre la variación con la escala de la constante de acoplamiento g, en el límite infrarrojo y en el límite ultravioleta, *cuando esté justificado usar teoría de perturbaciones.*

Sol:

En la accióon fermióonica reemplacemos A por A_c + $\widetilde{Q}$, donde A_c es el BF, se genera el veértice $\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu gt^aA^a_{c\mu})\psi(x)$

(c) Las reglas de Feymann para los fermiones son:

$$S_F(p)=\longleftarrow p=\frac{i(p_\mu\gamma^\mu+m)}{p^2-m^2+i\epsilon},\ \text{vertice}=i\,gt^a\gamma^\mu$$

(d) Necesitamos calcular la contribución 1-loop de los fermiones a Z_A. Esta es la misma que en QED:

$$=tr(t^at^b)N_f\ \ \Pi^{\mu\nu}(q)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q)=-g^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}tr(\gamma^\mu S_F(k)\gamma^\nu S_F(k+q))$$

Usamos:

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)=4(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}-\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})$$

para obtener:

$$\Pi^{\mu\nu}(q)=-4g^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu(k+q)^\nu+k^\mu(k+q)^\nu-\eta^{\mu\nu}(k(k+q)-m^2)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)}=$$

$$-4g^2\int_0^1dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu(k+q)^\nu+k^\mu(k+q)^\nu-\eta^{\mu\nu}(k(k+q)-m^2)}{((k+xq)^2+q^2x(1-x)-m^2)^2}, k\to k-xq,$$

$=$

$$-4g^2\int_0^1 d \qquad x\int$$

$$\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(k-xq)^\mu(k+(1-x)q)^\nu+(k-xq)^\mu(k+(1-x)q)^\nu-\eta^{\mu\nu}(k-xq)(k+(1-x)q)-m^2)}{(k^2+q^2x(1-x)-m^2)^2}=$$

$$-4g^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

$$\frac{2k^\mu k^\nu-2x(1-x)q^\mu q^\nu-\eta^{\mu\nu}(k^2-x\,(1-x)q^2-m^2)}{(k^2+q^2x(1-x)-m^2)^2}=$$

$$-4g^2\int_0^1 dx\frac{i}{(4\pi)^2}(\frac{M}{4\pi})^{\frac{d}{2}-2}\Gamma(2-\frac{d}{2})\left(\eta^{\mu\nu}(x(1-x)q^2+m^2)-2x(1-x)q^\mu q^\nu-(\frac{2}{d}-1)\eta^{\mu\nu}\frac{d}{2}\frac{M}{1-\frac{d}{2}}\right)$$

$$=-4g^2\int_0^1 dx\frac{i}{(4\pi)^2}(\frac{M}{4\pi})^{\frac{d}{2}-2}\Gamma(2-\frac{d}{2})(2x(1-x)(q^2\eta^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)), M=m^2-q^2x(1-x)$$

Sea $\epsilon=2-\frac{d}{2}$. El polo en ϵ es:

$$\mathrm{PP}\,\Pi^{\mu\nu}=-4g^2\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\int_0^1 dx2x(1-x)(q^2\eta^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)=-\frac{4}{3}g^2\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(q^2\eta^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)$$

Con $tr(t^at^b)=C(r)\delta_{ab}$, se obtiene

$$Z_A'=-\frac{4}{3}g^2\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}C(r)\,N_f$$

Con lo cual:

$$Z_A=\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{3\epsilon}(11C_A-4C(r)N_f),\ C_A\delta_{ad}=f^{abc}f^{bcd}$$

Esto es:

$$\beta(g)=-\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{3\epsilon}(11C_A-4C(r)N_f)$$

f) Límite ultravioleta. Podemos usar teoría de perturbaciones si $\frac{11C_A-4C(r)N_f}{3(4\pi)^2}=B>0$

Límite infrarrojo. Podemos usar teoría de perturbaciones si $B<0$

Con $\mu=\mu_0e^t$, obtenemos

$$\frac{dg}{dt}=-Bg^3\rightarrow g^2=\frac{g_0^2}{1+2Bg_0^2t}, t=\ln(k^2)$$

Con $B>0$ $g\rightarrow 0$ para $k^2\rightarrow\infty$. La teoría es asintóticamente libre.

Con $B<0$ $g\rightarrow 0$ para $k^2\rightarrow 0$. La teoría es libre en el infrarrojo.

Problema #2

Considere las transformaciones de gauge siguientes, donde $h_{\mu\nu}$ es simétrico:

$$\delta h_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\Lambda_\nu(x)+\partial_\nu\Lambda_\mu(x) \tag{1}$$

(a) Muestre que forman un álgebra cerrada.

(b) Encuentre la acción cuadrática en los campos $h_{\mu\nu}$, con ecuación de movimiento cuadrática en momentos ,más general invariante bajo δ .

(c) Encuentre las transformaciones BRST de los campos, incluyendo fantasmas, antifantasmas y campos auxiliares.

(d) Pruebe que las transformaciones encontradas en (c) son nilpotentes.

(e) Usando el método BRST, fije un gauge cuadrático (en la acción), con un parámetro libre α.

(f) Encuentre el propagador de los fantasmas en espacio de momentum.

Sol:

$$(a)\ [\delta_{\Lambda_1},\ \ \delta_{\Lambda_2}]h_{\mu\nu} = \delta_{\Lambda_1}(\partial_\mu\Lambda_{2\nu}(x) + \partial_\nu\Lambda_{2\mu}(x)) - (1 \leftrightarrow 2) = 0$$

(b)

$S = h_{\mu\nu}s_{\mu\nu\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, $s_{\mu\nu\alpha\beta}$ simetrico en $\alpha\beta y \mu\nu$. Ademas simetrico bajo $(\alpha\beta \leftrightarrow \mu\nu)$, $\delta S = h_{\mu\nu}s_{\mu\nu\alpha\beta}(p_\alpha\Lambda_\beta + p_\beta\Lambda_\alpha) = 0$

$$s_{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu\alpha\beta} = {} & a_1 p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} + a_2 p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} + a_3 p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \\ & a_4 p^2 \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + a_5 p^2 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + a_6 p^2 \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} + \\ & a_7 \eta_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta + a_8 \eta_{\mu\alpha} p_\beta p_\nu + a_9 p_\alpha p_\nu \eta_{\mu\beta} \end{aligned}$$

$$a_1 p_\mu p_\nu p_\beta + a_2 p_\mu p^2 \eta_{\nu\beta} + a_3 p_\mu p_\nu p_\beta + a_4 p^2 \eta_{\mu\nu} p_\beta + a_5 p^2 p_\mu \eta_{\beta\nu} + a_6 p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} + a_7 \eta_{\mu\nu} p^2 p_\beta + a_8 p_\mu p_\nu p_\beta + a_9 p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} = 0$$

$$a_1 + a_3 + a_8 = 0,\ a_2 + a_5 = 0,\ a_4 + a_7 = 0,\ a_6 + a_9 = 0$$

Impongamos simetría en $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

$$a_2 = a_3,\ a_5 = a_6,\ a_8 = a_9$$

Impongamos simetría en $(\mu \leftrightarrow \nu)$

$$a_2 = a_9,\ a_3 = a_8,\ a_5 = a_6$$

Se tiene:

$$a_9 = a_8 = a_2 = a_3 = -a_1/2,\ a_6 = a_1/2 = a_5,\ a_7 = -a_4,$$

Impongamos simetría en $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\mu\nu)$:

$a_1(p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta}) + a_4(p^2 \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta) = a_1(p_\alpha p_\beta \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha p_\mu \eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu}) + a_4(p^2 \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}p_\mu p_\nu)$

Por lo tanto

$$a_4 = -a_1$$

Esto es:

$s_{\mu\nu\alpha\beta} = a_1(p_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\alpha \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}p_\mu p_\beta \eta_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2}p^2 \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta p_\nu - \frac{1}{2}p^2 p_\nu \eta_{\mu\beta} - p^2 \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta)$

La acción es:

$$S = a_1 \int d^n x\, (h_{\mu\nu,\mu\nu} h_{\alpha\alpha} - h_{\mu\mu,\alpha} h_{\nu\nu,\alpha})$$

Transformación BRST:

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu c_\nu(x) + \partial_\nu c_\mu(x)$$

$\delta c_\nu(x) = 0$

$\delta \bar{c_\nu}(x) = b_\nu(x)$

$\delta b_\nu(x) = 0$

obviamente nilpotente.

Gauge fixing:

$$\delta(\beta \bar{c_\nu}(x) b^\nu(x) + \bar{c}^\nu(x) h_{\nu\alpha,a}) = \beta b_\nu b^\nu + b^\nu h_{\nu\alpha,\alpha} - \bar{c}^\nu(x)(c_{\alpha,\alpha\nu} + c_{\nu,\alpha\alpha})$$

Integrando:

$$-\frac{1}{4\beta^2}h_{\nu\alpha,\alpha}h_{\nu\beta,\beta}-\bar{c}^\nu(x)(c_{\alpha,\alpha\nu}+c_{\nu,\alpha\alpha})$$

Propagadores:

i) Fantasma:

$$p_\alpha p_\nu F_{\alpha\beta}+p^2F_{\nu\beta}=\eta_{\nu\beta} \qquad F_{\alpha\beta}=Ap_\alpha p_\beta+B\eta_{\alpha\beta}$$

$$Ap^2p_\nu p_\beta+Bp_\nu p_\beta+p^2Ap_\nu p_\beta+p^2B\eta_{\nu\beta}=\eta_{\nu\beta}$$

$$2Ap^2+B=0,\ p^2B=1,\ B=\frac{1}{p^2},\ A=-\frac{1}{2(p^2)^2}$$

$$F_{\alpha\beta}=\frac{1}{p^2}(\eta_{\alpha\beta}-\frac{1}{2p^2}p_\alpha p_\beta)$$

Tiempo:3:30 horas

Algunas fórmulas útiles

NOTA: En esta prueba usaremos la métrica de Sakita: $g_{00}=1$, $g_{ii}=-1$.

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2-M)^n}=\frac{(-1)^ni}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)}(M)^{d/2-n}$$

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-M)^n}=\frac{(-1)^{n-1}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{g^{\mu\nu}}{2}\frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)}(M)^{1+d/2-n}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)=4(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}-\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}),$$

$$tr(t^at^b)=C(r)\delta_{ab}$$